

Βέλτιστος Έλεγχος: Το πρόβλημα LQR (γραμμικού-τετραγωνικού ρυθμιστή)

1. Προκαταρκτικά

1.1 Ανισότητα Cauchy-Schwartz

Θεώρημα 1: Έστω διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ (επί του $\mathbb{R}$) με εσωτερικό γινόμενο: $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε, αν $u, v \in \mathbb{R}$, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$, όπου $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ (η επαγόμενη νόρμα).

Απόδειξη: Έστω $a = \langle u, v \rangle$. Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $a \neq 0$, διαφορετικά η απόδειξη είναι προφανής. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u - a\lambda v\|^2 = \langle u - a\lambda v, u - a\lambda v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\lambda a \langle u, v \rangle + \lambda^2 a^2 \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 - 2\lambda a \langle u, v \rangle + \lambda^2 a^2 \|v\|^2 = \|u\|^2 - 2\lambda \langle u, v \rangle^2 + \lambda^2 \langle u, v \rangle^2 \|v\|^2 := f(\lambda) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $f(\lambda)$ ελαχιστοποιείται όταν:

$$f'(\lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda \langle u, v \rangle^2 \|v\|^2 = 2 \langle u, v \rangle^2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\|v\|^2}$$

Επομένως:

$$\|u\|^2 - \frac{2 \langle u, v \rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{1}{\|v\|^4} \langle u, v \rangle^2 \|v\|^2 \geq 0 \Rightarrow \|u\|^2 - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|v\|^2} \geq 0 \Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

□

1.2 Ευσταθείς αναλλοίωτοι υπόχωροι

Έστω $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \phi_-(\lambda)\phi_+(\lambda)$ όπου οι ρίζες του $\phi_-(\lambda)$ είναι στο $\mathbb{C}_-$ και οι ρίζες του $\phi_+(\lambda)$ είναι στο $\mathbb{C}_+$. Ο ευσταθής υπόχωρος του M ορίζεται ως $\mathcal{V}_- = \text{Ker } \phi_-(M)$. Ο $\mathcal{V}$ είναι M -αναλλοίωτος. Εφόσον $\phi_-(M)M = M\phi_-(M)$, τότε

$$x \in \mathcal{V}_- \Rightarrow \phi_-(M)x = 0 \Rightarrow M\phi_-(M)x = 0 \Rightarrow \phi_-(M)Mx = 0 \Rightarrow Mx \in \mathcal{V}_-$$

Επίσης έχουμε:

Λήμμα: (α) $\dim \mathcal{V}_- = \deg \phi_-(\lambda)$. (β) Για κάθε πίνακα V του οποίου οι στήλες είναι βάση του $\mathcal{V}_-$ υπάρχει πίνακας Hurwitz M_- με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi_-(\lambda)$ τέτοιος ώστε $MV = VM_-$.

Απόδειξη: (α) Εξετάζουμε την κανονική μορφή Jordan του πίνακα M :

$$M = T \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} T^{-1}$$

όπου T , $\det(T) \neq 0$, ο πίνακας των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, όπου ο J_- περιέχει όλα τα Jordan blocks που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του M στο $\mathbb{C}_-$ και όπου ο J_+ περιέχει όλα τα Jordan blocks που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του M στο $\mathbb{C}_+$. Οι ιδιοτιμές του J_- είναι οι ρίζες του $\phi_-(\lambda)$ και επομένως (α) $\phi_-(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του J_- , και (β) $\dim(J_-) = \deg \phi_-(\lambda) = \sum_{\{i: \lambda_i \in \sigma(M) \cap \mathbb{C}_-\}} \tau_i$, όπου τ_i η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_i \in \sigma(M)$. Εφόσον,

$$M^k = T \begin{bmatrix} J_-^k & 0 \\ 0 & J_+^k \end{bmatrix}$$

έχουμε

$$\phi_-(M) = T \begin{bmatrix} \phi_-(J_-) & 0 \\ 0 & \phi_-(J_+) \end{bmatrix} T^{-1} = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_-(J_+) \end{bmatrix} T^{-1}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα Cauley-Hamilton. Επομένως,

$$x \in \text{Ker } \phi_-(M) \Leftrightarrow T^{-1}x \in \text{Ker } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_-(J_+) \end{bmatrix}$$

Εφόσον καμμία ρίζα του $\phi(\lambda)$ δεν είναι ιδιοτιμή του J_+ , ο πίνακας $\phi_-(J_+)$ είναι μη-ιδιάζων και

$$\text{Ker } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_-(J_+) \end{bmatrix} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης ίσης με την διάσταση του J_- , δηλ. $\deg \phi_-(\lambda)$. Επομένως,

$$x \in \text{Ker } \phi_-(M) \Leftrightarrow T^{-1}x \in \mathcal{R} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in \mathcal{R} \left(T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Εφόσον $\det(T) \neq 0$ οι στήλες του $T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και επομένως αποτελούν βάση του $\mathcal{V}_-$. Εφόσον ο αριθμός των στηλών αυτών είναι ίσος με $\deg \phi_-(\lambda)$ συμπεραίνουμε ότι $\dim \mathcal{V}_- = \deg \phi_-(\lambda)$.

(β) Παρατηρούμε από την απόδειξη στο (α) ότι $T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι βάση του $\mathcal{V}_-$. Επίσης,

$$MT \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} J_- \quad (\text{Εξ1})$$

Εφόσον οι στήλες του V είναι επίσης βάση του $\mathcal{V}_-$ οι δύο βάσεις συνδέονται με μη-ιδιάζοντα πίνακα P , δηλαδή

$$VP = T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από την εξίσωση αυτή και την εξίσωση (Εξ1) έχουμε

$$MVP = VPJ_- \Leftrightarrow MV = VPJ_-P^{-1} = VM_-$$

όπου $M_- := PJ_-P^{-1}$. Εφόσον M_- και J_- συνδέονται με μετασχηματισμό ισοδυναμίας έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ίδιο φάσμα. Άρα ο πίνακας M_- είναι Hurwitz. $\square$

1.2 Μεταφορά κατάστασης με είσοδο ελάχιστης ενέργειας

Έστω $\mathcal{L}_2^m[0, t_1]$ ο χώρος (Hilbert) όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $u : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ με εσωτερικό γινόμενο

$$f, g \in \mathcal{L}_2^m[0, t_1] \Rightarrow \langle f, g \rangle = \int_0^{t_1} f^T(t)g(t)dt$$

και νόρμα

$$u \in \mathcal{L}_2^m[0, t_1] \Rightarrow \|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \int_0^{t_1} u^T(t)u(t)dt = \int_0^{t_1} \|u(t)\|^2 dt = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^m u_i^2(t)dt,$$

Έστω $\Sigma_i(A, B)$, το σύστημα $x' = Ax + Bu$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Έστω ότι το $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο και

$$\hat{W}_c(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau = \hat{W}_c^T(0, t_1) \succ 0$$

ο πίνακας Gramian ελεγχιμότητας του $\Sigma_i(A, B)$. Θεωρούμε την αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ως το αποτέλεσμα διαταραχής που εκτρέπει το σύστημα από την κατάσταση ισορροπίας $x_0 = 0$. Επιθυμούμε να επαναφέρουμε το σύστημα στην κατάσταση ισορροπίας $x(t_1) = 0$ σε πεπερασμένο χρόνο $t_1 > 0$, με κατάλληλη συνάρτηση εισόδου $u \in \mathcal{L}_2^m[0, t_1]$ έτσι ώστε η "ενέργεια" της συνάρτησης u να είναι η ελάχιστη δυνατή (πρόβλημα ρύθμισης). Το επόμενο Θεώρημα δίνει την λύση του προβλήματος:

Θεώρημα 2: Έστω το πλήρως ελέγξιμο σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ και η συνάρτηση εισόδου $u^*(\tau) = -B^T e^{-A^T \tau} \hat{W}_c^{-1}(0, t_1) x_0$, $\tau \in [0, t_1]$. Τότε: (α) $u^* \in \mathcal{L}_2^m[0, t_1]$. (β) Η συνάρτηση εισόδου u^* μεταφέρει την αρχική κατάσταση $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ στην κατάσταση $x(t_1) = 0$. (γ) Για κάθε $u \in \mathcal{L}_2^m[0, t_1]$ με την ιδιότητα (β) έχουμε $\|u^*\| \leq \|u\|$.

Απόδειξη: (α) Προφανής. (β) Βασίζεται στον παρακάτω υπολογισμό:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u^*(\tau) d\tau \\ &= e^{At_1} x_0 - \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{-A^T \tau} \hat{W}_c^{-1}(0, t_1) x_0 d\tau \\ &= e^{At_1} x_0 - e^{At_1} \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau \cdot \hat{W}_c^{-1}(0, t_1) x_0 \\ &= e^{At_1} x_0 - e^{At_1} x_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(γ) Έστω $u \in \mathcal{L}_2^m[0, t_1]$ αυθαίρετη είσοδος με την ιδιότητα (β). Τότε,

$$e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau = 0$$

Επίσης

$$e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u^*(\tau) d\tau = 0$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B (u(\tau) - u^*(\tau)) d\tau = 0$$

και επομένως:

$$\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B (u(\tau) - u^*(\tau)) d\tau = 0$$

Άρα:

$$x_0^T \hat{W}_c^{-1}(0, t_1) \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B (u(\tau) - u^*(\tau)) d\tau = 0$$

Ισοδύναμα:

$$\int_0^{t_1} x_0^T \hat{W}_c^{-1}(0, t_1) e^{-A\tau} B (u(\tau) - u^*(\tau)) d\tau = 0$$

και άρα,

$$\int_0^{t_1} [u^*(\tau)]^T (u(\tau) - u^*(\tau)) d\tau = 0 \Rightarrow \langle u - u^*, u^* \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, u^* \rangle = \|u^*\|^2$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$|\langle u, u^* \rangle| \leq \|u\| \cdot \|u^*\| \Rightarrow \|u^*\|^2 \leq \|u\| \cdot \|u^*\| \Rightarrow \|u^*\| \leq \|u\|$$

□

1.3 Αλγεβρικές εξισώσεις Lyapunov

Λήμμα 1: Αν $Q = Q^T \succeq 0$ και A Hurwitz, η Αλγεβρική εξίσωση Lyapunov (ΑΕΛ)

$$A^T P + P A + Q = 0$$

έχει μοναδική λύση $P = P^T \succeq 0$.

Απόδειξη: Αν P είναι λύση της ΑΕΛ, τότε

$$-\frac{d}{dt}(e^{A^T t} P e^{A t}) = -e^{A^T t} (A^T P + P A) e^{A t} = e^{A^T t} Q e^{A t}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι A είναι πίνακας Hurwitz,

$$-\int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A^T t} P e^{A t}) dt = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

Ισοδύναμα,

$$e^{A^T t} P e^{A t}|_{t=0} - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{A^T t} P e^{A t} = P - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{A^T t} P e^{A t} = P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

Αντίστροφα, το ολοκλήρωμα είναι λύση της εξίσωσης. □

Πρόταση 1: Έστω ότι το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι ανιχνεύσιμο. Τότε A είναι πίνακας Hurwitz αν και μόνο αν η νόρμα της συνάρτησης:

$$W : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad W(t) = \int_0^t e^{A^T s} C^T C e^{A s} ds$$

είναι φραγμένη στο διάστημα $[0, \infty)$.

Απόδειξη: Αν A Hurwitz τότε η νόρμα της $W(t)$ είναι φραγμένη στο $[0, \infty)$. Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $\lambda \in \sigma(A) \cap \bar{\mathbb{C}}_+$ με $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε,

$$x^* W(t) x = \int_0^t x^* e^{A^T s} C^T C e^{A s} x ds$$

Όμως,

$$e^{A s} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k s^k}{k!} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k s^k}{k!} x = e^{\lambda s} x$$

Επομένως,

$$x^* W(t) x = \int_0^t (e^{\lambda s} C x)^* e^{\lambda s} C x ds = \int_0^t x^* C^T e^{\bar{\lambda} s} e^{\lambda s} C x ds = \int_0^t e^{2\operatorname{Re}(\lambda)s} \|C x\|^2 ds$$

Εφόσον $W(t)$ φραγμένη στο $[0, \infty)$, $x^* W(t) x$ επίσης φραγμένη στο $[0, \infty)$ και άρα $C x = 0$. Επομένως

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} x = 0$$

που είναι άτοπο γιατί $\lambda \in \sigma(A) \cap \bar{\mathbb{C}}_+$ και $\Sigma_o(A, C)$ ανιχνεύσιμο. □

Λήμμα 2: (Κριτήριο Lyapunov). Έστω ότι $P = P^T \succeq 0$, $Q = Q^T \succeq 0$, $\Sigma_o(A, Q)$ ανιχνεύσιμο και

$$A^T P + P A + Q = 0$$

Τότε ο πίνακας A είναι Hurwitz. Αν $\Sigma_o(A, Q)$ παρατηρήσιμο, τότε $P = P^T \succ 0$.

Απόδειξη: Η λύση της εξίσωσης προκύπτει ως εξής:

$$A^T P + PA + Q = 0 \Rightarrow e^{A^T s} (A^T P + PA) e^{As} + e^{A^T s} Q e^{As} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(e^{A^T s} P e^{As} \right) ds + e^{A^T s} Q e^{As} = 0$$

Επομένως,

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left(e^{A^T s} P e^{As} \right) ds + \int_0^t e^{A^T s} Q e^{As} ds = 0$$

Ισοδύναμα,

$$e^{A^T t} P e^{At} \Big|_0^t + \int_0^t e^{A^T s} Q e^{As} ds = 0$$

Άρα,

$$e^{A^T t} P e^{At} - P + \int_0^t e^{A^T s} Q e^{As} ds = 0, \quad t \geq 0$$

που συνεπάγεται ότι

$$P = e^{A^T t} P e^{At} + \int_0^t e^{A^T s} Q e^{As} ds, \quad t \geq 0$$

Εφόσον $\Sigma_o(A, C)$ είναι ανιχνεύσιμο, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 1, η συνάρτηση:

$$\Theta(t) = \int_0^t e^{A^T s} Q e^{As} ds, \quad t \geq 0$$

είναι φραγμένη στο $[0, \infty)$ μόνο αν ο πίνακας A είναι Hurwitz. Εφόσον

$$0 \preceq \Theta(t) \preceq P, \quad t \geq 0$$

η $\Theta(t)$ είναι πράγματι φραγμένη στο $[0, \infty)$ και άρα ο πίνακας A είναι Hurwitz. Η απόδειξη της δεύτερης σχέσης προκύπτει από το γεγονός ότι αν $\Sigma_o(A, C)$ παρατηρήσιμο, τότε $\Theta(t) \succ 0$ για κάθε $t > 0$. $\square$

1.3 Προκαταρκτικά: Τεχνικά αποτελέσματα

Λήμμα (Barbalat): Έστω $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και έστω ότι το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(s) ds = \int_0^\infty h(s) ds$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε για αντίφαση ότι η $h(t)$ δεν συγκλίνει στο 0 καθώς $t \rightarrow \infty$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και ακολουθία (t_n) στο $[0, \infty)$ τέτοια ώστε $t_n \rightarrow \infty$ και $|h(t_n)| \geq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Λόγω ομοιόμορφης συνέχειας της h υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $t \in [0, \infty)$,

$$|t_n - t| \leq \delta \Rightarrow |h(t_n) - h(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Επομένως, για κάθε $t \in [t_n, t_n + \delta]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|h(t)| = |h(t_n) - (h(t_n) - h(t))| \geq |h(t_n)| - |h(t_n) - h(t)| \geq \frac{\epsilon}{2}$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_0^{t_n + \delta} h(s) ds - \int_0^{t_n} h(s) ds \right| = \left| \int_{t_n}^{t_n + \delta} h(s) ds \right| = \int_{t_n}^{t_n + \delta} |h(s)| ds \geq \frac{\epsilon \delta}{2} > 0$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η h δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα $[t_n, t_n + \delta]$. Όμως εξ' υποθέσεως ο αριστερός όρος της παραπάνω ανισότητας τείνει στο 0 καθώς $n \rightarrow \infty$, που οδηγεί σε αντίφαση. $\square$

Λήμμα: Έστω $\Sigma_i(A, B)$, $x' = Ax + Bu$, $x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz και $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Τότε, (α) Αν $u : [0, \infty)$ τμηματικά συνεχής και φραγμένη, τότε $x(t)$ φραγμένη. (β) Αν επιπλέον $u(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε $x(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

Απόδειξη: (α) Εφόσον u τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$, τότε για $t \geq 0$,

$$x(t) = e^{At}\xi + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη. Εφόσον A Hurwitz, υπάρχουν $M \geq 1$ και $\alpha > 0$ τέτοια ώστε

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0$$

Επομένως

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|\xi\| + M\|B\| \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}ds \quad \forall t \geq 0$$

Θέτοντας $\gamma = M\|B\|/\alpha$, έχουμε:

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|\xi\| + \gamma \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\| \quad \forall t \geq 0$$

από όπου προκύπτει το (α).

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $u(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Ορίζουμε

$$U := \sup\{\|u(s)\| : s \in [0, \infty)\} \quad \text{και} \quad U_t := \sup\{\|u(s)\| : s \in [t/2, \infty)\}$$

Έχουμε: $U < \infty$ και $U_t \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Γράφουμε:

$$\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds = \int_0^{t/2} e^{A(t-s)}Bu(s)ds + \int_{t/2}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

και επομένως έχουμε την εκτίμηση:

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|\xi\| + \gamma e^{-\alpha t/2}U + \gamma U_t \quad \forall t \geq 0$$

και επομένως

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad t \rightarrow \infty$$

που αποδεικνύει το (β). $\square$

2. Το πρόβλημα LQR

Η λύση του προβλήματος μεταφοράς κατάστασης σε πεπερασμένο χρόνο έχει διάφορα σημαντικά μειονεκτήματα: (i) Η μέγιστη τιμή $\|u\|_\infty$ που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση μπορεί να είναι υπερβολικά μεγάλη (ιδιαίτερα αν ο χρόνος t_1 είναι μικρός) και να έχει ως αποτέλεσμα τον κορεσμό (saturation) του μετατροπέα ισχύος. (ii) Η βέλτιστη λύση είναι στην μορφή συνάρτησης 'ανοικτού βρόγχου' και επομένως μπορεί να είναι ευαίσθητη σε παραμέτρους του μοντέλου, ιδιαίτερα αν το σύστημα είναι ασταθές. (iii) Η μέθοδος ελαχιστοποιεί την ενέργεια του σήματος εισόδου ενώ στην πράξη η ελαχιστοποίηση ενός 'μείγματος' της ενέργειας εισόδου και των μεταβλητών κατάστασης θα ήταν πιο χρήσιμη για την σχεδίαση

του συστήματος. Τα μειονεκτήματα αυτά αντιμετωπίζονται σε κάποιο βαθμό από την αναδιατύπωση του κριτηρίου βελτιστοποίησης.

Έστω $\Sigma_i(A, B) : x' = Ax + Bu, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ορίζουμε το συναρτησιακό:

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

όπου $Q = Q^T \succeq 0$ και $R = R^T \succ 0$. Υποθέτουμε ότι:

(Y₁): $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο.

(Y₂): $\Sigma_o(A, Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

Παρατήρηση: Οι υποθέσεις (Y₁) και (Y₂) μπορούν να χαλαρωθούν σε (Y'₁): $\Sigma_i(A, B)$ σταθεροποιήσιμο και (Y'₂): $\Sigma_o(A, Q)$ ανιχνεύσιμο. Εδώ χρησιμοποιούμε τις υποθέσεις (Y₁) και (Y₂) που εξασφαλίζουν την πιο εύκολη ανάλυση του προβλήματος. Η διατύπωση του προβλήματος αντιστοιχεί σε πρόβλημα 'άπειρου ορίζοντα'. Διαφορετικές διατυπώσεις οδηγούν σε προβλήματα 'πεπερασμένου ορίζοντα', προβλήματα με χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, κ.λ.π.

Η υπόθεση (Y₁) εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης. Αν η αρχική κατάσταση δεν ανήκει στον ελέγξιμο υπόχωρο τότε μπορεί να μην υπάρχει συνάρτηση εισόδου τέτοια ώστε $x(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. (Η συνθήκη σταθεροποιησιμότητας είναι αναγκαία ώστε $x(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$). Η υπόθεση (Y₂) εξασφαλίζει αυτόματα εσωτερική ευστάθεια, δηλαδή κάτω από την υπόθεση αυτή η συνθήκη $x(t) \rightarrow 0$ δεν χρειάζεται να επιβληθεί στον ορισμό του προβλήματος. Αν το σύστημα $\Sigma_o(A, Q)$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο κάποια συνιστώσα του διανύσματος κατάστασης $x(t)$ μπορεί να γίνεται αυθαίρετα μεγάλη, παρόλο που $Qx(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Η υπόθεση $R = R^T \succ 0$ εξασφαλίζει ότι κάθε γραμμικός συνδιασμός των συνιστωσών της βέλτιστης λύσης έχει πεπερασμένη ενέργεια. Αντίθετα, υποθέτουμε ότι ο πίνακας Q είναι μόνο θετικά ημι-ορισμένος που σημαίνει ότι ενδεχομένως η ενέργεια κάποιου γραμμικού συνδιασμού των μεταβλητών κατάστασης έχει μηδενικό συντελεστή βαρύτητας στη συνάρτηση κόστους που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε.

Πρόβλημα LQR: Να βρεθεί (αν υπάρχει) βέλτιστη συνάρτηση ελέγχου $\hat{u} : \mathcal{U}[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ η οποία

(i) Σταθεροποιεί (εσωτερικά) το σύστημα (δηλ. $x(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$), και

(ii) Ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J(x_0, u)$, δηλαδή $J(x_0, \hat{u}) \leq J(x_0, u)$ για κάθε $u : \mathcal{U}[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Ο χώρος $\mathcal{U}[0, \infty)$ επιλέγεται ως ο χώρος όλων των τμηματικά-συνεχών συναρτήσεων (αν και άλλες επιλογές είναι θεμιτές χωρίς ουσιαστική αλλαγή στην ανάλυση του προβλήματος).

Θεώρημα 3: Η βέλτιστη λύση του προβλήματος LQR κάτω από υποθέσεις (Y₁) και (Y₂), υπάρχει, είναι μοναδική, και ορίζεται ως (στατική) ανάδραση καταστάσεων χώρου:

$$\hat{u}(t) = -R^{-1}B^T P x(t)$$

όπου $P = P^T \succ 0$ είναι η μοναδική, θετικά ορισμένη λύση της Αλγεβρικής Εξίσωσης Riccati (AEP):

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$$

για την οποία $A_c := A - P B R^{-1} B^T P$ πίνακας Hurwitz, δηλ. $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$. Επιπλέον $J(x_0, \hat{u}) = x_0^T P x_0$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι οι ιδιότητες της εξίσωσης Riccati που αναφέρονται στην διατύπωση του Θεωρήματος ισχύουν (θα αποδειχτούν αργότερα, δείτε ενότητα που αφορά την λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati).

Ορίζουμε

$$\tilde{\mathcal{U}}[0, \infty) = \{u \in \mathcal{U}[0, \infty) : (x' = Ax + Bu, x(0) = x_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0\}$$

Εφόσον $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο, έχουμε ότι $\tilde{\mathcal{U}}[0, \infty) \neq \emptyset$ και $\inf\{J(x_0, u) : u \in \tilde{\mathcal{U}}[0, \infty)\} < \infty$. (Γιατί εφόσον $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο, αν $T > 0$ υπάρχει $\tilde{u} \in \mathcal{U}[0, T]$ τέτοια ώστε $x(T) = 0$. Αν ορίσουμε $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ως: $u(t) = \tilde{u}(t)$, $t \in [0, T]$ και $u(t) = 0$, $t \in (T, \infty)$, τότε $u \in \tilde{\mathcal{U}}$ και $J(x_0, u) < \infty$.)

Επίσης:

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} (x^T(t)Px(t)) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} x^T(t)Px(t) - x_0^T Px_0 = -x_0^T Px_0$$

και επομένως για κάθε $u \in \tilde{\mathcal{U}}[0, \infty)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} J(x_0, u) - x_0^T Px_0 &= \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) + (x^T(t)Px(t))' dt \\ &= \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + (x'(t))^T Px(t) + x^T(t)Px'(t)] dt \\ &= \int_0^\infty [x^T Qx + u^T Ru + (x^T A^T + u^T B^T)Px + x^T P(Ax + Bu)] dt \\ &= \int_0^\infty [x^T (Q + A^T P + PA)x + u^T B^T Px + x^T PBu + u^T Ru] dt \\ &= \int_0^\infty (u + R^{-1}B^T Px)^T R(u + R^{-1}B^T Px) dt \geq 0 \end{aligned}$$

για κάθε $u \in \tilde{\mathcal{U}}[0, \infty)$ και επομένως $J(x_0, u) \geq J(x_0, \hat{u})$ για κάθε $u \in \tilde{\mathcal{U}}[0, \infty)$. Άρα,

$$\inf\{J(x_0, u) : u \in \tilde{\mathcal{U}}[0, \infty)\} \geq x_0^T Px_0$$

Έστω $\hat{u}(t) = -R^{-1}B^T Px(t)$. Τότε $J(x_0, \hat{u}) = x_0^T Px_0$. Θα δείξουμε ότι $\hat{u} \in \tilde{\mathcal{U}}[0, \infty)$, δηλαδή ότι:

$$(x' = Ax + B\hat{u}(t), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty$$

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Είναι:

$$x'(t) = (A - BR^{-1}B^T P)x(t) := A_c x(t) \Rightarrow x(t) = e^{A_c t} x_0$$

Επομένως $\|x(t)\| \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$. Η εξίσωση Riccati γράφεται:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \Leftrightarrow A_c^T P + PA_c + PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Έστω $\lambda \in \sigma(A_c)$, $A_c \xi = \lambda \xi$, $\xi \neq 0$. Τότε,

$$\xi^*(A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q)\xi = 0 \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda})\xi^* P \xi + \xi^* PBR^{-1}B^T P \xi + \xi^* Q \xi = 0$$

όπου $\xi^* P \xi > 0$, $\xi^* PBR^{-1}B^T P \xi \geq 0$ και $\xi^* Q \xi \geq 0$. Επομένως, $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ή $(\operatorname{Re}(\lambda) = 0, B^T P \xi = 0 \text{ και } Q \xi = 0)$. Στην δεύτερη περίπτωση:

$$B^T P \xi = 0 \Rightarrow A_c \xi = (A - BR^{-1}B^T P)\xi = A \xi = \lambda \xi$$

και επομένως

$$\begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ Q \end{bmatrix} \xi = 0$$

που είναι άτοπο καθώς $\xi \neq 0$ και $\Sigma_o(A, Q)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Επομένως $\hat{u} \in \tilde{\mathcal{U}}[0, \infty)$ και

$$\min\{J(x_0, u) : u \in \tilde{\mathcal{U}}[0, \infty)\} = J(x_0, \hat{u}) = x_0^T Px_0$$

Η μοναδικότητα της βέλτιστης συνάρτησης ελέγχου $\hat{u}$ προκύπτει από την ανισότητα

$$J(x_0, u) - x_0^T Px_0 = \int_0^\infty (u + R^{-1}B^T Px)^T R^{-1}(u + R^{-1}B^T Px) dt \geq 0$$

που ισχύει για κάθε $u \in \tilde{U}[0, \infty)$, με την παρατήρηση ότι το ολοκλήρωμα μηδενίζεται αν και μόνο αν $u = \hat{u}$. $\square$

Παρατήρηση: Αν χαλαρώσουμε τις υποθέσεις (Y_1) και (Y_2) σε (Y'_1) και (Y'_2) (σταθεροποιησιμότητα και ανιχνευσιμότητα, αντίστοιχα), η βέλτιστη λύση του προβλήματος υπάρχει, είναι μοναδική, και είναι πάλι της μορφής: $\hat{u}(t) = -R^{-1}B^T P x(t)$ όπου $P = P^T \succeq 0$ είναι η μοναδική, θετικά ημι-ορισμένη λύση της Αλγεβρικής Εξίσωσης Riccati: $A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$ για την οποία $A_c := A - P B R^{-1} B^T P$ είναι πίνακας Hurwitz. Το βέλτιστο κόστος παραμένει ίσο με $J(x_0, \hat{u}) = x_0^T P x_0$ (που τώρα μπορεί να είναι μηδέν για $x_0 \neq 0$ αν $x_0 \in \text{Ker}(P)$).

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα $\Sigma(A, B, C)$ διπλού ολοκληρωτή:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε συνάρτηση κόστους:

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty [y^2(t) + r u^2(t)] dt = \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + r u^2(t)] dt, \quad Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r > 0$$

Το σύστημα $\Sigma(A, B, C)$ είναι πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο. Η εξίσωση Riccati γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Επομένως, εξισώνοντας το στοιχείο $(1, 1)$: $1 - r^{-1} p_{12}^2 = 0 \Rightarrow p_{12} = \pm \sqrt{r}$. Εξισώνοντας το στοιχείο $(2, 2)$: $2p_{12} - r^{-1} p_{22}^2 = 0 \Rightarrow p_{22}^2 = \pm 2r \sqrt{r}$. Εφόσον $P \succ 0$, έχουμε $p_{12} = \sqrt{r}$ και $p_{22} = \sqrt{2} r^{3/4}$. Επίσης $p_{11} = r^{-1} p_{12} p_{22} = \sqrt{2} r^{1/4}$. Επομένως,

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} r^{1/4} & \sqrt{r} \\ \sqrt{r} & \sqrt{2} r^{3/4} \end{bmatrix} \succ 0$$

Το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι

$$x' = (A - B R^{-1} B^T P) x = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{r} & \sqrt{2} r^{3/4} \end{bmatrix} \right) x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r^{-1/2} & -\sqrt{2} r^{-1/4} \end{bmatrix} x$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόγχου είναι: $s^2 + \sqrt{2} r^{-1/4} s + r^{-1/2}$. Εξισώνοντας με το πολυώνυμο $s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2$ έχουμε $\omega_n = r^{-1/4}$ και $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Καθώς αυξάνεται η παράμετρος r , η παράμετρος ω_n μειώνεται και η απόκριση του συστήματος γίνεται πιο αργή.

Το επόμενο παράδειγμα αφορά την περίπτωση που δεν έχουμε ανιχνευσιμότητα:

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα: $x' = u$ και συνάρτηση κόστους: $J(x_0, u) = \int_0^\infty u^2(t) dt$. Στο παράδειγμα αυτό, ο πίνακας $A = 0$ δεν είναι Hurwitz και το σύστημα δεν είναι ανιχνεύσιμο. Η εξίσωση Riccati είναι $p^2 = 0$ με λύση $p = 0$. Η αντίστοιχη συνάρτηση εισόδου είναι $u = 0$ που δεν σταθεροποιεί το σύστημα (αν $x_0 \neq 0$) παρόλο που $J = 0$ εφόσον $x \nrightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Αν εφαρμόσουμε τη είσοδο ανάδρασης $u = \phi_\epsilon(x) = -\epsilon x$, όπου $\epsilon > 0$, τότε το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι $x' = -\epsilon x$ με λύση $x(t) = e^{-\epsilon t} x_0$ και αντίστοιχο κόστος,

$$J(x_0, \psi_\epsilon(x)) = \int_0^\infty \epsilon^2 e^{-2\epsilon t} x_0^2 dt = \frac{\epsilon x_0^2}{2}$$

που γίνεται αυθαίρετα μικρό καθώς $\epsilon \rightarrow 0$. Επομένως $\inf J = 0$ αλλά δεν υπάρχει ελάχιστη τιμή $J^* = 0$ καθώς η συνάρτηση $u = 0$ δεν σταθεροποιεί το σύστημα. $\square$

3. Λύση της Αλγεβρικής εξίσωσης Riccati

Παρουσιάζουμε δύο μεθόδους επίλυσης. Ο πρώτος βασίζεται στους ιδιόχωρους του πίνακα Hamiltonian και ο δεύτερος σε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που είναι γνωστός ως ο αλγόριθμος Kleinman.

3.1 Χαμιλτονιανός πίνακας (Hamiltonian)

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε την επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati (AEP) και την ύπαρξη λύσης σταθεροποίησης. Η γενική μορφή της εξίσωσης είναι: $A^T P + PA + PSP + Q = 0$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, δηλαδή χωρίς κάποια αρχική υπόθεση σχετικά με το αν οι πίνακες Q και S είναι θετικά ή αρνητικά (ημι)-ορισμένοι. Ο άγνωστος πίνακας την εξίσωσης είναι ο συμμετρικός πίνακας $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Κάθε λύση της εξίσωσης για την οποία ο πίνακας $A_c = A + SP$ είναι Hurwitz, δηλ. $\sigma(A + SP) \subseteq \mathbb{C}_-$, θα αναφέρεται ως λύση σταθεροποίησης της AEP.

Ορισμός: Ο πίνακας

$$H = \begin{bmatrix} A & S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

που αντιστοιχεί στην AEP $A^T P + PA + PSP + Q = 0$ ονομάζεται πίνακας Hamiltonian.

Λήμμα 4: Έστω

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

Τότε $J^2 = -I_{2n}$ και $J^{-1} H J = -J H J = -H^T$ (και λέμε ότι ο H έχει "συμπλεκτική μορφή"). Επομένως $\lambda \in \sigma(H) \cap \mathbb{C}_-$ αν και μόνο αν $-\bar{\lambda} \in \sigma(H) \cap \mathbb{C}_+$ και οι ιδιοτιμές λ και $-\bar{\lambda}$ έχουν την ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα.

Απόδειξη: Οι ιδιότητες $J^2 = -I_{2n}$ και $J^{-1} H J = -J H J = -H^T$ προκύπτουν από άμεσους υπολογισμούς. Από την ομοιότητα των πινάκων H και $-H^T$ προκύπτει ότι $\lambda \in \sigma(H)$ αν και μόνο αν $-\bar{\lambda} \in \sigma(H)$ και ότι οι ιδιοτιμές λ και $-\bar{\lambda}$ έχουν την ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα. $\square$

Θεώρημα 8: Έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ n -διάστατος H -αναλλοίωτος υπόχωρος και έστω $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$\mathcal{V} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Αν X_1 αντιστρέψιμος, τότε $X := X_2 X_1^{-1}$ είναι λύση της AEP και $\sigma(A + SX) = \sigma(H|_{\mathcal{V}})$. Επιπλέον, η λύση X είναι ανεξάρτητη από την επιλογή βάσης του $\mathcal{V}$.

Απόδειξη: Εφόσον $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ H -αναλλοίωτος υπόχωρος, υπάρχει $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε:

$$\begin{bmatrix} A & S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά με X_1^{-1} :

$$\begin{bmatrix} A & S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X_1 \Lambda X_1^{-1} \quad (\text{Χαμ.3})$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με $[-X \ I]$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X_1 \Lambda X_1^{-1} = 0$$

και επομένως

$$XA + A^T X + XSX + Q = 0$$

Άρα X είναι λύση της AEP. Από την εξίσωση (Χαμ.3) επίσης έχουμε:

$$A + SX = X_1 \Lambda X_1^{-1}$$

και επομένως $\sigma(A + SX) = \sigma(\Lambda)$. Εξ' ορισμού ο πίνακας Λ είναι η αναπαράσταση της απεικόνισης $H|_{\mathcal{V}}$ και επομένως $\sigma(A + SX) = \sigma(H|_{\mathcal{V}})$. Επίσης, παρατηρούμε ότι κάθε βάση του $\mathcal{V}$ γράφεται στην μορφή:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} X_1 P \\ X_2 P \end{bmatrix}$$

για κάποιον μη-ιδιάζοντα πίνακα P . Η λύση X της AEP είναι ανεξάρτητη από την βάση του $\mathcal{V}$ αφού: $X = X_2 X_1^{-1} = (X_2 P)(X_1 P)^{-1}$. $\square$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή στο παραπάνω Θεώρημα ισχύει επίσης.

Θεώρημα 9: Αν $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι λύση της AEP, τότε υπάρχουν πίνακες $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$, με X_1 αντιστρέψιμο, τέτοιοι ώστε $X = X_2 X_1^{-1}$ και οι στήλες του πίνακα $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ είναι βάση κάποιου n -διάστατου H -αναλλοίωτου υπόχωρου.

Απόδειξη: Ορίζουμε $\Lambda = A + SX$. Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με X έχουμε:

$$X\Lambda = XA + XSX = -Q - A^T X$$

όπου στην δεύτερη ισότητα αντικαταστήσαμε από την AEP. Οι δύο εξισώσεις ισοδύναμα γράφονται ως:

$$\begin{bmatrix} A & S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \Lambda$$

Επομένως οι στήλες του πίνακα $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ είναι βάση κάποιου n -διάστατου H -αναλλοίωτου υπόχωρου. Θέτοντας $X_1 := I$ και $X_2 := X$ ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Θεώρημα 10: Έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ n -διάστατος H -αναλλοίωτος υπόχωρος και έστω $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$\mathcal{V} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Τότε $\lambda_i + \bar{\lambda}_j \neq 0$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$, $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(H|_{\mathcal{V}})$, συνεπάγεται ότι ο πίνακας $X_1^* X_2$ είναι Ερμιτιανός, δηλ. $X_1^* X_2 = (X_1^* X_2)^*$. Επιπλέον, αν ο X_1 είναι μη-ιδιάζων, τότε $X = X_2 X_1^{-1}$ είναι Ερμιτιανός.

Απόδειξη: Εφόσον $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ H -αναλλοίωτος υπόχωρος, υπάρχει $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε:

$$H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^* J$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^* J H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας JH είναι Ερμιτιανός (μάλιστα συμμετρικός αφού ο H είναι πραγματικός). Επομένως το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι επίσης Ερμιτιανός πίνακας, και το ίδιο ισχύει για το δεξιό μέλος:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda = \Lambda^* \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^* J^* \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\Lambda^* \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα

$$(-X_1^* X_2 + X_2^* X_1) \Lambda = -\Lambda^* (-X_1^* X_2 + X_2^* X_1)$$

που είναι αλγεβρική εξίσωση Lyapunov. Εφόσον $\lambda_i + \bar{\lambda}_j \neq 0$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση:

$$-X_1^* X_2 + X_2^* X_1 = 0$$

και επομένως $X_1^* X_2$ Ερμιτιανός πίνακας. Εφόσον

$$X = X_1^{-*} (X_1^* X_2) X_1^{-1}$$

ο πίνακας X είναι επίσης Ερμιτιανός. □

Θεώρημα 11: Έστω $\mathcal{V}$ n -διάστατος H -αναλλοίωτος υπόχωρος, και έστω $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε, (α) X_1 μη-ιδιάζων, και (β) οι στήλες του πίνακα $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$. Τότε, $X = X_2 X_1^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αν και μόνο αν ο $\mathcal{V}$ είναι συμμετρικά συζυγής υπόχωρος, δηλ. $v \in \mathcal{V} \Rightarrow \bar{v} \in \mathcal{V}$.

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Εφόσον $\mathcal{V}$ συμμετρικά συζυγής, υπάρχει $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} P$$

Επομένως,

$$\bar{X} = \bar{X}_2 \bar{X}_1^{-1} = X_2 P (X_1 P)^{-1} = X$$

δηλ. ο X είναι πραγματικός πίνακας.

($\Rightarrow$) Ορίζουμε $X := X_2 X_1^{-1}$. Εξ' υποθέσεως $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και

$$\mathcal{R} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \mathcal{V}$$

κα άρα ο X είναι συμμετρικά συζυγής. □

Σταθεροποιητική λύση της εξίσωσης Riccati

Έστω ότι $\sigma(H) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ και επομένως ο πίνακας H έχει n ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}_-$ και n ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}_+$ (συμμετρικές ως προς τον άξονα των πραγματικών αφού $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$). Έστω $\mathcal{X}_-(H)$ και $\mathcal{X}_+(H)$ οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι. Έστω βάση του $\mathcal{X}_-(H)$ που ορίζεται από τις στήλες του πίνακα

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(μπορούμε να επιλέξουμε πραγματική βάση για τον ιδιόχωρο $\mathcal{X}_-(H) \subseteq \mathbb{C}^n$ επειδή ο $\mathcal{X}_-(H)$ είναι κλειστός ως προς την πράξη μιγαδικού συζυγούς, δηλαδή $v \in \mathcal{X}_-(H) \Rightarrow \bar{v} \in \mathcal{X}_-(H)$). Αν $\det(X_1) \neq 0$, η ισοδύναμα οι υπόχωροι

$$\mathcal{X}_-(H) \text{ και } \mathcal{R} \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}$$

είναι συμπληρωματικοί, θέτουμε $X = X_2 X_1^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ο πίνακας X καθορίζεται μονοσήμαντα από τον πίνακα H , δηλαδή $H \rightarrow X$ ορίζει συνάρτηση την οποία συμβολίζουμε ως Ric . Το πεδίο ορισμού, $\text{dom}(\text{Ric})$, είναι το σύνολο όλων των Χαμιλτονιανών πινάκων με τις παρακάτω δύο ιδιότητες: (α) $\sigma(H) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ (ιδιότητα ευστάθειας), και (β) $\mathcal{X}_-(H) \oplus \mathcal{R} \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} = \mathbb{R}^n$ (ιδιότητα συμπληρωματικότητας). Ο πίνακας $X = X_2 X_1^{-1}$ είναι σταθεροποιητικός πίνακας της AEP όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 12: Έστω ότι $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ και $X \in \text{Ric}(H)$. Τότε,

- (i) $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- (ii) Ο πίνακας X είναι λύση της AEP: $A^T X + X A + X S X + Q = 0$.
- (iii) $\sigma(A + S X) \subseteq \mathbb{C}_-$.

Απόδειξη: (i) Θα δείξουμε πρώτα ότι $X_1^T X_2$ είναι συμμετρικός. Από την υπόθεση του Θεωρήματος, υπάρχει πίνακας Hurwitz, $H_- \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($H_- = H|_{\mathcal{H}_-(H)}$), τέτοιος ώστε:

$$H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_-$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με τον πίνακα $[X_1^T \ X_2^T]J$,

$$\begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix} J H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_-$$

Εφόσον ο πίνακας JH είναι συμμετρικός, το ίδιο ισχύει και για τον πίνακα στα αριστερά της παραπάνω ισότητας και επίσης και για τον πίνακα δεξιά. Άρα,

$$(-X_1^T X_2 + X_2^T X_1)H_- = H_-^T (-X_1^T X_2 + X_2^T X_1)^T = -H_-^T (-X_1^T X_2 + X_2^T X_1)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση Lyapunov της μορφής $ZH_- + H_-^T Z = 0$ όπου $Z = -X_1^T X_2 + X_2^T X_1$. Εφόσον ο πίνακας H_- είναι Hurwitz, η μοναδική λύση της εξίσωσης Lyapunov είναι $-X_1^T X_2 + X_2^T X_1 = 0$ και επομένως ο πίνακας $X_1^T X_2$ είναι συμμετρικός. Εφόσον ο X_1 είναι μη-ιδιάζων, έχουμε

$$X = X_2(X_1)^{-1} = (X_1^{-1})^T X_1^T X_2 X_1^{-1} = (X_1^{-1})^T (X_1^T X_2) X_1^{-1}$$

και επομένως $X = X^T$.

(ii) Αρχίζουμε με την εξίσωση:

$$H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_-$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά με X_1^{-1} έχουμε,

$$H \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X_1 H_- X_1^{-1}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας απο τα αριστερά με τον πίνακα $[X \ -I]$,

$$\begin{bmatrix} X & -I \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = 0$$

Το ανάπτυγμα του πίνακα στο αριστερό μέρος της ισότητας δίνει,

$$\begin{bmatrix} X & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+SX \\ -Q-A^TX \end{bmatrix} = A^TX + XA + XSX + Q = 0$$

(iii) Αρχίζοντας από την εξίσωση:

$$H \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X_1 H_- X_1^{-1}$$

και πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με τον πίνακα $[I \ 0]$, έχουμε

$$\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X_1 H_- X_1^{-1}$$

Ισοδύναμα:

$$A + SX = X_1 H_- X_1^{-1}$$

και επομένως ο πίνακας $A + SX$ είναι Hurwitz (εφόσον ο H_- είναι Hurwitz). $\square$

Θεώρημα 13: Έστω ότι $\sigma(H) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ και $S = S^T \succeq 0$ ή $S = S^T \preceq 0$. Τότε $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ αν και μόνο αν $\Sigma_i(A, S)$ είναι σταθεροποιήσιμο.

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Για να δείξουμε ότι $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ πρέπει να δείξουμε ότι οι υπόχωροι

$$\mathcal{X}_-(H) \text{ και } \mathcal{R} \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}$$

είναι συμπληρωματικοί. Όπως προηγουμένως, ορίζουμε πίνακες X_1, X_2 και H_- , έτσι ώστε

$$\mathcal{X}_-(H) = \mathcal{R} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_-$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $\det(X_1) \neq 0$, ισοδύναμα ότι $\text{Ker}(X_1) = \{0\}$. Θα δείξουμε πρώτα ότι $\text{Ker}(X_1)$ είναι H_- -αναλλοίωτος υπόχωρος. Έστω $x \in \text{Ker}(X_1)$. Τότε

$$H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_- \Rightarrow \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_-$$

Ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_- \Rightarrow AX_1 + SX_2 = X_1 H_- \quad (\text{Χαμ.1})$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (Χαμ.1) από τα δεξιά με x και από τα αριστερά με $x^T X_2$:

$$x^T X_2^T A X_1 x + x^T X_2^T S X_2 x = x^T X_2^T X_1 H_- x = (X_1 x)^T X_2 H_- x = 0$$

εφόσον ο πίνακας $X_2^T X_1$ είναι συμμετρικός, και επομένως αφού $x \in \text{Ker}(X_1)$, $x^T X_2^T S X_2 x = 0$ και $S X_2 x = 0$ εφόσον $S = S^T \succeq 0$. Πολλαπλασιάζοντας την παρακάτω εξίσωση από τα αριστερά με x ,

$$(A X_1 + S X_2) x = X_1 H_- x \Rightarrow X_1 H_- x = 0$$

Άρα

$$x \in \text{Ker}(X_1) \Rightarrow H_-x \in \text{Ker}(X_1)$$

και $\text{Ker}(X_1)$ είναι H_1 -αναλλοίωτος υπόχωρος.

Για να δείξουμε ότι $\det(X_1) \neq 0$ υποθέτουμε για αντίφαση ότι $\text{Ker}(X_1) \neq \{0\}$. Τότε, $H_-|_{\text{Ker}(X_1)}$ έχει κάποια ιδιοτιμή λ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x , δηλαδή

$$H_-x = \lambda x, \text{Re}(\lambda) < 0, 0 \neq x \in \text{Ker}(X_1)$$

Επομένως,

$$H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_- \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_-$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_- \Rightarrow -QX_1 - A^T X_2 = X_2 H_-$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία εξίσωση από τα δεξιά με x και χρησιμοποιώντας την εξίσωση $H_-x = \lambda x$, έχουμε ότι

$$(A^T + \lambda I)X_2x = 0$$

Με την υπενθύμιση ότι $SX_2x = 0$,

$$x^T X_2^T \begin{bmatrix} A + \bar{\lambda} I_n & S \end{bmatrix} = 0$$

όπου $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}_+$ που συνεπάγεται ότι $X_2x = 0$ εφόσον $\Sigma_i(A, S)$ σταθεροποιήσιμο. Εφόσον ισχύει ταυτόχρονα $X_1x = 0$ και $X_2 = 0$ συμπεραίνουμε ότι $x = 0$ εφόσον οι στήλες του πίνακα $[X_1^T \ X_2^T]^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και επομένως έχουμε αντίφαση. Επομένως $\text{Ker}(X_1) \neq \{0\}$, δηλαδή $\det(X_1) \neq 0$.

($\Rightarrow$) Εφόσον $H \in \text{dom}(\text{Ric})$, ο πίνακας X είναι σταθεροποιητική λύση και άρα $A + SX$ πίνακας Hurwitz. Επομένως αναγκαστικά το σύστημα $\Sigma_i(A, S)$ είναι σταθεροποιήσιμο. $\square$

Θεώρημα 14: Έστω πίνακας Hamiltonian

$$H = \begin{bmatrix} A & -BB^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

Τότε $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο και το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ δεν έχει μη-παρατηρήσιμες ιδιοτιμές στον άξονα των φανταστικών. Επιπλέον, $X = \text{Ric}(H) \succeq 0$ αν $H \in \text{dom}(\text{Ric})$, και $\text{Ker}(X) = \{0\}$ αν και μόνο αν $\Sigma_o(A, C)$ δεν έχουν μη παρατηρήσιμες ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}_-$.

Απόδειξη: Στην περίπτωση αυτή έχουμε $S = -BB^T \preceq 0$ και $Q = C^T C \succeq 0$. Η ΑΕΡ είναι: $A^T X + XA - XBB^T X + C^T C = 0$. Θα δείξουμε πρώτα ότι αν $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο, τότε ο πίνακας H δεν έχει φανταστικές ιδιοτιμές αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ δεν έχει μη-παρατηρήσιμες φανταστικές ιδιοτιμές.

Έστω ότι $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο και έστω ότι $\Sigma_o(A, C)$ δεν έχει μη-παρατηρήσιμες φανταστικές ιδιοτιμές. Υποθέτουμε (για αντίφαση) ότι υπάρχει $i\omega \in \sigma(H)$ και έστω $0 \neq \begin{bmatrix} x^T & z^T \end{bmatrix}^T$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε,

$$\begin{bmatrix} A & -BB^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Ax - BB^T z = i\omega x \\ -C^T Cx - A^T z = i\omega z \end{cases}$$

και επομένως

$$\begin{cases} z^*(A - i\omega I)x &= z^*BB^Tz = \|B^Tz\|^2 \\ x^*(A + i\omega I)^Tz &= -x^*C^TCx = -\|Cx\|^2 \end{cases}$$

Άρα

$$-\|Cx\|^2 = x^*(A + i\omega I)^Tz \in \mathbb{R} \Rightarrow x^*(A + i\omega I)^Tz = z^*(A - i\omega I)x = \|B^Tz\|^2$$

και επομένως

$$\|B^Tz\|^2 + \|Cx\|^2 = 0 \Rightarrow B^Tx = 0 \text{ και } Cx = 0$$

Επομένως έχουμε

$$z^* \begin{bmatrix} A - i\omega I & B \end{bmatrix} = 0 \text{ και } \begin{bmatrix} A - i\omega I \\ C \end{bmatrix} x = 0$$

Εφόσον $\Sigma_i(A, B)$ σταθεροποιήσιμο έχουμε $z = 0$ και άρα $x \neq 0$ και $i\omega$ είναι μη-παρατηρήσιμη ιδιοτιμή του $\Sigma_o(A, C)$, που είναι άτοπο εξ' υποθέσεως.

Αντίστροφα, έστω ότι $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο και έστω ότι $\sigma(H) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Υποθέτουμε για αντίφαση ότι $i\omega \in \sigma(A)$ είναι μη παρατηρήσιμη ιδιοτιμή του $\Sigma_o(A, C)$. Τότε υπάρχει $x \neq 0$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{bmatrix} A - i\omega I \\ C \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} A & -BB^T \\ -C^TC & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

και $i\omega \in \sigma(H)$ που είναι άτοπο εξ' υποθέσεως. Άρα δείξαμε ότι αν $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο, τότε ο πίνακας Hamiltonian H δεν έχει φανταστικές ιδιοτιμές αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ δεν έχει μη-παρατηρήσιμες φανταστικές ιδιοτιμές.

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι:

$$H \in \text{dom}(\text{Ric}) \Leftrightarrow [\Sigma_i(A, B) \text{ σταθεροποιήσιμο και } \Sigma_o(A, C) \text{ δεν έχει μη-παρατηρ. ιδιοτιμές στο } i\mathbb{R}]$$

($\Rightarrow$): Αν $H \in \text{dom}(\text{Ric})$, τότε εξ' ορισμού ο πίνακας H δεν έχει ιδιοτιμές στο $i\mathbb{R}$. Επιπλέον $S = S^T = -BB^T \preceq 0$. Επομένως οι υποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος (ευθύ μέρος) ισχύουν και επομένως $\Sigma_i(A, -BB^T)$ είναι σταθεροποιήσιμο και άρα $\Sigma_i(A, B)$ είναι επίσης σταθεροποιήσιμο. (Γιατί αν το $\Sigma_i(A, B)$ δεν ήταν σταθεροποιήσιμο, τότε για κάποιο ζεύγος (λ, ξ) , $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$, $0 \neq \xi \in \mathbb{C}^n$,

$$\xi^* \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & B \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi^* \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -BB^T \end{bmatrix} = 0$$

που αντιβάνει την σταθεροποιησιμότητα του $\Sigma_i(A, -BB^T)$). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη σε αυτή την κατεύθυνση πρέπει ακόμα να δείξουμε ότι:

$$[H \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ και } \Sigma_i(A, B) \text{ σταθερ.}] \Rightarrow [\Sigma_o(A, C) \text{ δεν έχει μη-παρατηρ. ιδιοτιμές στο } i\mathbb{R}]$$

που προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο μέρος της απόδειξης.

($\Leftarrow$): Έστω ότι

$$\Sigma_i(A, B) \text{ σταθεροποιήσιμο και } \Sigma_o(A, C) \text{ δεν έχει μη-παρατηρήσιμες ιδιοτιμές στο } i\mathbb{R}$$

Η ιδιότητα $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ πάλι προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο μέρος της απόδειξης.

Στην συνέχεια θέτουμε $X = \text{Ric}(H)$. Θα δείξουμε ότι $X \succeq 0$. Η AEP γράφεται:

$$(A - BB^TX)^TX + X(A - BB^TX) + XBB^TX + C^TC = 0$$

Εφόσον $A - BB^TX$ είναι πίνακας Hurwitz έχουμε,

$$X = \int_0^\infty e^{(A - BB^TX)^T t} (XBB^TX + C^TC) e^{(A - BB^TX)t} dt$$

Εφόσον $XBB^T X + C^T C \succeq 0$ έχουμε $X \succeq 0$. Θα δείξουμε ότι $\text{Ker}(X)$ μη-τετριμένος αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ έχει μη-παρατηρήσιμες ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}_-$. Έστω $x \in \text{Ker}(X)$, δηλ. $Xx = 0$. Πολλαπλασιάζοντας απο τα αριστερά την ΑΕΡ με x^* και από τα δεξιά με x , έχουμε:

$$x^*[(A - BB^T X)^T X + X(A - BB^T X) + XBB^T X + C^T C]x = 0 \Rightarrow x^* C^T C x = 0 \Rightarrow Cx = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας απο τα δεξιά με x , έχουμε:

$$[(A - BB^T X)^T X + X(A - BB^T X) + XBB^T X + C^T C]x = 0 \Rightarrow XAx = 0$$

και επομένως ο υπόχωρος $\text{Ker}(X)$ είναι A -αναλλοίωτος. Αν $\text{Ker}(X) \neq 0$, υπάρχει $0 \neq x \in \text{Ker}(X)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\lambda x = Ax = (A - BB^T X)x$ και $Cx = 0$. Εφόσον ο πίνακας $A - BB^T X$ είναι Hurwitz, έχουμε ότι $\text{Re}(\lambda) < 0$ και επομένως η ιδιοτιμή λ είναι μη-παρατηρήσιμη ιδιοτιμή του $\Sigma_o(A, C)$ στον $\mathbb{C}_-$. Αντίστροφα, έστω ότι $\Sigma_o(A, C)$ έχει μη-παρατηρήσιμη ιδιοτιμή λ στο $\mathbb{C}_-$. Τότε υπάρχει $x \neq 0$ τέτοια ώστε $Ax = \lambda x$ και $Cx = 0$. Πολλαπλασιάζοντας την ΑΕΡ από τα αριστερά με x^* και από τα δεξιά με x , έχουμε

$$x^*(A^T X + XA - XBB^T X + C^T C)x = 0 \Rightarrow 2\text{Re}(\lambda)x^* Xx - x^* XBB^T Xx = 0$$

Εφόσον $\text{Re}(\lambda) < 0$ έχουμε $x^* Xx = 0 \Rightarrow Xx = 0$, δηλαδή ο πίνακας X είναι ιδιάζων. $\square$

Πόρισμα 2: Έστω ότι το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο και το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι ανιχνεύσιμο. Τότε η ΑΕΡ: $A^T X + XA - XBB^T X + C^T C = 0$ έχει μοναδική θετικά ημι-ορισμένη λύση. Επιπλέον αυτή η λύση είναι (η) σταθεροποιητική.

Απόδειξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα συνάγεται ότι η ΑΕΡ έχει μοναδική σταθεροποιητική λύση και ότι αυτή η λύση είναι θετικά ημι-ορισμένη. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι κάθε θετικά ημι-ορισμένη λύση είναι σταθεροποιητική. Η μοναδικότητα της σταθεροποιητικής λύσης θα αποδείξει την μοναδικότητα της θετικά ημι-ορισμένης λύσης.

Υποθέτουμε (για αντίφαση) ότι $X = X^T \succeq 0$ είναι μη-σταθεροποιητική λύση της ΑΕΡ, την οποία γράφουμε ως:

$$(A - BB^T X)^T X + X(A - BB^T X) + XBB^T X + C^T C = 0$$

Έστω $\lambda \in \sigma(A - BB^T X) \cap \bar{\mathbb{C}}_+$ και $x \neq 0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, δηλ. $(A - BB^T X)x = \lambda x$. Πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με x^* και από τα δεξιά με x , έχουμε

$$x^*[(A - BB^T X)^T X + X(A - BB^T X) + XBB^T X + C^T C]x = 0 \Rightarrow 2\text{Re}(\lambda)x^* Xx + x^*(XBB^T X + C^T C)x = 0$$

Εφόσον $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ και $X = X^T \succeq 0$, συμπεραίνουμε ότι $B^T Xx = 0$ και $Cx = 0$. Επίσης

$$(A - BB^T X)x = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda x$$

που μαζί με τις σχέσεις $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ και $Cx = 0$ δείχνει ότι το $\Sigma_o(A, C)$ δεν είναι ανιχνεύσιμο που αντιβαίνει στην υπόθεση. Άρα $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, δηλ. $X = X^T \succeq 0$ είναι η σταθεροποιητική λύση. $\square$

Παράδειγμα: Ορίζουμε το σύστημα: $x' = Ax + Bu$ και την συνάρτηση κόστους: $J(x_0, u) = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + ru^2(t))dt$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, Q = C^T C, r = 1$$

Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως $\Sigma_i(A, B)$ ελέγξιμο και $\Sigma_o(A, C)$ παρατηρήσιμο. Επομένως υπάρχει μοναδική συμμετρική, θετικά-ορισμένη σταθεροποιητική λύση της AEP,

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

Η AEP γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Έχουμε:

$$(1, 1) : p_2^2 = 1, (1, 2) : p_1 = p_2 p_3, (2, 2) : 2p_2 = p_3^2$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $p_2 = \pm 1$. Αν διαλέξουμε την αρνητική λύση, τότε από την δεύτερη εξίσωση p_1 και p_3 έχουν αντίθετο πρόσημο. Άρα $p_2 = 1$. Από την τρίτη εξίσωση $p_3 = \pm\sqrt{2}$. Εφόσον $P = P^T \succ 0$ επιλέγουμε την θετική τιμή, δηλ. $p_3 = \sqrt{2}$. Τέλος από την δεύτερη εξίσωση $p_1 = p_3 = \sqrt{2}$ και

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Επίσης,

$$A_c = A - BR^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\phi_{A_c}(\lambda) = \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ο πίνακας Hamiltonian είναι:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BB^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Hamiltonian είναι:

$$\phi_H(\lambda) = \det \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{array} \right] = \lambda^4 + 1$$

με ρίζες:

$$\lambda_1 = e^{i\pi/4}, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = e^{-i\pi/4}, \lambda_3 = e^{i3\pi/4}, \lambda_4 = \bar{\lambda}_3 = e^{-3i\pi/4}$$

Ο πίνακας έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα είναι απλής δομής. Παρατηρούμε επίσης την συμμετρία των ιδιοτιμών ως προς τον άξονα των πραγματικών και τον άξονα των φανταστικών. Επίσης δεν υπάρχουν ιδιοτιμές πάνω στον άξονα των φανταστικών. Τα ιδιοδιανύσματα $u = [x \ y \ z \ w]^T$ ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$$

όπου $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$. Οι εξισώσεις γράφονται ως:

$$\lambda x = y, \lambda y + w = 0, x + \lambda z = 0, z + \lambda w = 0$$

και επομένως

$$u = x \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 & -\lambda^2 \end{bmatrix}^T, \quad x \neq 0, \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$$

Ο ευσταθής H -αναλλοίωτος υπόχωρος είναι η εικόνα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ -\lambda_3^2 & -\lambda_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{3i\pi/4} & e^{-3i\pi/4} \\ e^{9i\pi/4} & e^{-9i\pi/4} \\ -e^{6i\pi/4} & -e^{-6i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ -\lambda_3^2 & -\lambda_4^2 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$X_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} \begin{bmatrix} \lambda_4 & -1 \\ -\lambda_3 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$X = X_2 X_1^{-1} = \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} \begin{bmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ -\lambda_3^2 & -\lambda_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_4 & -1 \\ -\lambda_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα

$$X = \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3} \begin{bmatrix} \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_3 + \lambda_4) (\lambda_3 - \lambda_4) & (\lambda_4 - \lambda_3) (\lambda_4^2 + \lambda_4 \lambda_3 + \lambda_3^2) \\ \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_4 - \lambda_3) & (\lambda_3 - \lambda_4) (\lambda_3 + \lambda_4) \end{bmatrix}$$

η

$$X = \begin{bmatrix} -\lambda_3 \lambda_4 (\lambda_3 + \lambda_4) & \lambda_4^2 + \lambda_4 \lambda_3 + \lambda_3^2 \\ \lambda_3 \lambda_4 & -(\lambda_3 + \lambda_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

όπως προηγουμένως. Παρατηρούμε ότι ο X είναι πραγματικός, συμμετρικός και θετικά-ορισμένος πίνακας.

Ο αλγόριθμος Kleinman: Στην ενότητα αυτή δίνουμε μία διαφορετική απόδειξη των ιδιοτήτων της σταθεροποιητικής λύσης της AEP που είναι η βάση ενός επαναληπτικού αλγορίθμου για τον υπολογισμό της. Εξειδικεύουμε το αποτέλεσμα για την AEP του προβλήματος LQR, δηλαδή για την εξίσωση

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

όπου $R = R^T \succ 0$, $Q = Q^T \succeq 0$, $\Sigma_i(A, B)$ σταθεροποιήσιμο και $\Sigma_o(A, C)$ ανιχνεύσιμο. Υπενθυμίζουμε ότι μία λύση $P = P^T$ της AEP λέγεται σταθεροποιητική αν ο πίνακας $A - B R^{-1} B^T P$ είναι Hurwitz.

Λήμμα 5: Έστω $P = P^T$, $R = R^T \succ 0$ και $F_0 = -R^{-1} B^T P$. Ορίζουμε συνάρτηση

$$\Psi(F) = (A + B F)^T P + P(A + B F) + F^T R F$$

Τότε

$$\Psi(F) - \Psi(F_0) = (F - F_0)^T R (F - F_0)$$

και επομένως ο F_0 ελαχιστοποιεί την $\Psi(F)$.

Απόδειξη: Προκύπτει από τους παρακάτω υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} \Psi(F) - \Psi(F_0) &= (A + B F)^T P + P(A + B F) + F^T R F - (A + B F_0)^T P - P(A + B F_0) - F_0^T R F_0 \\ &= F^T B^T P + P B F - F_0^T B^T P - P B F_0 + F^T R F - F_0^T R F_0 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση: $B^T P = -RF_0$ και $PB = -F_0^T R$:

$$\Psi(F) - \Psi(F_0) = -F^T R F_0 - F_0^T R F + F_0^T R F_0 + F^T R F = (F^T - F_0^T)R(F - F_0)$$

Εφόσον $R = R^T \succ 0$ η $\Psi(F)$ ελαχιστοποιείται όταν $F = F_0$. □.

Θεώρημα 15: Η ΑΕΡ:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

όπου $R = R^T \succ 0$, $Q = Q^T \succeq 0$, $\Sigma_i(A, B)$ σταθεροποιήσιμο και $\Sigma_o(A, Q)$ ανιχνεύσιμο, έχει μοναδική, θετικά ημιορισμένη λύση P^0 . Επιπλέον ο πίνακας $A - BR^{-1}B^T P^0$ είναι Hurwitz.

Απόδειξη: Γράφουμε την ΑΕΡ στην μορφή

$$(A + BF)^T P + P(A + BF) + Q + F^T R F = 0 \quad (P)$$

και

$$F = -R^{-1}B^T P \quad (F)$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση (με σταθεροποιημένο F) είναι εξίσωση Lyapunov. Ορίζουμε ακολουθίες πινάκων (F_k) και (P_k) , $k \in \mathbb{N}$, ως εξής:

1. Επιλέγουμε πίνακα F_1 ώστε $A + BF_1$ να είναι Hurwitz (εφικτό αφού $\Sigma_i(A, B)$ σταθεροποιήσιμο).
2. Έχοντας επιλέξει πίνακες $F_1, F_2, \dots, F_k$, ορίζουμε πίνακα P_k από την λύση της εξίσωσης Lyapunov:

$$(A + BF_k)^T P_k + P_k(A + BF_k) + Q + F_k^T R F_k = 0 \quad (P(k) \ 1)$$

3. Ορίζουμε πίνακα:

$$F_{k+1} = -R^{-1}B^T P_k \quad (F(k+1))$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία (P_k) είναι καλά ορισμένη, $P_k \succeq 0$ και $P_k \downarrow$. Από το Λήμμα ;;; ο P_1 είναι καλά ορισμένος και $P_1 = P_1^T \succeq 0$. Έστω ότι το ίδιο ισχύει για κάθε πίνακα $P_1, P_2, \dots, P_k$ (επαγωγική υπόθεση). Τότε ο πίνακας F_{k+1} ορίζεται από την εξίσωση $(F(k+1))$. Από το προηγούμενο Λήμμα,

$$\Psi(F_{k+1}) = \Psi(F_k) - (F_k - F_{k+1})^T R (F_k - F_{k+1})$$

Άρα

$$\begin{aligned} (A + BF_{k+1})^T P_k + P_k(A + BF_{k+1}) + Q + F_{k+1}^T R F_{k+1} = \\ (A + BF_k)^T P_k + P_k(A + BF_k) + Q + F_k^T R F_k - (F_k - F_{k+1})^T R (F_k - F_{k+1}) \end{aligned}$$

δηλαδή, χρησιμοποιώντας την εξίσωση $(P(k)-1)$,

$$(A + BF_{k+1})^T P_k + P_k(A + BF_{k+1}) + Q + F_{k+1}^T R F_{k+1} = -(F_k - F_{k+1})^T R (F_k - F_{k+1}) := -N_k$$

όπου $N_k = N_k^T \succeq 0$. Επομένως,

$$(A + BF_{k+1})^T P_k + P_k(A + BF_{k+1}) + Q + N_k + F_{k+1}^T R F_{k+1} = 0 \quad (P(k) \ 2)$$

Το σύστημα $\Sigma_o(A + BF_{k+1}, Q + N_k + F_{k+1}^T R F_{k+1})$ είναι ανιχνεύσιμο. (Γιατί αν δεν ήταν, θα υπήρχε $\lambda \in \sigma(A + BF_{k+1}) \cap \bar{\mathbb{C}}_+$ και $\xi \neq 0$, τέτοια ώστε $(A + BF_{k+1})\xi = \lambda\xi$, $(Q + N_k + F_{k+1}^T R F_{k+1})\xi = 0$. Η δεύτερη σχέση συνεπάγεται ότι

$$\xi^*(Q + N_k + F_{k+1}^T R F_{k+1})\xi = 0 \Rightarrow Q\xi = 0, N_k\xi = 0 \text{ και } F_{k+1}\xi = 0$$

εφόσον $Q = Q^T \succeq 0$, $N_k = N_k^T \succeq 0$ και $R = R^T \succ 0$. Επομένως, $(A + BF_{k+1})\xi = A\xi = \lambda\xi$, που μαζί με την εξίσωση $Q\xi = 0$ αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το σύστημα $\Sigma_o(A, Q)$ είναι ανιχνεύσιμο εφόσον $\lambda \in \sigma(A + BF_{k+1}) \cap \bar{\mathbb{C}}_+$. Εφόσον $P_k = P_k^T \succeq 0$ από την επαγωγική υπόθεση, προκύπτει, εφαρμόζοντας προηγούμενο Λήμμα, ότι $A + BF_k$ είναι πίνακας Hurwitz. Από την εξίσωση (P(k) 2) και το Λήμμα ;;; προκύπτει ότι $P_{k+1} = P_{k+1}^T \succeq 0$. Αφαιρώντας την εξίσωση (P(k) 1) (με $(k+1) \leftarrow k$) από την εξίσωση (P(k)2) έχουμε:

$$(A + BF_{k+1})^T(P_k - P_{k+1}) + (P_k - P_{k+1})(A + BF_{k+1}) + N_k = 0$$

και επομένως εφαρμόζοντας πάλι προηγούμενο Λήμμα έχουμε $P_k - P_{k+1} \succeq 0$. Άρα $0 \preceq P_k$ και $P_k \downarrow$ και επομένως τα όρια

$$P^0 := \lim_{k \rightarrow \infty} P_k \text{ και } F^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k = -R^{-1}B^T P^0$$

υπάρχουν. Παίρνοντας το όριο της (P(k) 1) καθώς $k \rightarrow \infty$ δείχνει ότι P^0 και F^0 ικανοποιούν τις εξισώσεις (P) και (F), αντίστοιχα. Μπορούμε επίσης να δείξουμε με μια παραλλαγή μέρους της παραπάνω απόδειξης ότι $\Sigma_o(A + BF^0, Q + (F^0)^T R F^0)$ είναι ανιχνεύσιμο, από το οποίο προκύπτει εφαρμόζοντας το Λήμμα ;;; ότι $A + BF^0$ είναι πίνακας Hurwitz.

Η μοναδικότητα της σταθεροποιητικής λύσης της AEP έχει ήδη αποδειχθεί στην προηγούμενη ενότητα (λύση μέσω πινάκων Hamiltonian) αλλά επαναλαμβάνεται εδώ για πληρότητα. Εστω ότι $\tilde{P}$ και $\tilde{F}$ ικανοποιούν τις εξισώσεις (P) και (F), αντίστοιχα, και $\tilde{P} = \tilde{P}^T \succeq 0$. Ορίζουμε:

$$\tilde{A} = A + B\tilde{F}, \quad A^0 = A + BF^0$$

Από προηγούμενο Λήμμα,

$$(A^0)^T P^0 + P^0 A^0 + Q - N + (F^0)^T R F^0 = 0, \quad N = (\tilde{F} - F^0)^T R (\tilde{F} - F^0) \succeq 0$$

Επίσης

$$(A^0)^T \tilde{P} + \tilde{P} A^0 + Q + (F^0)^T R F^0 = 0$$

Αφαιρώντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις:

$$(A^0)^T (P^0 - \tilde{P}) + (P^0 - \tilde{P}) A^0 + N = 0 \quad (\text{P0-tilde(P)})$$

Εφόσον A^0 Hurwitz, έχουμε $P^0 \succeq \tilde{P}$. Επίσης η εξίσωση (P) για $\tilde{P}$, $\tilde{F}$ και μια παραλλαγή μέρους της παραπάνω απόδειξης δείχνει ότι το σύστημα $\Sigma_o(\tilde{A}, Q + \tilde{F}^T R \tilde{F})$ είναι ανιχνεύσιμο, και επομένως, με αντίστοιχο επιχείρημα με αυτό που καταλήγει στην εξίσωση (P0-tilde(P)), έχουμε ότι $\tilde{P} \succeq P^0$ και τελικά $\tilde{P} = P^0$. $\square$

4. Γενικευμένα προβλήματα LQR

4.1 Προβλήματα με μεικτό όρο στην συνάρτηση κόστους:

Προβλήματα της μορφής:

$$J(x_0) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + 2s^T Nu(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

όπου

$$\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^T & N \\ N^T & R^T \end{bmatrix} \succeq 0 \text{ και } R \succ 0$$

(Η δεύτερη συνθήκη είναι ισοδύναμη με τις $R \succ 0$ και $Q - NR^{-1}N^T \succeq 0$). Προβλήματα της γενικευμένης αυτής μορφής συνήθως προκύπτουν όταν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το ολοκλήρωμα αθροίσματος δύο όρων, ο πρώτος από τους οποίους αντιστοιχεί στην ενέργεια σήματος εισόδου u , δηλ. είναι της μορφής

$u^T Ru$, και ο δεύτερος είναι ίσος με νόρμα $\|z\|^2$, όπου z είναι σήμα ρύθμισης της μορφής $z = Cx + Du$. Ο μεικτός όρος $x^T Su$ προκύπτει από ανάπτυγμα του δεύτερου όρου όταν $C^T D \neq 0$.

Το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα LQR κλασσικής μορφής. Αρχικά γράφουμε:

$$u^T(t)Ru(t) + x^T(t)Qx(t) + 2s^T Su(t) = (u + R^{-1}N^T x)^T R(u + R^{-1}N^T x) + x^T(Q - NR^{-1}N^T)x$$

Ορίζουμε το σύστημα:

$$\tilde{\Sigma}_i : x' = (A - BR^{-1}N^T)x + B\tilde{u}, \quad \tilde{u} = u + R^{-1}N^T x$$

και την συνάρτηση κόστους:

$$J(x_0) = \int_0^\infty (x^T(Q - NR^{-1}N^T)x + \tilde{u}^T R \tilde{u})dt$$

που ορίζουν πρόβλημα LQR κλασσικής μορφής. Η λύση αυτού του ισοδύναμου προβλήματος προκύπτει υπολογίζοντας την σταθεροποιητική λύση της AEP:

$$P(A - BR^{-1}B^T) + (A - BR^{-1}B^T)^T P - PBR^{-1}B^T P + Q - NR^{-1}N^T = 0$$

και εφαρμόζοντας την βέλτιστη συνάρτηση εισόδου:

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^T P x(t)$$

στο σύστημα $\tilde{\Sigma}_i$, η ισοδύναμη:

$$u(t) = \tilde{u}(t) - R^{-1}N^T x(t) = -R^{-1}B^T P + N^T)x(t)$$

στο αρχικό σύστημα.

Το πρόβλημα έχει λύση αν ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $R = R^T \succ 0$.

(ii) $Q = Q^T, \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \succeq 0$ (ισοδύναμη $Q - NR^{-1}N^T \succeq 0$).

(iii) $\Sigma_i(A, B)$ σταθεροποιήσιμο.

(iv) $\Sigma_o(A - BR^{-1}N^T, Q - NR^{-1}N^T)$ δεν έχει μη-παρατηρησιμες ιδιοτιμές στον άξονα των φανταστικών.

4.2 Προβλήματα LQR επαυξημένης ευστάθειας:

Στην μέθοδο αυτή προσαρμόζουμε τις ιδιότητες ρύθμισης ώστε να αυξήσουμε τον ρυθμό σύγκλισης $\|x(t)\| \rightarrow 0$. Έστω στο σύστημα: $\Sigma_i : x' = Ax + Bu, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ορίζουμε την συνάρτηση κόστους

$$\hat{J}_\alpha(x_0) = \int_0^\infty \{e^{2\alpha t}(x^T(t)Qx(t) + u^T Ru(t))\}dt, \quad \alpha > 0$$

όπου $Q = Q^T \succeq 0$ και $R = R^T \succ 0$, με στόχο να έχουμε $\|e^{\alpha t}x(t)\| \rightarrow 0$, δηλαδή ο ρυθμός σύγκλισης $\|x(t)\| \rightarrow 0$ να είναι τουλάχιστον ίσος με τον ρυθμό σύγκλισης της εκθετικής συνάρτησης $e^{-\alpha t}$. Αυτή η νέα συνάρτηση κόστους αντιστοιχεί σε χρονικά μεταβαλλόμενο πρόβλημα LQR ($Q \rightarrow e^{2\alpha t}Q, R \rightarrow e^{2\alpha t}R$) το οποίο επιθυμούμε να αποφύγουμε. Ορίζουμε τις μεταβλητές:

$$\hat{x}(t) = e^{\alpha t}x(t), \quad \hat{u}(t) = e^{\alpha t}u(t)$$

Τότε:

$$J_\alpha(x_0) = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T Ru(t))dt := \hat{J}(x_0)$$

Παραγωγίζοντας το διάνυσμα κατάστασης $\hat{x}(t)$ έχουμε:

$$\hat{x}'(t) = \alpha e^{\alpha t} x(t) + e^{\alpha t} x'(t) = \alpha e^{\alpha t} x(t) + e^{\alpha t} (Ax(t) + Bu(t)) = \alpha \hat{x}(t) + A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t)$$

που αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\hat{\Sigma}_i : \hat{x}'(t) = (A + \alpha I)\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) := A_\alpha \hat{x}(t) + B\hat{u}(t), \quad \hat{x}(0) = x_0$$

Παρατηρούμε ότι τα συστήματα Σ_i και $\hat{\Sigma}_i$ είναι ισοδύναμα κάτω από τους μεταχηματισμούς $\hat{x} = e^{\alpha t} x$ και $\hat{u} = e^{\alpha t} u$. Πράγματι, η λύση του $\hat{\Sigma}_i$ αν εφαρμόσουμε συνάρτηση εισόδου $\hat{u}$ είναι:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= e^{(A+\alpha I)t} x_0 + e^{(A+\alpha I)t} \int_0^\infty e^{-(A+\alpha I)\tau} B\hat{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\alpha t} e^{At} x_0 + e^{\alpha t} e^{At} \int_0^\infty e^{-A\tau} B(e^{-\alpha\tau} \hat{u}(\tau)) d\tau \\ &= e^{\alpha t} [e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^\infty e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau] \\ &= e^{\alpha t} x(t) \end{aligned}$$

όπου $x(t)$ στο δεξιό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι η λύση του Σ_i όταν εφαρμόσουμε συνάρτηση εισόδου $u(t) = e^{-\alpha t} \hat{u}(t)$. Επομένως το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στο κλασσικό (χρονικά αναλλοίωτο) πρόβλημα LQR που αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους $J(x_0)$ κάτω από τους σψναμικούς περιορισμούς που ορίζει το σύστημα $\hat{\Sigma}_i$. Επομένως αν P_α είναι η σταθεροποιητική λύση της AEP:

$$(A^T + \alpha I)P_\alpha + P_\alpha(A + \alpha I) = P_\alpha B R^{-1} B^T P_\alpha + Q = 0$$

τότε η βέλτιστη συνάρτηση εοσόδου είναι:

$$\hat{u}(t) = -R^{-1} B^T P_\alpha \hat{x}(t)$$

Ισοδύναμα, στις αρχικές μεταβλητές του προβλήματος η βέλτιστη συνάρτηση εισόδου είναι

$$u(t) = e^{-\alpha t} \hat{u}(t) = -e^{-\alpha t} R^{-1} B^T P_\alpha \hat{x}(t) = -R^{-1} B^T P_\alpha (e^{-\alpha t} \hat{x}(t)) = -R^{-1} B^T P_\alpha x(t)$$

Η συνθήκες: (i) $\Sigma_i(A + \alpha I, B)$ σταθεροποιήσιμο και (ii) $\Sigma_o(A + \alpha I, Q)$ ανιχνεύσιμο, εγγυώνται την ύπαρξη μοναδικής, σταθεροποιητικής, θετικά ημιορισμένης λύσης P_α της AEP. Οι συνθήκες αυτές μπορούν να χαλαρωθούν ως (i') $\Sigma_i(A + \alpha I, B)$ πλήρως ελέγξιμο ($\Leftrightarrow \Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο) και (ii') $\Sigma_o(A + \alpha I, Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο ($\Leftrightarrow \Sigma_i(A, Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο), οπότε $P_\alpha = P_\alpha^T \succ 0$. Τέλος παρατηρούμε ότι:

$$\sigma(A + \alpha I - B R^{-1} B^T P_\alpha) \subseteq \mathbb{C}_- \Leftrightarrow \sigma(A - B R^{-1} B^T P_\alpha) \subseteq \{\lambda : \text{Re}(\lambda) < -\alpha\}$$

και επομένως το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του πίνακα κλειστού βρόγχου είναι μικρότερο από $-\alpha$.

Γ. Χαλικιάς, 17-7-2024