ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ύπαρξη/Μοναδικότητα λύσης

Α1: Έστω το σύστημα

$$x'' + \frac{x'}{1+x^2} + x = 0, \;\; x(0) = u_0, \; x'(0) = u_1, \;\; t \geq 0$$

(α) Δείξτε ότι το σύστημα γράφεται στη μορφή $z' = f(z)$, $z(0) = z_0$, όπου $z = [x\ x']^T \in \mathbb{R}^2$, $z_0 \in \mathbb{R}^2$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(β) Βρείτε εκτίμηση της $\|f(z)\|$ της μορφής $\|f(z)\| \leq \gamma\|z\|$, $\gamma > 0$, όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδια νόρμα, $\|z\| = \sqrt{z^T z}$.

(γ) Έστω $J = [0, \beta)$ το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης του συστήματος. Με χρήση της ανισότητας Gronwall δείξτε ότι $\|z(t)\| \leq \|z_0\|e^{\gamma\beta}$ για κάθε $t \in [0, \beta)$. Επομένως δείξτε ότι $\beta = \infty$, δηλαδή ότι η λύση του συστήματος είναι καλά ορισμένη για κάθε $t \geq 0$.

Λύση: (α) Θέτουμε $z_1 = x$, $z_2 = x'$. Τότε

$$z' = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 - \frac{z_2}{1+z_1^2} \end{bmatrix} := f(z), \;\; z(0) = z_0 = \begin{bmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

(β) Έχουμε

$$\|f(z)\|^2 = z_2^2 + \left(z_1 + \frac{z_2}{1+z_1^2}\right)^2 = z_2^2 + z_1^2 + \frac{2z_1 z_2}{1+z_1^2} + \frac{z_2^2}{(1+z_1^2)^2}$$

$$\leq z_1^2 + z_2^2 + \frac{z_1^2 + z_2^2}{1+z_1^2} + \frac{z_2^2}{(1+z_1^2)^2} \leq 2z_1^2 + 3z_2^2 \leq 3\|z\|^2 := \gamma^2\|z\|^2$$

όπου $\gamma = \sqrt{3}$.

(γ) Έχουμε

$$z(t) = z_0 + \int_0^t f(z(s))ds, \;\; t \in [0, \beta)$$

Επομένως

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| + \int_0^t \|f(z(s))\|ds \leq \|z_0\| + \gamma\int_0^t \|z(s)\|ds \leq \|z_0\|e^{\gamma t} \leq \|z_0\|e^{\gamma\beta}$$

για κάθε $t \in [0, \beta)$. Εφόσον η λύση φεύγει έξω από κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ έχουμε $\beta = \infty$.

Α2: Βρείτε την ροή $\phi_t(x_0)$, $\phi_t(x_0) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ του συστήματος: $x' = \frac{1}{x^2}$ και το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης $J(x_0) = (\alpha, \beta)$. Αν $\alpha > -\infty$ και $\beta < \infty$ δείξτε ότι

$$\lim_{t\to\alpha^+} \phi_t(x_0) \in \bar{E} \;\; \text{και} \;\; \lim_{t\to\beta^-} \phi_t(x_0) \in \bar{E}$$

όπου $E = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Σχεδιάστε το σύνολο $\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R}^2, t \in J(x_0)\}$. Δείξτε ότι $\phi_t(\phi_s(x_0)) = \phi_{t+s}(x_0)$ για $s \in J(x_0)$ και $s + t \in J(x_0)$.

Λύση: Έχουμε

$$x' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int x^2 dx = \int dt + c' \Rightarrow x^3 = x_0^3 + 3t \Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{x_0^3 + 3t}$$

Αν $x_0 > 0$, τότε $x(t) > 0$ για κάθε $t \in J(x_0)$ και επομένως $x_0^3 + 3t > 0 \Rightarrow t > -\frac{x_0^3}{3}$, δηλαδή $J(x_0) = (-\frac{x_0^3}{3}, \infty)$. Εδώ έχουμε $\alpha = -\frac{x_0^3}{3} < 0$, $\beta = +\infty$, $\lim_{t \to \alpha^+} \phi_t(x_0) \in \partial E = \{0\}$.

Αν $x_0 < 0$, τότε $x(t) < 0$ για κάθε $t \in J(x_0)$ και επομένως $x_0^3 + 3t < 0 \Rightarrow t < -\frac{x_0^3}{3}$, δηλαδή $J(x_0) = (-\infty, -\frac{x_0^3}{3})$. Εδώ έχουμε $\alpha = -\infty$, $\beta = -\frac{x_0^3}{3} > 0$, $\lim_{t \to \beta^-} \phi_t(x_0) \in \partial E = \{0\}$.

Επίσης:

$$\phi_t(x_0) = (x_0^3 + 3t)^{1/3}, \;\; \phi_s(x_0) = (x_0^3 + 3s)^{1/3}$$

και

$$\phi_t(\phi_s(x_0)) = ((x_0^3 + 3s) + 3t)^{1/3} = ((x_0^3 + 3s + 3t)^{1/3} = \phi_{t+s}(x_0)$$

A3: Έστω το σύστημα $x' = A(t)x + b(t)$, $x(0) = x_0$, όπου $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$ συνεχείς στο $[0, T]$. Δείξτε με χρήση της ανισότητας Gronwall ότι η λύση του συστήματος είναι μοναδική στο διάστημα $[0, T]$.

Λύση: Έστω $L = \max_{0 \le t \le T} \|A(t)\|$. Έστω ότι έχουμε δύο λύσεις $x(t)$ και $y(t)$. Τότε:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (A(s)x(s) + b(s))ds, \;\; y(t) = y_0 + \int_0^t (A(s)y(s) + b(s))ds, \;\; t \in [0, T]$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_0^t A(s)(x(s) - y(s))ds, \;\; t \in [0, T]$$

και επομένως

$$\|x(t) - y(t)\| \le \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|A(s)\| \cdot \|x(s) - y(s)\| ds \le \|x_0 - y_0\| + \int_0^t L\|x(s) - y(s)\| ds, \;\; t \in [0, T]$$

Από την ανισότητα Gronwall:

$$\|x(t) - y(t)\| \le \|x_0 - y_0\| e^{\int_0^t L ds} = \|x_0 - y_0\| e^{Lt} \le \|x_0 - y_0\| e^{LT}, \;\; t \in [0, T]$$

Επομένως αν $x_0 = y_0$ έχουμε $\|x(t) - y(t)\| = 0$ για κάθε $t \in [0, T]$ και άρα $x(t) = y(t)$ για κάθε $t \in [0, T]$.

A4: (α) Δείξτε την παρακάτω επέκταση του Λήμματος Gronwall: Έστω $\lambda : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\mu : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και μή αρνητική συνάρτηση. Αν η συνεχής συνάρτηση $y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$y(t) \le \lambda(t) + \int_\alpha^t \mu(s)y(s)ds$$

για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$, τότε:

$$y(t) \le \lambda(t) + \int_\alpha^t \lambda(s)\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} ds$$

για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$.

(β) Έστω $f(t, x)$ συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς x, τέτοια ώστε

$$\|f(t, x)\| \le k_1 + k_2\|x\|, \;\; \forall\, (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \;\; k_1, k_2 > 0$$

Δείξτε ότι η λύση του ΠΑΤ $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{k_2(t-t_0)} + \frac{k_1}{k_2}\left(e^{k_2(t-t_0)} - 1\right)$$

για κάθε $t \geq t_0$ και ότι επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $t \in [t_0, \infty)$.

(γ) Δείξτε ότι το σύστημα

$$x_1' = -x_1 + \frac{2x_2}{1+x_2^2}, \;\; x_2' = -x_2 + \frac{2x_1}{1+x_1^2}, \;\; x_1(0) = a, \; x_2(0) = b$$

έχει μοναδική λύση για κάθε $t \geq 0$.

Λύση: (α) Θέτουμε: $z(t) = \int_\alpha^t \mu(s)y(s)ds$ και $v(t) = z(t) + \lambda(t) - y(t) \geq 0$. Η συνάρτηση $z(t)$ είναι παραγωγίσιμη και:

$$z'(t) = \mu(t)y(t) = \mu(t)z(t) + \mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t)$$

Επομένως:

$$e^{-\int_\alpha^t \mu(\tau)d\tau} z'(t) - \mu(t)e^{-\int_\alpha^t \mu(\tau)d\tau} z(t) = e^{-\int_\alpha^t \mu(\tau)d\tau}(\mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t))$$

Ισοδύναμα:

$$\left(e^{-\int_\alpha^t \mu(\tau)d\tau} z(t)\right)' = e^{-\int_\alpha^t \mu(\tau)d\tau}(\mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t))$$

Ολοκληρώνοντας:

$$e^{-\int_\alpha^t \mu(\tau)d\tau} z(t) = z(\alpha) + \int_\alpha^t e^{-\int_\alpha^s \mu(\tau)d\tau}\left(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s)\right) ds$$

και εφόσον $z(\alpha) = 0$,

$$z(t) = e^{\int_\alpha^t \mu(\tau)d\tau} \int_\alpha^t e^{-\int_\alpha^s \mu(\tau)d\tau}\left(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s)\right) ds = \int_\alpha^t e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}\left(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s)\right) ds$$

Όμως:

$$\int_\alpha^t e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} \mu(s)v(s)ds \geq 0$$

και επομένως

$$z(t) \leq \int_\alpha^t e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} \mu(s)\lambda(s)ds \Rightarrow y(t) \leq \lambda(t) + z(t) \leq \lambda(t) + \int_\alpha^t e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} \mu(s)\lambda(s)ds$$

(β) Η λύση του ΠΑΤ (γιά $t \geq t_0$) είναι:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \\ &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t (k_1 + k_2\|x(\tau)\|)d\tau \\ &\leq \|x_0\| + k_1(t-t_0) + k_2 \int_{t_0}^t \|x(\tau)\|)d\tau \end{aligned}$$

Από την γενίκευση της ανισότηταω Gronwall στο (α):

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + k_1(t-t_0) + k_2 \int_{t_0}^{t} \left[\|x_0\| + k_1(s-t_0)\right] e^{k_2(t-s)} ds$$

Έστω

$$I(s) = \int \left[\|x_0\| + k_1(s-t_0)\right] k_2 e^{k_2(t-s)} ds,\ U(s) := \left[\|x_0\| + k_1(s-t_0)\right],\ \frac{dV(s)}{ds} := k_2 e^{k_2(t-s)}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη:

$$I(s) = U(s)V(s) - \int U'(s)V(s)ds = -\left[\|x_0\| + k_1(s-t_0)\right] e^{k_2(t-s)} - \frac{k_1}{k_2} e^{k_2(t-s)}$$

και επομένως

$$[I(s)]_{s=t_0}^{t} = \|x_0\| \left(e^{k_2(t-t_0)} - 1\right) - k_1(t-t_0) + \frac{k_1}{k_2}\left(e^{k_2(t-t_0)} - 1\right)$$

Άρα

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + k_1(t-t_0) + [I(s)]_{s=t_0}^{t} = \|x_0\| e^{k_2(t-t_0)} + \frac{k_1}{k_2}\left(e^{k_2(t-t_0)} - 1\right)$$

Παρατηρούμε ότι το άνω φράγμα είναι πεπερασμένο για κάθε $t \geq t_0$ (και τείνει στο ∞ στο όριο $t \to \infty$). Άρα η λύση ορίζεται γιά κάθε $t \geq t_0$ και δεν εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

(γ) Η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$. Χρησιμοποιώντας την νόρμα $p = 1$,

$$\|f\|_1 = \left|-x_1 + \frac{2x_2}{1+x_2^2}\right| + \left|-x_2 + \frac{2x_1}{1+x_1^2}\right| \leq |x_1| + \frac{2|x_2|}{1+x_2^2} + |x_2| + \frac{2|x_1|}{1+x_1^2}$$

Όμως

$$\frac{2|x_i|}{1+x_i^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + x_i^2 - 2|x_i| \geq 0 \Leftrightarrow (1-|x_i|)^2 \geq 0$$

και άρα $\|f\|_1 \leq \|x\|_1 + 2$. Από το (β) η λύση είναι καλά ορισμένη και μοναδική στο $[0, \infty)$.

A5:

(α) Έστω το σύστημα: $x' = f(x)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση τοπικά Lipschitz και φραγμένη. Δείξτε ότι η λύση του συστήματος $x(t)$ υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το $\mathbb{R}$.

(β) Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \frac{g(x)}{1+\|g(x)\|^2}, \quad \text{όπου } \ \|g(x)\| = \sqrt{g^T(x)g(x)}$$

Δείξτε ότι: (i) $\|f(x)\| \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και ότι, (ii) η λύση του συστήματος $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το $\mathbb{R}$.

Λύση: (α) Δείτε απόδειξη στις σημειώσεις (δεύτερο Θεώρημα ολικής ύπαρξης). (β) Η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^n$ και (με χρήση της $p = 2$ νόρμας):

$$\|f(x)\|^2 = f^T(x)f(x) = \frac{g^T(x)g(x)}{(1+\|g(x)\|^2)^2} = \frac{\|g(x)\|^2}{(1+\|g(x)\|^2)^2} \Rightarrow \|f(x)\| = \frac{\|g(x)\|}{1+\|g(x)\|^2} \leq \frac{1}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

εφόσον
$$\frac{\|g(x)\|}{1+\|g(x)\|^2} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+\|g(x)\|^2 - 2\|g(x)\| \ge 0 \Leftrightarrow (1-\|g(x)\|)^2 \ge 0$$
Από το (α) η λύση υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το $\mathbb{R}$. (Απόδειξη επίσης με Λήμμα Gronwall).

A6: Έστω $f : X \to Y$ τοπικά Lipschitz κι $A \subseteq X$ συμπαγές. Δείξτε ότι η f είναι Lipschitz στο A.

Λύση: Εξ' ορισμού γιά κάθε $x \in A$ υπάρχει σφαίρα $B_{\delta(x)}(x)$ στην οποία η f είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $K(x)$. Εφόσον A συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο από αυτές τις σφαίρες που καλύπτει το A, ακόμα και αν η ακτίνα κάθε σφαίρας μειωθεί στο μισό, δηλ. $A \subseteq \cup_{j=1}^{n} B_{\delta_j/2}(x_j)$. Έστω $K_j = K(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, η σταθερά Lipschitz της f στη σφαίρα $B_{\delta_j}(x_j)$ και έστω:
$$L_1 = \max_{j=1,2,\dots,n} K_j \;\text{ και }\; L_2 = \frac{4\max_{z\in A}\|f(z)\|}{\min_{j=1,2,\dots,n}\delta_j}$$
Θα δείξουμε ότι η f είναι Lipschitz στο A με σταθερά Lipschitz $L = \max(L_1, L_2)$. Έστω $x, y \in A$. Το πρώτο σημείο (x) ανήκει σε κάποια σφαίρα $B_{\delta_{j_0}/2}(x_{j_0})$, $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις γιά το y. (i) $y \in B_{\delta_{j_0}}(x_{j_0})$. Τότε, $\|f(x) - f(y)\| \le K_{j_0} \le L_1$. (ii) $y \notin B_{\delta_{j_0}}(x_{j_0})$. Τότε:
$$\|x-y\| = \|x - x_{j_0} - (y - x_{j_0})\| \ge \|y - x_{j_0}\| - \|x - x_{j_0}\| \ge \delta_{j_0} - \frac{\delta_{j_0}}{2} = \frac{\delta_{j_0}}{2} \Rightarrow \frac{2\|x-y\|}{\delta_{j_0}} \ge 1$$
και
$$\|f(x)-f(y)\| \le 2\max_{z\in A}\|f(z)\| \le \frac{4\|x-y\|}{\delta_{j_0}}\max_{z\in A}\|f(z)\| \le \frac{4\|x-y\|}{\min_{j=1,2,\dots,n}\delta_{j_0}}\max_{z\in A}\|f(z)\| \le L_2\|x-y\|$$
και άρα η f είναι συνάρτηση Lipschitz στο A με σταθερά Lipschitz L.

A7: Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις $f_1 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f_2 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά Lipschitz, τότε $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$ και $f_2 \circ f_1$ είναι τοπικά Lipschitz.

Λύση: Γιά κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχουν θετικές σταθερές r, L_1 και L_2 τέτοιες ώστε
$$|f_1(x) - f_1(y)| \le L_1|x-y|, \;\; |f_2(x) - f_2(y)| \le L_2|x-y| \;\; \forall\, x, y \in B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$
Επιπλέον, για κάθε $x \in B_r(x_0)$,
$$\begin{aligned} |f_1(x)| &= |f_1(x) - f_1(x_0) + f_1(x_0)| \le |f_1(x) - f_1(x_0)| + |f_1(x_0)| \\ &\le L_1|x - x_0| + |f_1(x_0)| < L_1 r + |f_1(x_0)| := K_1 \end{aligned}$$
και παρομοίως: $|f_2(x)| < K_2$. Επομένως για την συνάρτηση $f = f_1 + f_2$:
$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f_1(x) + f_2(x) - f_1(y) - f_2(y)| \\ &\le |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)| \\ &\le L_1|x-y| + L_2|x-y| = (L_1 + L_2)|x-y| \end{aligned}$$
Αν $f = f_1 f_2$:
$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f_1(x)f_2(x) - f_1(y)f_2(y)| \\ &= |f_1(x)f_2(x) - f_1(x)f_2(y) + f_1(x)f_2(y) - f_1(y)f_2(y)| \\ &\le |f_1(x)| \cdot |f_2(x) - f_2(y)| + |f_2(y)| \cdot |f_1(x) - f_1(y)| \\ &\le (K_1 L_2 + K_2 L_1)|x-y| \end{aligned}$$

Αν $f = f_2 \circ f_1$:

$$|f(x) - f(y)| = |f_2(f_1(x)) - f_2(f_1(y))| \leq L_2|f_1(x) - f_1(y)| \leq L_2L_1|x - y|$$

A8: Έστω το ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ όπου η $f : \bar{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $L > 0$. Ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα δώστε μία διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος Picard-Lindelof (Θεώρημα 1, σελ. 12) έτσι ώστε το διάστημα $J_a = [t_0 - a, t_0 + a]$ στο οποίο έχουμε μοναδική λύση να μην εξαρτάται από την σταθερά Lipschitz L.

(i) Ορίζουμε τον διανυσματικό χώρο με νόρμα $\mathcal{X} = (C^0(J_a, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Εξετάζουμε τις δύο νόρμες: $\|x\|_C = \max_{t\in J_a} \|x(t)\|$ (sup-νόρμα) και $\|x\|_K = \max_{t\in J_a} \left(\|x(t)\|e^{-K|t-t_0|}\right)$ (νόρμα Bielecki) όπου $K > L$. Δείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες. Άρα δείξτε ότι το σύνολο $C^0(J_a, \bar{B}_b(x_0))$ (δηλ. το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : J_a \to \bar{B}_b(x_0)$), εφοδιασμένο με την νόρμα $\|\cdot\|_K$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (έστω N).

(ii) Έστω ο τελεστής $T(x) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s))ds$, $t \in J_a$. Δείξτε ότι αν $a \leq \frac{b}{M}$ όπου $M = \max_{x\in\bar{B}_b(x_0)} \|f(x)\|$, τότε $T : N \to N$. Δείξτε επίσης ότι ο T είναι τελεστής συστολής στο N.

(iii) Συμπεράνετε από το Θεώρημα Συστολής ότι αν $a \leq b/M$, ο T έχει μοναδικό σταθερό σημείο $x^* = T(x^*)$ που αντιστοιχεί στην μοναδική λύση του ΠΑΤ.

Λύση: (i) Έχουμε:

$$\|x\|_K = \max_{t\in J_a}\left(\|x(t)\|e^{-K|t-t_0|}\right) \leq \max_{t\in J_a}\|x(t)\| = \|x\|_C$$

Αντίστροφα, αφού $t \in J_a \Rightarrow e^{-K|t-t_0|} \geq e^{-Ka}$:

$$\|x(t)\|e^{-K|t-t_0|} \geq \|x(t)\|e^{-Ka} \Rightarrow \max_{t\in J_a}\left(\|x(t)\|e^{-K|t-t_0|}\right) \geq \max_{t\in J_a}\|x(t)\| \cdot e^{-Ka}$$

και επομένως:

$$\|x\|_K \geq e^{-Ka}\|x\|_C$$

Άρα

$$e^{-Ka}\|x\|_C \leq \|x\|_K \leq \|x\|_C \Rightarrow \|\cdot\|_C \sim \|\cdot\|_K$$

και επομένως το σύνολο N ως κλειστό υποσύνολο του χώρου Banach $\mathcal{X}$ είναι πλήρες.

(ii) Αν $x \in C^0(J_a, \bar{B}_b(x_0))$ και $t \in J_a$:

$$\|T(x)(t) - x_0\| \leq \left|\int_{t_0}^t \|f(x(s))\|ds\right| \leq M|t - t_0| \leq Ma$$

Επομένως:

$$\|T(x)(t) - x_0\|e^{-K|t-t_0|} \leq Mae^{-K|t-t_0|} \Rightarrow \max_{t\in J_a}\left(\|T(x)(t) - x_0\|e^{-K|t-t_0|}\right) \leq Ma \cdot \max_{t\in J_a} e^{-K|t-t_0|} = Ma$$

και άρα $\|T(x) - x_0\|_K = Ma \leq b$ αν $a \leq \frac{b}{M}$. Άρα αν $a \leq \frac{b}{M}$, $T : N \to N$.

Αν $x, y \in N$ και $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
\|T(x)(t) - T(y)(t)\| &\leq L\int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\|ds = L\int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\|e^{-K(s-t_0)} \cdot e^{K(s-t_0)}ds \\
&\leq L\max_{t\in J_a}\left(\|x(t) - y(t)\|e^{-K(t-t_0)}\right)\int_{t_0}^t e^{K(s-t_0)}ds \leq L\|x - y\|_K\left[\frac{e^{K(s-t_0)}}{K}\right]_{s=t_0}^t \\
&= \frac{L}{K}\|x - y\|_K\left[e^{K(t-t_0)} - 1\right] \leq \frac{L}{K}\|x - y\|_K e^{K(t-t_0)} \\
&= \frac{L}{K}\|x - y\|_K e^{K|t-t_0|} = \rho\|x - y\|_K e^{K|t-t_0|}, \quad \rho := \frac{L}{K} < 1
\end{aligned}$$

Παρόμοια αν $t < t_0$:

$$\begin{aligned}
\|T(x)(t) - T(y)(t)\| &\leq -L\int_{t_0}^{t}\|x(s)-y(s)\|ds = -L\int_{t_0}^{t}\|x(s)-y(s)\|e^{K(s-t_0)}\cdot e^{-K(s-t_0)}ds \\
&\leq -L\max_{t\in J_a}\left(\|x(t)-y(t)\|e^{K|t-t_0|}\right)\int_{t_0}^{t}e^{-K(s-t_0)}ds \leq -L\|x-y\|_K\left[\frac{e^{-K(s-t_0)}}{-K}\right]_{s=t_0}^{t} \\
&= \frac{L}{K}\|x-y\|_K\left[e^{-K(t-t_0)}-1\right] \leq \frac{L}{K}\|x-y\|_K e^{-K(t-t_0)} \\
&= \frac{L}{K}\|x-y\|_K e^{K|t-t_0|} = \rho\|x-y\|_K e^{K|t-t_0|}
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $t \in J_a$:

$$\|T(x)(t)-T(y)(t)\|e^{-K|t-t_0|} \leq \rho\|x-y\|_K \Rightarrow \max_{t\in J_a}\left(\|T(x)(t)-T(y)(t)\|e^{-K|t-t_0|}\right) \leq \rho\|x-y\|_K$$

και επομένως: $\|T(x)-T(y)\|_K \leq \rho\|x-y\|_K$ όπου $\rho < 1$. Άρα $T : N \to N$ είναι συνάρτηση συστολής.

(iii) Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Συστολής.