ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεωρία Ελέγχου: Λύσεις Θεμάτων, Ιούνιος 2023

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο τελικός βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ **όπου** B **το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή επιτυχία!**

Θέμα 1:

(α) Έστω τα συστήματα $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1, 0)$ και $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2, 0)$ με διανύσματα κατάστασης x_1 και x_2, αντίστοιχα, και συναρτήσεις εξόδου y_1 και y_2, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις είσόδου των Σ_1 και Σ_2 είναι $u_1 + y_2$ και y_1, αντίστοιχα.

(i) Βρείτε το σύστημα κλειστού βρόγχου $\Sigma(A_c, B_c, C_c, 0)$ της μορφής:

$$\xi' = A_c\xi + B_c u_1, \quad y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_c\xi \ \text{ όπου } \ \xi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

[1 βαθμός]

(ii) Δείξτε ότι αν τα συστήματα $\Sigma_o(A_1, C_1)$ και $\Sigma_o(A_2, C_2)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμα, τότε το σύστημα $\Sigma_o(A_c, C_c)$ που ορίζεται στο (i) είναι πλήρως παρατηρήσιμο. **[0,5 βαθμοί]**

(iii) Αν $A_1 = B_1 = C_1 = B_2 = 1$, $A_2 = \lambda$ και $C_2 = k$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ και k για τις οποίες ο πίνακας A_c στο (i) είναι Hurwitz (δηλ. κάθε ιδιοτιμή του έχει αρνητικά πραγματικό μέρος). **[0,5 βαθμοί]**

(β) Να βρεθεί πραγματοποίηση συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+5}$. **[1 βαθμός]**

Λύση: (α)(i)

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

[1 βαθμός]

(α)(ii)

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A_1 & -B_1C_2 \\ -B_2C_1 & sI - A_2 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -B_1 \\ 0 & I & -B_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A_1 & 0 \\ 0 & sI - A_2 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\text{Rank}(P(s)) = \text{Rank}\left(\begin{bmatrix} sI - A_1 \\ C_1 \end{bmatrix}\right) + \text{Rank}\left(\begin{bmatrix} sI - A_2 \\ C_2 \end{bmatrix}\right)$$

[0,5 βαθμοί]

(α)(iii)

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI - A_c) = s^2 - (\lambda + 1)s + \lambda - k$$

Άρα A_c Hurwitz αν και μόνο αν: $\lambda < -1$, $k > -\lambda$. **[0,5 βαθμοί]**

(β)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

[1 βαθμός]

Θέμα 2:

(α) Να βρεθεί η λύση του συστήματος $x' = Ax + b$, $x(0) = x_0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[1 βαθμός]

(β) Δείξτε ότι αν $\phi(t)$ και $\psi(t)$ είναι οι λύσεις των συστημάτων: $x' = Ax$, $x(0) = x_0$ και $y' = -A^T y$, $y(0) = y_0$, αντίστοιχα, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\psi^T(t)\phi(t) = y_0^T x_0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. **[1 βαθμός]**

Λύση: (α)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2},\ \ x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - 1 \\ 1 - e^{-t} \end{bmatrix}$$

[1 βαθμός]

(β) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi^T(t)\phi(t) = (e^{-A^T t} y_0)^T (e^{At} x_0) = y_0^T e^{-At} e^{At} x_0 = y_0^T x_0$$

[1 βαθμός]

Θέμα 3:

(α) Αποδείξτε την παρακάτω παραλλαγή του Λήμματος Gronwall: Αν $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής και υπάρχουν σταθερές $C \geq$, $B \geq 0$, $K > 0$ τέτοιες ώστε $g(t) \leq C + Bt + K\int_0^t g(s)ds$, $0 \leq t \leq T$, τότε $g(t) \leq Ce^{Kt} + B\frac{e^{Kt}-1}{K}$, $0 \leq t \leq T$. **[1 βαθμός]**

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz και έστω ότι $\|f(x)\| \leq K\|x\| + B$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$, $B \geq 0$ και $\|x\|$ η Ευκλείδια νόρμα του x. Δείξτε ότι η λύση του συστήματος: $x' = f(x)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι μοναδική στο διάστημα $[0,\infty)$ και ότι $\|x(t)\| \leq \|x_0\|e^{Kt} + \frac{B}{K}(e^{Kt} - 1)$, $t \geq 0$. **[1 βαθμός]**

(γ) Δείξτε ότι το σύστημα:

$$x_1' = -x_1 + \frac{2x_2}{1+x_2^2},\ x_2' = -x_2 + \frac{2x_1}{1+x_1^2},\ x_1(0) = a,\ x_2(0) = b$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0,\infty)$. **[1 βαθμός]**

Λύση: (α) Έστω $G(t) = C + Bt + K\int_0^t g(s)ds$. Τότε γιά $t \in [0,T]$: $G'(t) = B + Kg(t) \leq B + KG(t)$ η $G' - KG \leq B$. Έστω $\xi = G + \frac{B}{K}$. Τότε $\xi' - K(\xi - \frac{B}{K}) \leq B$, $t \in [0,T]$. Ισοδύναμα

$$\xi' - K\xi \leq 0 \Rightarrow e^{-Kt}\xi' - Ke^{-Kt}\xi \leq 0 \Rightarrow (e^{-Kt}\xi)' \leq 0,\ t \in [0,T]$$

Άρα η συνάρτηση $e^{-Kt}\xi(t)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $t \in [0,T]$ και

$$e^{-Kt}\xi(t) \leq e^{-Kt}\xi(t)|_{t=0} = \xi(0) = G(0) + \frac{B}{K} = C + \frac{B}{K},\ t \in [0,T]$$

Επομένως

$$\xi(t) \leq Ce^{Kt} + \frac{B}{K}e^{Kt} \Rightarrow G(t) \leq Ce^{Kt} + \frac{B}{K}(e^{Kt} - 1)$$

Άρα,

$$g(t) \leq G(t) \leq Ce^{Kt} + \frac{B}{K}(e^{Kt} - 1),\ t \in [0,T]$$

[1 βαθμός]

(β) Εφόσον η f είναι τοπικά Lipschitz υπάρχει διάστημα $[0,\epsilon)$ στο οποίο η λύση υπάρχει και είναι μοναδική. Έστω $[0\beta)$ το μέγιστο διάστημα ύπαρξης. Τότε: $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds$, $t \in [0,\beta)$ και επομένως

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t \|f(x(s))\|ds \leq \|x_0\| + \int_0^t (K\|x(s)\| + B)ds = \|x_0\| + Bt + K\int_0^t \|x(s)\|ds,\ t \in [0,\beta)$$

Από το (α) ισχύει η εκτίμηση:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\|e^{Kt} + \frac{B}{K}(e^{Kt} - 1),\ t \in [0,\beta)$$

και άρα η λύση περιέχεται στη (κλειστή) σφαίρα με κέντρο το σημείο 0 και ακτίνα $\|x_0\|e^{Kt} + \frac{B}{K}(e^{Kt} - 1)$. Αυτό είναι άτοπο απο γνωστό Θεώρημα και άρα $\beta = \infty$. **[1 βαθμός]**

(γ) Από την ανισότητα: $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \left(-x_1 + \frac{2x_2}{1+x_2^2}\right)^2 + \left(-x_2 + \frac{2x_1}{1+x_1^2}\right)^2 \leq 2\left(x_1^2 + \frac{4x_2^2}{(1+x_2^2)^2}\right) + 2\left(x_2^2 + \frac{4x_1^2}{(1+x_1^2)^2}\right) \\ &\leq 2(x_1^2 + x_2^2) + 8(x_1^2 + x_2^2) = 10\|x\|^2\end{aligned}$$

και άρα $\|f\| \leq \sqrt{10}\|x\|$. Από το (α) συμπεραίνουμε ότι η λύση υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το $[0,\infty)$. **[1 βαθμός]**

Θέμα 4: Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A, b)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Να βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_c$ του συστήματος. **[0,5 βαθμοί]**

(ii) Να βρεθεί πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\det(Q) \neq 0$, και μετασχηματισμός ισοδυναμίας $\Sigma_i(A, b) \to \Sigma_i(Q^{-1}AQ, Q^{-1}b)$ τέτοιος ώστε το ζεύγος $(Q^{-1}AQ, Q^{-1}b)$ να είναι στην κανονική μορφή Kalman:

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}b = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{b}_1)$ πλήρως ελέγξιμο. **[1 βαθμός]**

(iii) Αν $f \in \mathbb{R}^3$, να χαρακτηρίσετε το σύνολο των πολυωνύμων $\{\det(\lambda I_3 - (A + bf^T)) : f \in \mathbb{R}^3\}$. **[0,5 βαθμοί]**

Λύση: (i) Έχουμε $Ab = 0$ και άρα

$$\text{Rank}(\Gamma_c) = 1, \mathcal{X}_c = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

[0,5 βαθμοί]

(ii) Συμπληρώνουμε την βάση του $\mathbb{R}^3$ με την δεύτερη και τρίτη στήλη του πίνακα:

$$Q = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right], \quad \hat{b} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

[1 βαθμός]

(iii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί στο μή-ελέγξιμο υποσύστημα είναι αναλοίωτο από ανάδραση καταστάσεων. Άρα:

$$\begin{aligned} P &= \{\det(sI_3 - (A + bf^T) : f \in \mathbb{R}^3\} = \{\det(sI_3 - (\hat{A} + \hat{b}\hat{f}^T) : \hat{f} \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(s + \hat{f}_1)\det(sI_2 - \hat{A}_{22}) : \hat{f}_1 \in \mathbb{R}\} = \{(s + \lambda)s(s - 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

[0,5 βαθμοί]

Θέμα 5: Έστω το σύστημα $\Sigma(A,B,C,0)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\text{ και }\; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Έστω $F \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ πίνακας ανάδρασης καταστάσεων. Μπορεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi(s)$ του πίνακα $A+BF$ να επιλεγεί αυθαίρετα; Επιλέξτε τον πίνακα F ώστε $\phi(s) = (s+1)^3$.

[1 βαθμός]

(ii) Έστω $L \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ πίνακας ενίσχυσης παρατηρητή. Μπορεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\psi(s)$ του πίνακα $A+LC$ να επιλεγεί αυθαίρετα; Σχεδιάστε παρατηρητή με πίνακα ενίσχυσης L ώστε $\psi(s) = (s+2)^3$. **[1 βαθμός]**

(iii) Εφαρμόζοντας τη αρχή διαχωρισμού σχεδιάστε δυναμικό αντισταθμιστή συνδιάζοντας τα αποτελέσματα σας στα ερωτήματα (i) και (ii).

[1 βαθμός]

Λύση: (i)

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; \det(\Gamma_c) = -1 \neq 0$$

Άρα $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο επιλέγεται αυθαίρετα. Έχουμε

$$A+BF = \begin{bmatrix} 1+f_0 & f_1 & f_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow sI-(A+BF) = \begin{bmatrix} s-(1+f_0) & -f_1 & -f_2 \\ 0 & s-1 & -1 \\ -1 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\phi(s) = [s-(1+f_1)][s^2-s]-[f_2+f_3(s-1)] = s^3+3s^2+3s+1 \Rightarrow F = \begin{bmatrix} f_1 & f_1 & f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$

[1 βαθμός]

(ii)

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\Gamma_o) = 1 \neq 0$$

Άρα $\Sigma_o(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρίσιμο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\psi(s)$ επιλέγεται αυθαίρετα.

$$A+LC = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & 0 \\ 0 & 1+l_2 & 1 \\ 1 & l_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\psi(s) = \det(sI_3 - A - LC) = s^3-(2+l_2)s^2+(1+l_2-l_3)s+l_3-l_1 = (s+2)^3 = s^3+6s^2+12s+8$$

και επομένως

$$L^T = [l_1 \; l_2 \; l_3] = [-27 \; -8 \; -19]$$

[1 βαθμός]

(iii) Οι εξισώσεις του συστήματος είναι:

$$x' = Ax+Bu, \hat{x} = A\hat{x}+Bu-LC(x-\hat{x}), u = F\hat{x}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_c είναι $\phi(s)\psi(s) = (s+1)^3(s+2)^3$. **[1 βαθμός]**