ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεωρία Ελέγχου: Ασκήσεις Γραμμικά Συστήματα

Α. Εκθετική Συνάρτηση

Α1: Η συνάρτηση $\sin(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζεται ως

$$\sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$$

Δείξτε ότι $|A^p_{ij}| \leq n^{p-1}\|A\|^p$ όπου $\|A\| = \max_{i,j=1,2,\dots,n} |a_{ij}|$ και ότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(A^{2k+1})_{ij}$$

είναι Cauchy. Άρα δειξτε ότι η συνάρτηση $\sin(A)$ είναι καλά ορισμένη.

Λύση: Επαγωγικά: Γιά $p = 1$: $|a_{ij}| \leq \|A\|$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $p \in \mathbb{N}$. Τότε για $p+1$:

$$|(A^{p+1})_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(A^p)_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\cdot|(A^p)_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|n^{p-1}\|A\|^p \leq n^{p-1}\sum_{k=1}^{n} \|A\|\cdot\|A\|^{p+1} \leq n^p\|A\|^{p+1}$$

και επομένως η ανισότητα ισχύει για κάθε $p \in \mathbb{N}$. Επομένως αν $l < m$:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(A^{2k+1})_{ij} - \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(A^{2k+1})_{ij}\right| = \left|\sum_{k=l+1}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(A^{2k+1})_{ij}\right| \\
&\leq \sum_{k=l+1}^{m} \frac{1}{(2k+1)!}|(A^{2k+1})_{ij}| \leq \sum_{k=l+1}^{m} \frac{n^{2k}}{(2k+1)!}\|A\|^{2k+1} \leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{n^{2k+1}}{(2k+1)!}\|A\|^{2k+1} \\
&= \sin(n\|A\|) - \sum_{0}^{l} \frac{n^{2k+1}}{(2k+1)!}\|A\|^{2k+1} \to 0
\end{aligned}$$

καθώς $l \to \infty$.

Α2: Να βρεθεί ο e^{At} αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση: Ο A είναι μηδενοδύναμος και επομένως

$$e^{At} = I_3 + At + \frac{1}{2}A^2t^2 = \dots = \begin{bmatrix} 1 & t+\frac{1}{2}t^2 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix}$$

Α3: Έστω $\lambda = \sigma + i\omega$ ($\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$) ιδιοτιμή του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1. Έστω $\{v_1, v_2\}$ η αντίστοιχη αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, δηλ.,

$$(A - \lambda I_4)v_1 = 0,\ \ (A - \lambda I_4)v_2 = v_1,\ \ v_1 \neq 0,\ v_2 \neq 0$$

Έστω ότι $x_1 = \mathrm{Re}(v_1)$, $y_1 = \mathrm{Im}(v_1)$, $x_2 = \mathrm{Re}(v_2)$ και $y_2 = \mathrm{Im}(v_2)$. Δείξτε ότι (x_1, x_2, y_1, y_2) είναι γραμμικά ανέξάρτητα και βρείτε τον εκθετικό πίνακα e^{At} (εκφρασμένο με πραγματικές συναρτήσεις).

A4: Έστω $y = Az$ γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται απο τον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $\mathcal{E}$ A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, δηλαδη $A\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$. Έστω το σύστημα $z' = Az$, $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν $z_0 \in \mathcal{E}$ τότε $z(t) \in \mathcal{E}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Λύση: Η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$z(t) = e^{At}z_0 = \left(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^kt^t}{k!} + \ldots\right) z_0$$

Εφόσον $z_0 \in \mathcal{E}$ έχουμε $Az \in \mathcal{E} \Rightarrow A^2z_0 = A(Az_0) \in \mathcal{E}$ και γενικά $A^kz_0 \in \mathcal{E}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$. Άρα $z(t) \in \mathcal{E}$ για κάθε $t \in \mathcal{R}$.

A5: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ αν και μόνο αν $AB = BA$.

Λύση: Έστω $\Phi(t) = e^{(A+B)t}e^{-Bt}e^{-At}$. Παραγωγίζοντας:

$$\Phi'(t) = e^{(A+B)t}\left\{(A+B)e^{-Bt} - Be^{-Bt} - e^{-Bt}A\right\}e^{-At} = e^{(A+B)t}\left\{Ae^{-Bt} - e^{-Bt}A\right\}e^{-At}$$

Όμως

$$\begin{aligned} Ae^{-Bt} &= A\left(I - Bt + \frac{B^2t^2}{2!} - .... + \frac{(-1)^kB^kt^k}{k!} + \ldots\right) \\ &= \left(I - Bt + \frac{B^2t^2}{2!} - .... + \frac{(-1)^kB^kt^k}{k!} + \ldots\right)A = e^{-Bt}A \end{aligned}$$

και άρα

$$\Phi'(t) = 0 \Rightarrow \Phi(t) = \Phi(0) = I \Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$$

Αντίστροφα, αν $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε

$$[e^{(A+B)t}]''|_{t=0} = [e^{At}e^{Bt}]''|_{t=0}$$

που συνεπάγεται ότι:

$$(A+B)^2e^{(A+B)t}|_{t=0} = A^2e^{At}e^{Bt} + 2Ae^{At}Be^{Bt} + e^{At}B^2e^{Bt}|_{t=0}$$

Ισοδύναμα:

$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \Rightarrow AB = BA$$

A6: Έστω $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων πίνακα A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδή,

$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda I)v_k &= v_{k-1} \\ (A-\lambda I)v_{k-1} &= v_{k-2} \\ &\vdots \\ (A-\lambda I)v_2 &= v_1 \\ (A-\lambda I)v_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

όπου

$$(A-\lambda I)^k v_k = 0,\ \ (A-\lambda I)^{k-1} v_k \neq 0$$

Δείξτε ότι τα διανύσματα $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση: Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} v_{k-1} &= (A-\lambda I)v_k \\ v_{k-2} &= (A-\lambda I)v_{k-1} = (A-\lambda I)^2 v_k \\ &\vdots \\ v_1 &= (A-\lambda I)v_2 = A-\lambda I)^{k-1} v_k \end{aligned}\right\}$$

και γενικά: $v_i = (A-\lambda I)^{k-i} v_k$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Επίσης:

$$(A-\lambda I)v_1 = 0,\ \ (A-\lambda I)^2 v_2 = (A-\lambda I)(A-\lambda I)v_2 = (A-\lambda I)v_1 = 0$$

και γενικά: $(A-\lambda I)^i v_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Έστω αυθαίρετος γραμμικός συνδιασμός των $\{v_i\}_{i=1}^k$ ίσος με 0:

$$0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda I - A)^{k-i} v_k = 0,\ \ \alpha_i \in \mathbb{C}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} 0 &= (A-\lambda I)^{k-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = (A-\lambda I)^{k-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = (A-\lambda I)^{k-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i (A-\lambda I)^{k-i} v_k \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i (A-\lambda I)^{2k-i-1}\right) v_k \\ &= \Big(\alpha_1 (A-\lambda I)^{2k-2} + \alpha_2 (A-\lambda I)^{2k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}(A-\lambda I)^k + \alpha_k (A-\lambda I)^{k-1}\Big) v_k \end{aligned}$$

και επομένως:

$$\alpha_k (A-\lambda I)^{k-1} v_k = 0 \Rightarrow \alpha_k v_1 = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$$

Επομένως

$$\begin{aligned} 0 &= (A-\lambda I)^{k-2} \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = (A-\lambda I)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i \\ &= (A-\lambda I)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (A-\lambda I)^{k-i} v_k \\ &= (A-\lambda I)^{k-2} \Big[\alpha_1 (A-\lambda I)^{k-1} + \alpha_2 (A-\lambda I)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-2} (A-\lambda I)^2 + \alpha_{k-1}(A-\lambda I)\Big] v_k \end{aligned}$$

και επομένως

$$\alpha_{k-1} (A-\lambda I)^{k-1} v_k = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} v_1 = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = 0$$

και γενικά (με επαγωγή) $\alpha_i = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ και άρα τα $\{v_i\}_{i=1}^k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Α7: Να βρεθεί ο εκθετικός πίνακας e^{At} αν:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση: Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ 5 & \lambda+3 & 7 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(\lambda+3) + (5\lambda+7) - 2(\lambda+3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$$

Ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha+\beta+2\gamma = 0, \alpha+\gamma = 0, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως $d = 1$ και έχουμε μία αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους 3. Η αλυσίδα είναι της μορφής:

$$\left.\begin{array}{l} (A+I)u_1 = 0 \\ (A+I)u_2 = u_1 \\ (A+I)u_3 = u_2 \end{array}\right\} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = (A+I)u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$u_1 = (A+I)u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

που επιβεβαιώνει τον παραπάνω υπολογισμό για το u_1. Άρα:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

και

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Β. Προβλήματα με σταθερούς συντελεστές

Β1: Βρείτε την λύση του Π.Α.Τ.:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και τον αντίστοιχο ευσταθή, ασταθή και κεντρικό υπόχωρο του συστήματος.

Λύση: Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$. Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$:

$$(A-I)v_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν την ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$:

$$(A+I)^2 v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Θέτοντας $v_1 = [1\ 0\ 0]^T$, $v_2 = [0\ 1\ 0]^T$ και $P = [v_1\ v_2\ v_3]$, έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & -2e^{-t}+2e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}-te^{-t} \\ -e^{-t}+2e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix}$$

B2: Να λυθεί το ΠΑΤ $x'(t) = Ax(t) + b(t)$, $x(0) = x_0$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Λύση: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του πίνακα A:

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 5,\ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

αντίστοιχα. Επομένως:

$$A = U\Lambda U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως:

$$e^{At} = Ue^{\Lambda t}U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{5t}-2e3t \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$x(t) = e^{At}\left[x_0 + \int_0^t e^{-As}b(s)ds\right] = e^{At}\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3s} & 2e^{-5s}-2e{-3s} \\ 0 & e^{-5s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3s} \\ 0 \end{bmatrix}ds\right]$$

Ισοδύναμα

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{5t}-2e^{3t} \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t+1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+1)e^{3t}+4e^{5t}-4e^{3t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

B3: Να λυθεί το ΠΑΤ $y' = Ay$, $y(0) = y_0$, όπου:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix},\ y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Λύση: Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\phi(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -5 & \lambda+3 \end{bmatrix} = \lambda^2+2\lambda-8 = (\lambda+4)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2$$

Ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda_1 = -4: \quad \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \beta + 5\alpha = 0, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

και

$$\lambda_2 = 2: \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \beta = \alpha = 0, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6}$$

και

$$y(t) = e^{At} y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-4} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7e^{2t} - e^{-4t} \\ 7e^{2t} + 5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

B4: Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος: $x_1' = x_1 - 2x_3$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_1 - x_2 - x_3$.

Λύση: Γράφουμε το σύστημα στη μορφή $x' = Ax$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα έχει ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i = \bar{\lambda}_3$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} i+1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} := x + iz$$

Άρα

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 + c_3 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix} \cos t + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t$$

όπου $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

B5: Έστω το σύστημα: $x_1' = x_1$, $x_2' = -x_1 - x_2$. (α) Να βρεθεί η λύση του συστήματος. (β) Να βρεθεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών για τις οποίες $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Λύση: $x_1' = x_1 \Rightarrow x_1 = x_1(0)e^t$. $x_2' + x_2 = -x_1(0)e^t \Rightarrow x_2 = \left(x_2(0) + \frac{x_1(0)}{2} \right) e^{-t} - \frac{x_1(0)}{2} e^t$. Άρα $(x_1\ x_2) \to 0$ αν και μόνο αν $x_1(0) = 0$, δηλ. $x(0) = \lambda [0\ 1]^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$, που ειναι ο ευσταθής υπόχωρος του συστήματος.

B6: Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$y' = Ay + b := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y(0) = 0$$

Λύση: Η λύση είναι της μορφής:

$$y(t) = e^{At} y(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} b d\tau$$

Έχουμε:

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{A(t-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{bmatrix} \Rightarrow e^{A(t-\tau)} b = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$y(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{t-\tau} d\tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t [e^{-\tau}]_t^0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B7: Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης:

$$y' = Ay, \;\; A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

μετά από μερικές πράξεις. Ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda = 1 : \;\; \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2\alpha = \beta + \gamma, 2\beta = \alpha + \gamma, \;\; u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης:

$$\lambda = -2 : \;\; \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0, \;\; \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -2$ έχει διάσταση 2. Άρα $\tau = d = 2$ και ο A είναι απλής δομής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

και

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B8: Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \;\; y(0) = y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Λύση: Ιδιοτιμές: $\sigma(A) = \{1, 1+i, 1-i\}$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} := x + iz = \bar{u}_3$$

Άρα

$$y(t)=e^{At}y_0=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^t\cos t&e^t\sin t\\0&-e^t\sin t&e^t\cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=e^t\begin{bmatrix}1\\\cos t-\sin t\\\cos t+\sin t\end{bmatrix}$$

Γ. Περιοδικές Λύσεις

Γ1: Δείξτε ότι το σύστημα $x'(t)=1+x(t)\cos t$ δεν έχει 2π-περιοδική λύση.

Λύση: Ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(t)=e^{-\sin t}$. Τότε

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\sin t}x\right)=e^{-\sin t}\left(x'-\cos t\,x\right)=e^{-\sin t}$$

Άρα

$$x(t)=x(0)e^{-\sin t}+e^{-\sin t}\int_0^t e^{-\sin s}ds$$

Επομένως

$$x(2\pi)=x(0)+\int_0^{2\pi}e^{-\sin s}ds$$

και αφού $e^{-\sin s}>0$ για κάθε $s\in[0,2\pi]$ δεν μπορεί να έχουμε $x(2\pi)=x(0)$.

Γ2: Έστω το ΠΑΤ

$$x'(t)=\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+x_2+\sin t\\2x_2+\cos^2 t\end{bmatrix},\quad x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1^0\\x_2^0\end{bmatrix}$$

Να βρεθούν τα $x(0)\in\mathbb{R}^2$ για τα οποία το σύστημα έχει 2π-περιοδική λύση.

Λύση: Γράφουμε:

$$x'(t)=Ax(t)+b(t),\quad A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\quad b(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\\cos^2 t\end{bmatrix}$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds$$

Αν υπήρχε 2π-περιοδική λύση, τότε

$$x(0)=x(2\pi)=e^{2\pi A}x(0)+\int_0^{2\pi}e^{A(2\pi-s)}b(s)ds\Rightarrow(I-e^{2\pi A})x(0)=e^{2\pi A}\int_0^{2\pi}e^{-As}b(s)ds$$

Επίσης

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow e^{At}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow e^{2\pi A}=e^{4\pi}\begin{bmatrix}1&2\pi\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow I_2-e^{2\pi A}=\begin{bmatrix}1-e^{4\pi}&-2\pi e^{4\pi}\\0&1-e^{4\pi}\end{bmatrix}$$

και $\det(I_2-e^{2\pi A})=(1-e^{4\pi})^2\neq 0$, και άρα το σύστημα είναι 2π-περιοδικό αν

$$x(0)=(I_2-e^{2\pi A})^{-1}e^{2\pi A}\int_0^{2\pi}e^{-As}b(s)ds$$

Γ3: Έστω το σύστημα $y' = Ay + f(t)$ όπου f συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι το σύστημα έχει 2π-περιοδικές λύσεις αν και μόνο αν

$$\int_0^{2\pi} x^T(t)f(t)dt = 0$$

για κάθε 2π-περιοδική λύση $x(t)$ του συζυγούς συστήματος $x'(t) = -A^T x(t)$.

Λύση: Η λύση του ΠΑΤ: $y'(t) = Ay(t) + f(t)$ είναι $y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds$. Η $y(t)$ είναι 2π-περιοδική αν $y(2\pi) = y(0)$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} y(2\pi) = e^{2\pi A}y_0 + \int_0^{2\pi} e^{2\pi A - sA}f(s)ds = y_0 &\Rightarrow (I - e^{2\pi A})y_0 = e^{2\pi A}\int_0^{2\pi} e^{-As}f(s)ds \\ \Rightarrow e^{-2\pi A}(I - e^{2\pi A})y_0 = \int_0^{2\pi} e^{-As}f(s)ds &\Rightarrow -(I_n - e^{-2\pi A})y_0 = \int_0^{2\pi} e^{-As}f(s)ds \end{aligned}$$

Θέτοντας: $B = I_n - e^{-2\pi A}$ και $\beta = \int_0^{2\pi} e^{-As}f(s)ds$ έχουμε $-By_0 = \beta$. Η λύση του (αυτόνομου) συζυγούς συστήματος είναι 2π-περιοδική αν:

$$x(t) = e^{At}x_0 \Rightarrow x(2\pi) = e^{2\pi A}x_0 = x_0 \Rightarrow (I - e^{-2\pi A})x_0 = 0 \Rightarrow Bx_0 = 0$$

Η εξίσωση $-By_0 = \beta$ έχει λύση ως προς y_0 αν και μόνο αν $\beta \in \mathcal{R}(B) = \mathcal{N}_r(B^T)^\perp$ ενώ αρχικές συνθήκες $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ορίζουν περιοδικές λύσεις για το συζυγές σύστημα αν και μόνο αν $x_0 \in \mathcal{N}_r(B)$. Άρα το σύστημα έχει 2π-περιοδική λύση αν και μόνο αν

$$x_0^T \int_0^{2\pi} e^{-As}f(s)ds = 0 \;\; \text{για κάθε} \;\; x_0 \in \mathcal{N}_r(B)$$

Ισοδύναμα:

$$\int_0^{2\pi} (e^{-A^T s}x_0)^T f(s)ds = 0 \;\; \text{για κάθε} \;\; x_0 \in \mathcal{N}_r(B) \quad \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \psi^T(s)f(s)ds = 0$$

για κάθε 2π-περιοδική λύση $\psi(t)$ του συζυγούς.

Δ. Προβλήματα με μη-σταθερούς συντελεστές, Θ.Π.Λ., Πίνακας Μεταφοράς

Δ1: Δείξτε ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος:

$$y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} := A(t)y(t), \;\; t > 0$$

Λύση: Αρκει να δείξουμε ότι $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ και ότι η οριζουσα Wronski ειναι διάφορη του μηδενός για ένα τουλάχιστον $t \in \mathbb{R}$. Πράγματι έχουμε:

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} = A(t)\Phi(t) \;\; \text{και} \;\; W(t) = \det\begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{t} \neq 0, \;\; t > 0$$

Δ2: Έστω $\Phi(t)$ θεμελειώδης πίνακας λύσεων του $y'(t) = A(t)y(t)$. Δείξτε ότι η γενική λύση της $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ είναι $y(t) = \Phi(t)c + \int \Phi^{-1}(t)b(t)dt$.

Λύση: Εφαρμόζουμε την μέθοδο μεταβολής παραμέτρων και αναζητούμε λύση της μορφής: $y(t) = \Phi(t)x(t)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} y'(t) &= \Phi'(t)x(t) + \Phi(t)x'(t) = A(t)\Phi(t)x(t) + b(t) \\ &\Rightarrow A(t)\Phi(t)x(t) + \Phi(t)x'(t) = A(t)\Phi(t)x(t) + b(t) \\ &\Rightarrow \Phi(t)x'(t) = b(t) \end{aligned}$$

Άρα

$$x'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t) \Rightarrow x(t) = c + \int \Phi^{-1}(t)b(t)dt \Rightarrow y(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)b(t)dt$$

όπου $c \in \mathbb{R}^n$.

Δ3: Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης: $t^2x''(t) - 2x(t) = 0$, $t > 0$. Με την χρήση αυτών των λύσεων να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Λύση: Ψάχνουμε λύση της μορφής $x(t) = t^p \Rightarrow x'(t) = pt^{p-1} \Rightarrow x''(t) = p(p-1)t^{p-2}$. Αρα: $(p^2 - p - 2)t^p = 0 \Rightarrow (p-2)(p+1) = 0$ και $p_1 = 2$, $p_2 = -1$. Αρα δύο γραμμικά ανεξάρτηρες λύσεις στο $(0, \infty)$ είναι $\{t^2, t^{-1}\}$. Ορίζοντας $y_1 = x$, $y_2 = x'$ η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{bmatrix} y$$

που είναι της μορφής $y'(t) = A(t)y(t)$. Εφόσον η εξίσωση έχει δύο λύσεις (γραμμικά ανεξάρτητες) $x_1 = t^2$ και $x_2 = t^{-1}$ ένας υ.π.λ. είναι:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{bmatrix}$$

Από την προηγούμενη άσκηση η γενική λύση του συστήματος $y' = Ay + b$ είναι: $y(t) = \Phi(t)c + \int \Phi^{-1}(t)b(t)dt$. Γιά $b = [0\ 1]^T$ έχουμε:

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t^{-2} & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1}b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t^{-2} & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t^{-1} \\ -t^2 \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\int \Phi^{-1}(t)bdt = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \int t^{-1}dt \\ -\int t^2 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\ln t \\ -\frac{1}{9}t^3 \end{bmatrix}$$

και επομένως:

$$y(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\ln t \\ -\frac{1}{9}t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(c_1 - \frac{1}{9}\right)t^2 + c_2t^{-1} + \frac{1}{3}t^2\ln t \\ \left(2c_1 + \frac{1}{9}\right)t - c_2t^{-2} + \frac{2}{3}t\ln t \end{bmatrix}$$

Δ4: Έστω το σύστημα $y' = A(t)y$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_{ij} = [A(t)]_{ij}$ συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό: $x(t) = P(t)y(t)$ όπου $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p_{ij}(t) = [P(t)]_{ij}$ συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $P^{-1}(t)$ είναι καλά ορισμένος πίνακας για κάθε $t \in \mathbb{R}$

και ότι $P^{-1}(t) = [\hat{p}_{ij}(t)]$ όπου $\hat{p}_{ij}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. (α) Δείξτε ότι $x' = \tilde{A}x$ όπου $\tilde{A} = (P' + PA)P^{-1}$. (β) Αν $\tilde{G}(t, t_0)$ είναι συνάρτηση μεταφοράς που αντιστοιχεί στο $x' = \tilde{A}x$, τότε $\tilde{G}(t, t_0) = P(t)G(t, t_0)P^{-1}(t)$ όπου $G(t, t_0)$ η συνάρτηση μεταφοράς που αντιστοιχεί στο $y' = Ax$.

Λύση: Έχουμε

$$x = Py \Rightarrow x' = P'y + Py' = P'P^{-1}x + PAP^{-1}x \Rightarrow x' = (P' + PA)P^{-1}x = \tilde{A}x$$

Επίσης

$$x(t) = \tilde{G}(t, t_0)x(t_0) = P(t)G(t, t_0)y(t_0) = P(t)G(t, t_0)P^{-1}(t_0)x(t_0)$$

και άρα:

$$\tilde{G}(t, t_0) = P(t)G(t, t_0)P^{-1}(t)$$

Δ5: Έστω η εξίσωση $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ όπου $a_0(t)$, $a_1(t)$ συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$. Έστω ότι $y_1(t)$ είναι μία λύση της εξίσωσης στο διάστημα I και ότι $y_1(t) \neq 0$, $t \in I$. Έστω επίσης ότι $y_2(t) = v(t)y_1(t)$ όπου $v \in C^2(I)$. Δείξτε ότι $y_2(t)$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης στο I, όπου

$$y_2(t) = y_1(t) \int y_1^{-2} \exp\{-\int a_1(t)dt\}dt$$

και ότι $\{y_1(t), y_2(t)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I. Αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

βρέιτε έναν ϑ.π.λ. του συστήματος $z' = A(t)z$.

Λύση: Έστω y_1 η λύση της εξίσωσης και $y_2 = vy_1$. Αν y_2 είναι επίσης λύση, τότε $y_2' = v'y_1 + vy_1'$ και $y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + y_1''$ και άρα

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_2'' + a_1(v'y_1 + vy_1') + a_0vy_1 = 0 \Rightarrow v''y_1 + (2y_1' + a_1y_1)v' = 0$$

Θέτοντας: $v' = u$:

$$u'y_1 + (2y_1' + a_1y_1) = 0 \Rightarrow u' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1\right) = 0$$

Ορίζουμε ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$\mu(t) = \exp\left\{\int \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1(t)\right) dt\right\}$$

Τότε

$$\mu u' + \mu\left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1\right) = 0 \Rightarrow (\mu u)' = 0 \Rightarrow \mu u = c_1 \Rightarrow u = c_1\mu^{-1}$$

Επομένως

$$u = c_1 \exp\left\{-\int \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1\right) dt\right\} = c_1 y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\}$$

και

$$v = c_1 \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\} dt + c_2 \Rightarrow y_2 = c_1 y_1 \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\} dt + c_2 y_1$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Άρα δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι:

$$\left(y_1, y_1 \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\} dt\right)$$

Έστω

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

και αν $x = [y\ y']^T$ τότε $x' = A(t)x$ και επομένως ένας ϑ.π.λ. είναι:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} y_1 & y_1 \int y_1^{-2} \exp\{-\int a_1(t)dt\}dt \\ \\ y_1' & y_1' \int y_1^{-2} \exp\{-\int a_1(t)dt\}dt + y_1^{-1} \exp\{-\int a_1(t)dt\} \end{bmatrix}$$

Η γραμμική ανεξαρτησία επιβεβαιώνεται απο την ορίζουσα Wronski

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) &= y_1 y_1' \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\} dt + \exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\} \\ &- y_1 y_1' \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\} dt \\ &= \exp\left\{-\int a_1(t)dt\right\} \neq 0 \end{aligned}$$

και επομένως ο πίνακας λύσεων $\Phi(t)$ είναι ϑεμελιώδης.

Δ6: Δείξτε ότι $\phi(t) = te^{t^2}$ είναι λύση της εξίσωσης: $x'' - 4tx' + (4t^2 - 2)x = 0$ και βρείτε την λύση που ικανοποιεί την αρχική συνϑήκη $x(1) = e$, $x'(1) = 2e$. Επομένως να βρεϑεί η λύση του ΠΑΤ:

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - 4t^2 & 4t \end{bmatrix}, \quad y(1) = \begin{bmatrix} e \\ 2e \end{bmatrix}$$

Λύση: Έχουμε:

$$\phi_1(t) = te^{t^2} \Rightarrow \phi_1'(t) = e^{t^2} + 2t^2 e^{t^2} \Rightarrow \phi_1''(t) = 2te^{t^2} + 4te^{t^2} + 4t^3 e^{t^2} = 6te^{t^2} + 4t^3 e^{t^2}$$

Με αντικατάσταση στην διαφορική εξίσωση:

$$\phi_1'' - 4\phi_1' + (4t^2 - 2)\phi_1 = [(6t - 4t^3) - 4t(1 + 2t^2) + (4t^2 - 2)t]e^{t^2} = 0$$

Επιζητούμε λύση της μορφής: $\phi_2(t) = v(t)e^{t^2}$ σε διάστημα I, $0 \in I$. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε:

$$\phi_2(t) = te^{t^2} \int t^{-2} e^{-2t^2} e^{\int 4tdt} dt = te^{t^2} \int t^{-2} dt = -e^{t^2}$$

Άρα δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι: (e^{t^2}, te^{t^2}). Το σύστημα $y' = A(t)y$ έχει ϑ.π.λ.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{t^2} & te^{t^2} \\ 2te^{t^2} & e^{t^2} + 2t^2 e^{t^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi(1) = e \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi(1)^{-1} = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$y(t) = G(t, 1)y(1) = \Phi(t)\Phi^{-1}y(1) = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} e^{t^2} & te^{t^2} \\ 2te^{t^2} & e^{t^2} + 2t^2 e^{t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ 2e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t^2} \\ 2te^{t^2} \end{bmatrix}$$

Δ7: Δείξτε ότι αν $y' = A(t)y$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{ij}(t)$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ και

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix}$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, τότε ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος είναι:

$$G(t,t_0) = \begin{bmatrix} G_{11}(t,t_0) & G_{12}(t,t_0) \\ 0 & G_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}$$

όπου $G_{ii}(t,t_0)$, $i = 1, 2$, είναι η λύση του ΠΑΤ:

$$G'_{ii}(t,t_0) = A_{ii}(t)G_{ii}(t,t_0), \;\; G_{ii}(t_0,t_0) = I_{n_i}$$

και $G_{12}(t,t_0)$ είναι η λύση του ΠΑΤ:

$$G'_{12}(t,t_0) = A_{11}(t)G_{12}(t,t_0) + A_{12}(t)G_{22}(t,t_0), \;\; G_{12}(t_0,t_0) = 0$$

Επομένως, βρείτε τον πίνακα μεταφοράς $G(t,t_0)$ αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και υπολογίστε το όριο $\lim_{t \to +\infty} y(t)$, αν $y(t) = \phi(t,t_0,y_0)$ όπου $t_0 = 0$ και $y^T(0) = [0\ 1]$.

Λύση: Έστω

$$G(t,t_0) = \begin{bmatrix} G_{11}(t,t_0) & G_{12}(t,t_0) \\ G_{21}(t,t_0) & G_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}$$

Τότε

$$G'(t,t_0) = \begin{bmatrix} G'_{11}(t,t_0) & G'_{12}(t,t_0) \\ G'_{21}(t,t_0) & G'_{22}(t,t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}(t,t_0) & G_{12}(t,t_0) \\ G_{21}(t,t_0) & G_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} G_{11}(t_0,t_0) & G_{12}(t_9,t_0) \\ G_{21}(t_0,t_0) & G_{22}(t_0,t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

Από το block $(2, 1)$ έχουμε:

$$G'_{21}(t,t_0) = A_{22}(t)G_{21}(t,t_0), \;\; G_{21}(t_0,t_0) = 0$$

και απο το μονοσήμαντο της λύσης έχουμε $G_{21}(t,t_0) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\begin{aligned} G'_{11}(t,t_0) &= A_{11}(t)G_{11}(t,t_0), \;\; G_{11}(t_0,t_0) = I_{n_1} \\ G'_{22}(t,t_0) &= A_{22}(t)G_{22}(t,t_0), \;\; G_{22}(t_0,t_0) = I_{n_2} \\ G'_{12}(t,t_0) &= A_{11}(t)G_{12}(t,t_0) + A_{12}(t)G_{22}(t,t_0), \;\; G_{12}(t_0,t_0) = 0 \end{aligned}$$

Αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

έχουμε: $g'_{11}(t,t_0) = g_{11}(t,t_0)$, $g_{11}(t_0,t_0) = 1$. Έστω $\hat{g}_{11}(t) = g_{11}(t,t_0)$. Τότε $\hat{g}'_{11}(t) + \hat{g}_{11}(t) = 0$ και άρα $\hat{g}_{11}(t) = ce^{-t}$. Επομένως $g_{11}(t,t_0) = ce^{-t}$, $c \in \mathbb{R}$ και $g_{11}(t_0,t_0) = ce^{-t_0} = 1 \Rightarrow c = e^{t_0}$ και $g_{11}(t,t_0) = e^{-(t-t_0)}$. Παρόμοια $g_{22}(t) = e^{-(t-t_0)}$. Επίσης, αν $\hat{g}_{12}(t) = g_{12}(t,t_0)$, τοτε $\hat{g}'_{12} = -\hat{g}_{12}(t) + e^{2t}e^{-t+t_0}$ που συνεπάγεται ότι $\hat{g}'_{12} + \hat{g}_{12}(t) = e^{t+t_0}$ πο έχει λύση της μορφής $\hat{g}_{12}(t) = ce^{-t} + Be^{t}$. Αντικαθιστώντας την ειδική λύση Be^t στην εξίσωση: $2Be^t = e^{t+t_0} \Rightarrow B = \frac{1}{2}e^{t_0}$ και $\hat{g}(t) = ce^{-t} + \frac{1}{2}e^{t+t_0}$. Αρχική συνθήκη: $g_{12}(t_0,t_0) = 0 = ce^{-t_0} + \frac{1}{2}e^{2t_0} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}e^{3t_0}$ και $g_{12}(t,t_0) = -\frac{1}{2}e^{3t_0-t} + \frac{1}{2}e^{t_0+t}$. Άρα:

$$G(t,t_0) = \begin{bmatrix} e^{t_0-t} & -\frac{1}{2}e^{3t_0-t} + \frac{1}{2}e^{t_0+t} \\ 0 & e^{t_0-t} \end{bmatrix}$$

και

$$y(t) = G(t,0)y_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

και άρα $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = \infty$. (Συμπέρασμα: Οι αρνητικές ιδιοτιμές ΔΕΝ εξασφαλίζουν ασυμπτωτική ευστάθεια όταν ο πίνακας A δεν είναι σταθερός).

Ε. Συζυγή Συστήματα

Ε1: Έστω σύστημα $\Sigma : y' = Ay$, $y(0) = y_0$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Το σύστημα $\Sigma' : x' = -A^T x$, $x(0) = x_0$, ονομάζεται συζυγές του Σ. Δείξτε ότι αν $\phi(t)$ και $\psi(t)$ είναι οι λύσεις των Σ και Σ', αντίστοιχα, τότε $\psi^T(t)\phi(t) = x_0^T y_0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Λύση: Έχουμε $\phi(t) = e^{At}y_0$, $\psi(t) = e^{-A^T t}x_0$ και επομένως:

$$\psi^T(t)\phi(t) = x_0^T (e^{-A^T t})^T e^{At} y_0 = x_0^T e^{-At} e^{At} y_0 = x_0^T y_0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Ε2: Δείξτε ότι $\frac{\partial}{\partial \tau} G(t,\tau) = -G(t,\tau)A(\tau)$ όπου $G(t,\tau)$ ο πίνακας μεταφοράς που αντιστοιχεί στο σύστημα $y' = A(t)y$, όπου τα στοιχεία το A είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\right)$$

όπου $\Phi(t)$ είναι θ.π.λ του συστήματος. Έχουμε

$$\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau) = I_n \Rightarrow \Phi'(\tau)\Phi^{-1}(\tau) + \Phi(\tau)[\Phi^{-1}(\tau)]' = 0 \Rightarrow [\Phi^{-1}(\tau)]' = -\Phi^{-1}(\tau)\Phi'(\tau)\Phi^{-1}(\tau)$$

Άρα

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G(t,\tau) = -\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\Phi'(\tau)\Phi^{-1}(\tau) = -G(t,\tau)A(\tau)\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau) = -G(t,\tau)A(\tau)$$

Ε3: Έστω σύστημα $y' = A(t)y$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A_{ij} συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το συζυγές σύστημα $z' = -A^T(t)z$. Έστω $G(t,t_0)$ και $\hat{G}(t,t_0)$ οι αντίστοιχοι πίνακες μεταφοράς. Δείξτε ότι $\hat{G}(t,t_0) = G^T(t_0,t)$.

Λύση: Έστω $Y(t) = G^T(t,t_0)\hat{G}(t,t_0)$. Τότε:

$$\begin{aligned}
Y'(t) &= [G^T(t,t_0)]'\hat{G}(t,t_0) + G^T(t,t_0)\hat{G}'(t,t_0) \\
&= [G'(t,t_0)]^T\hat{G}(t,t_0) + G^T(t,t_0)\hat{G}'(t,t_0) \\
&= [A(t)G(t,t_0)]^T\hat{G}(t,t_0) + G^T(t,t_0)[-A^T(t)\hat{G}(t,t_0)] \\
&= G^T(t,t_0)A^T(t)\hat{G}(t,t_0) - G^T(t,t_0)A^T(t)\hat{G}(t,t_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Επομένως

$$Y(t) = G^T(t,t_0)\hat{G}(t,t_0)|_{t=t_0} = I_n \Rightarrow \hat{G}(t,t_0) = [G^T(t,t_0)]^{-1} = G^T(t_0,t)$$