Θεωρία Ελέγχου: Ασκήσεις Ελεγξιμότητα-Παρατηρησιμότητα

Α. Προκαταρκτικά

Α1: (α) Έστω $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \succeq 0$,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix}$$

και έστω ότι $Q_{11} \succ 0$. Δείξτε ότι $\hat{Q} = Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} \succeq 0$ ($\succ 0$ αν $Q \succ 0$). (Ο πίνακας $\hat{Q}$ ονομάζεται το συμπλήρωμα Schur του Q_{11}).

(β) Έστω η τετραγωνική μορφή:

$$J(u,z) = \begin{bmatrix} u^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}$$

όπου

$$Q = Q^T = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \succeq 0, \;\; Q_{11} \succ 0$$

Ορίζουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης: $V(z) = \min_u J(u,z)$. Δείξτε ότι $V(z) = u^T P u$ όπου $P = P^T \succeq 0$ και εκφράστε τον πίνακα P σαν συνάρτηση των Q_{ij}.

Λύση: (α) Έστω $Q_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ και

$$X_a = \begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας X θα επιλεγεί στην συνέχεια. Τότε

$$\begin{aligned} X_a' Q X_a &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ X' & I_{n-n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n-n_1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{11}X + Q_{12} \\ Q_{12}^T + X^T Q_{11} & X^T Q_{11} X + X^T Q_{12} + Q_{12}^T X + Q_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $X = -Q_{11}^{-1} Q_{12}$:

$$X_a^T Q X_a = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} \end{bmatrix}$$

και εφόσον $Q = Q^T \succeq 0 \Leftrightarrow X_a^T Q X_a \succeq 0$ έχουμε ότι $Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} \succeq 0$ ($\succ 0$ αν $Q \succ 0$).

(β) Έχουμε:

$$J(u,z) = u^T Q_{11} u + 2u^T Q_{12} z + z^T Q_{22} z, \;\; Q_{11} = Q_{11}^T \succ 0$$

Η συνάρτηση J ελαχιστοποιείται ως προς u αν

$$\frac{\partial J(u,z)}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2Q_{11}u + 2Q_{12}z = 0 \Rightarrow u = u^* = -Q_{11}Q_{12}z$$

Επομένως:

$$V(z) := \min_u J(u,z) = J(u^*, z) = z^T Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} z - 2z^T Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} z + z^T Q_{22} z$$

Ισοδύναμα

$$V(z) = J(u^*, z) = z^T P z, \;\; P = Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12}$$

Εφόσον $Q = Q^T \succeq 0$ έχουμε ότι $J(u,z) \geq 0$ γιά κάθε u και z και άρα $J(u^*,z) = z^T P z \geq 0$ που συνεπάγεται ότι $P = P^T \succeq 0$. (που προκύπτει επίσης και από το (α) μέρος).

A2: Έστω $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι:

$$\max_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_{\max}(A), \;\; \min_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_{\min}(A)$$

όπου $\lambda_{\max}(A)$ και $\lambda_{\min}(A)$ είναι η μεγαλύτερη και μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα A, αντίστοιχα, και $\|x\| = \sqrt{x^T x}$. Ποιά x μεγιστοποιούν/ελαχιστοποιούν τις παραπάνω συναρτήσεις;

Λύση: Γράφουμε $A = A^T = U\Lambda U^T$ όπου $UU^T = U^T U = I_n$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq \lambda_j$ αν $i < j$. Τότε

$$\max_{\|x\|=1} x^T A x = \max_{\|x\|=1} (U^T x)^T \Lambda (U^T x) = \max_{\|y\|=1} y^T A y = \max \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 : \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 \right\} = \lambda_1(A)$$

Η τετραγωνική μορφή $x^T A x$ μεγιστοποιείται αν επιλέξουμε ως x οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα (Ευκλείδιας νόρμας 1) που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή (λ_1). Παρόμοια για την ελαχιστοποίηση της τετραγωνικής μορφής.

A3: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Έστω $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Δείξτε ότι $\mathcal{R}(M)$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $AM = MX$ για κάποιον πίνακα $X \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Δείξτε επιπλέον ότι αν $\mathrm{Rank}(M) = k$, τότε κάθε ιδιοτιμή του X είναι ιδιοτιμή του A και ότι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ανήκει στον $\mathcal{R}(M)$.

(β) Έστω σύστημα $\Sigma_i(A,B)$ και $\Gamma_c = [B \;\; AB \;\; \ldots \;\; A^{n-1}]$ ο αντίστοιχος πίνακας ελεγξιμότητας. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{R}(\Gamma_c)$ είναι A-αναλλοίωτος (σημειώσεις). Βρείτε πίνακα X τέτοιον ώστε $A\Gamma_c = \Gamma_c X$.

(γ) Δείξτε ότι $\mathcal{N}_r(N)$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος αν και μόνο αν $\mathcal{R}(N^T)$ είναι A^T-αναλλοίωτος. Άρα βρείτε συνθήκη ώστε ο υπόχωρος $\mathcal{N}_r(N)$ να είναι A αναλλοίωτος.

(δ) Έστω σύστημα $\Sigma_o(A,C)$ και $\Gamma_o = [C^T \;\; A^T C^T \;\; \ldots \;\; (A^T)^{n-1} C^T]^T$ ο αντίστοιχος πίνακας παρατηρησιμότητας. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$ είναι A-αναλλοίωτος (σημειώσεις). Βρείτε πίνακα Y τέτοιον ώστε να ισχύει η συνθήκη στο (γ).

Λύση: (α) Έστω ότι υπάρχει $X \in \mathbb{R}^{k\times k}$ τ.ω. $AM = MX$. Αν $x \in \mathcal{R}(M)$, τότε $x = My$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}^k$. Επομένως, $Ax = AMy = MXy = M(Xy)$ και $Ax \in \mathcal{R}(M)$. Άρα $\mathcal{R}(M)$ είναι A-αναλλοίωτος. Αντίστροφα, έστω ότι $\mathcal{R}(M)$ είναι A-αναλλοίωτος. Έστω $M = [t_1 \; t_2 \; \ldots \; t_k]$. Τότε $At_i = t_i x_{1i} + t_2 x_{2i} + \ldots t_k x_{ki}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Ισοδύναμα:

$$A \left[\begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \ldots & x_{kk} \end{bmatrix}$$

η $AM = MX$.

Αν $\mathrm{Rank}(M) = k$, τότε $k \leq n$ και $\{t_i\}_{i=1}^k$ είναι βάση του $\mathcal{R}(M)$. Αν $Xu = \lambda u$, $u \neq 0$, τότε $Mu \neq 0$ και $A(Mu) = (AM)u = MXu = \lambda(Mu)$ και επομένως $\lambda \in \sigma(A)$. Προφανώς $Mu \in \mathcal{R}(M)$.

(β) Οι πρώτες $n-1$ block στήλες του πίνακα X είναι:

$$A\left[\begin{array}{cccc} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & K_0 \\ I_m & 0 & 0 & K_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & I_m & K_{n-1} \end{array}\right]$$

Οι πίνακες στην τελευταία στήλη προκύπτουν από το Θεώρημα Caulay-Hamilton. Εφόσον

$$A^nB = (-a_0I - a_1A - \ldots - a_{n-1}A^{n-1})B = BK_0 + ABK_1 + \ldots + A^{n-1}BK_{n-1}$$

έχουμε $K_i = -a_iI_m$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ και επομένως

$$X = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -a_0I_m \\ I_m & 0 & 0 & -a_1I_m \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & I_m & -a_{n-1}I_m \end{array}\right]$$

(γ) Πρώτα δείχνουμε ότι $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνο αν $\mathcal{V}^\perp$ είναι A^T-αναλλοίωτος. Έστω ότι $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος και έστω $v \in \mathcal{V}$, $z \in \mathcal{V}^\perp$. Τότε $Av \in \mathcal{V}$ και $(A^Tz)^Tv = z^T(Av) = 0$. Άρα $A^Tz \in \mathcal{V}^\perp$ και άρα $\mathcal{V}^\perp$ είναι A^T αναλλοίωτος. Αντίστροφα, έστω ότι $\mathcal{V}^\perp$ είναι A^T αναλλοίωτος και έστω $v \in \mathcal{V}$, $z \in \mathcal{V}^\perp$. Τότε $A^Tz \in \mathcal{V}^\perp$ και $(A^Tz)^Tv = 0 \Rightarrow z^T(Av) = 0$. Αρα $Av \in (\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$ και $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος.

Εφόσον $\mathcal{N}_r(N)^\perp = \mathcal{R}(N^T)$, $\mathcal{N}_r(N)$ είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνο αν $\mathcal{R}(N^T)$ είναι A^T αναλλοίωτος, ισοδύναμα αν υπάρχει πίνακας X τέτοιος ώστε: $A^TN^T = N^TX^T \Leftrightarrow NA = XN$. Άρα $\mathcal{N}_r(N)$ είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας X τέτοιος ώστε $NA = XN$.

(δ) Εδώ η συνθήκη είναι $\Gamma_oA = Y\Gamma_o$ και επομένως:

$$\left[\begin{array}{c} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ K_0 & K_1 & \ldots & K_{n-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array}\right]$$

Από το Θεώρημα Cauley-Hamilton:

$$C(-a_0I_n - a_1A - \ldots - a_{n-1}A^{n-1}) = K_0C + K_1AC + \ldots + K_{n-1}CA^{n-1}$$

και επομένως $K_i = -a_iI_p$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, η

$$Y = \left[\begin{array}{cccc} 0 & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ -a_0I_p & -a_1I_p & \ldots & -a_{n-1}I_p \end{array}\right]$$

A4: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Av = (\sigma + i\omega)v$, $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$. (α) Δείξτε ότι $< \mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v) >$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. (β) Αν $M = [\mathrm{Re}(v) \mid \mathrm{Im}(v)]$, βρείτε $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τέτοιον ώστε $AM = MX$.

Λύση: (α) Έστω $Av = (\sigma + i\omega)v$, $v = x + iy$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Τότε:

$$A(x + iy) = (\sigma + i\omega)(x + iy) \Rightarrow Ax = \sigma x - \omega y,\ Ay = \sigma y + \omega x$$

Ισοδύναμα:

$$A\left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{array}\right]$$

Έστω

$$z \in <x,y> \Rightarrow z=\left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right], \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Τότε

$$Az=A\left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \alpha\sigma+\beta\omega \\ \beta\sigma-\alpha\omega \end{array}\right]\in <x,y>$$

(β) Από το (α), $AM=MX$ όπου

$$M=\left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right],\ X=\left[\begin{array}{cc} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{array}\right]$$

A5: Δείξτε ότι $\{v_i\}_{i=1}^m$, $v_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\ldots,m$, $m\le n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν ο πίνακας Gramian: $G=[v_i^Tv_j]_{i,j=1,2,\ldots,m}$ είναι θετικά ορισμένος.

Λύση: Έστω

$$V=\left[\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_m \end{array}\right]\in\mathbb{R}^{n\times m},\ \ G=V^TV$$

Αν $(v_i)_{i=1}^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: $x^TGx=\|Vx\|^2=0\Rightarrow Vx=0\Rightarrow x=0\Rightarrow G=G^T\succ 0$. Αντίστροφα: Αν $G=G^T\succ 0$, τότε $x^TGx=0$ μόνο αν $x=0$ και άρα $\|Vx\|=0$ μόνο αν $x=0$. Ισοδύναμα $Vx=0$ μόνο αν $x=0$ και επομένως $(v_i)_{i=1}^m$ γραμμικά ανεξάρτητα.

B. Ελεγξιμότητα/Παρατηρησιμότητα

B1: Έστω σύστημα $\Sigma(A,B,C)$:

$$x'(t)=\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]x(t)+\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]u(t),\quad y(t)=\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]x(t)$$

(α) Είναι το σύστημα πλήρως ελέγξιμο; Να βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος.

(β) Είναι το σύστημα πλήρως παρατηρήσιμο; Να βρεθεί ο μη-παρατηρήσιμος υπόχωρος.

(γ) Εαν το σύστημα δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο να βρεθεί μετασχηματισμός ισοδυναμίας $Q: z=Q^{-1}x$ ώστε

$$z'(t)=\left[\begin{array}{c} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} z_1(t) \\ z_2(t) \end{array}\right]+\left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{array}\right]u(t),\quad y(t)=\left[\begin{array}{cc} \hat{C}_1 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array}\right]$$

όπου $\Sigma(\hat{A}_{11},\hat{B}_1,\hat{C}_1)$ πλήρως παρατηρήσιμο και σε κανονική μορφή παρατηρησιμότητας:

$$\hat{A}_{11}=\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{array}\right],\ \ \hat{B}_1=\left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{array}\right],\ \ \hat{C}_1=\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

Λύση: (α) Ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

και εφόσον $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = 2 < 4$ το σύστημα $\Sigma_i(A, b)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

(β) Έχουμε:

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{N}(\Gamma_o) = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2, x_3 = x_4\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Ορίζουμε πίνακα μετασχηματισμού:

$$Q_0 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow Q_0^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

στον οποίο οι δύο τελευταιές στήλες είναι βάση του $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ και οι δύο πρώτες συμπληρώνουν την βάση του $\mathbb{R}^4$. Ορίζουμε:

$$Q_0^{-1}AQ_0 = \hat{A} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q_{01} & Q_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} Q_{01} & Q_{02} \end{bmatrix}$$

και

$$CQ_0 = \hat{C} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right],\ Q_0^{-1}B = \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \hat{A}_{11} & 0 & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc||c} 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Στην συνέχεια ορίζουμε νέο μετασχηματισμό:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} Q_1^{-1}\hat{A}_{11}Q_1 & 0 & 0 \\ \hat{A}_{21}Q_1 & \hat{A}_{22} & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1Q_1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

όπου

$$Q_1^{-1}\hat{A}_{11}Q_1 = \tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},\ \hat{C}_1 = \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ Q_1^{-1}\hat{B}_1 = \tilde{B}_1$$

(ο πίνακας $\tilde{A}_{11}$ είναι σε μορφή companion και προκύπτει από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(sI - \tilde{A}_{11}) = s^2+3$). Έχουμε:

$$\hat{A}_{11}Q_1 = Q_1\tilde{A}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = Q_1^{-1}$$

και επομένως

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} Q_1^{-1}\hat{A}_{11}Q_1 & Q_1^{-1}0 & Q_1^{-1}0 \\ \hat{A}_{21}Q_1 & \hat{A}_{22} & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1Q_1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc||c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ο συνολικός μετασχηματισμός είναι:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B2: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $b \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν περισσότερα από ένα γραμμικά ανεξάρτητα αριστερά ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή, τότε το σύστημα $\Sigma_i(A,b)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο (ισοδύναμα, αν για ένα σύστημα μίας εισόδου ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή με γεωμετρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη του ένα, τότε το σύστημα δεν είναι πλήρως ελέγξιμο). Υπόδειξη: Έστω v_1^T και v_2^T δύο γραμμικά ανεξάρτητα αριστερά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ. Παρατηρήστε ότι αν $v_1^Tb = \alpha_1$ και $v_2^Tb = \alpha_2$, τότε $(\alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2)^T b = 0$.

Λύση: Έστω ότι $v_i^TA = \lambda v_i^T$, $v_i \neq 0$, $i = 1,2$, (v_1^T, v_2^T) γραμμικά ανεξάρτητα και υποθέτουμε γιά αντίφαση ότι (A,b) πλήρως ελέγξιμο. Τότε $\alpha_1 := v_1^Tb \neq 0$ και $\alpha_2 := v_2^Tb \neq 0$ (λόγω πλήρους ελεγξιμότητας). Ορίζουμε $v^T = \alpha_1^{-1}v_1^T - \alpha_2^{-1}v_2^T$. Τότε $v^T \neq 0$ (λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των (v_1,v_2)), $v^TA = \lambda v^T$ και $v^Tb = (\alpha_1^{-1}v_1^T - \alpha_2^{-1}v_2^T)b = 0$ και άρα (A,b) δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

B3: (α) Δείξτε ότι $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A+\alpha I, B)$ πλήρως ελέγξιμο, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. (β) Δείξτε ότι $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A, BB^T)$ πλήρως ελέγξιμο. (γ) Δείξτε ότι $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A+BF, BG)$ πλήρως ελέγξιμο, όπου $\det G \neq 0$.

Λύση: (α) $\mathrm{Rank}([sI_n - A\,|B]) = n$ γιά κάθε $s \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $\mathrm{Rank}([(s-\alpha)I_n - A\,|B]) = n$ γιά κάθε $s \in \mathbb{C}$. (β) $\Sigma_i(A,B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\exists \xi \neq 0$: $\xi^T[sI - A|B] = 0$ για κάποιο $s \in \mathbb{C}$, αν και μόνο αν $\exists \xi \neq 0$: $\xi^T[sI - A|BB^T] = 0$ για καποιο $s \in \mathbb{C}$, αν και μόνο αν $\Sigma_i(A, BB^T)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. (γ) Αν $\det G \neq 0$,

$$\mathrm{Rank}\left(\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Rank}\left(\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -F & G \end{bmatrix}\right)$$

γιά κάθε $s \in \mathbb{C}$.

B4: Θεωρούμε το σύστημα: $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$$

και όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το χωρίο του επιπέδου (με άξονες τις παραμέτρους a και b) όπου το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο.

Λύση: Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix},\ \Gamma_c = [b \mid Ab] = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & ab-1 \end{bmatrix}$$

Άρα το σύστημα δεν είναι πλήρως ελεγξιμο αν και μόνο αν

$$\det(\Gamma_c) = 0 \Rightarrow ab - 1 - b^2 = 0 \Rightarrow a = b + \frac{1}{b}\ \ (b \neq 0)$$

που αντιστοιχεί σε υπερβολή στο επίπεδο (b, a) με ασύμπτωτες $b = 0$ και $a = b$.

B5: Έστω $\Sigma_i(A, b)$ όπου $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ και $b \in \mathbb{R}^3$. Έστω $\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και $d = 2$ η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = \lambda_0$. Δείξτε με εφαρμογή κριτηρίου ελεγξιμότητας ότι $\Sigma_i(A, b)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

Λύση: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$[\lambda_0 I_3 - A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

που έχει rank το πολύ 2. Άρα $\Sigma_i(A, b)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

B6: Έστω συστήματα $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ και $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ με διανύσματα κατάστασης x_1 και x_2, αντίστοιχα, και συναρτήσεις εξόδου y_1 και y_2, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις εισόδου των Σ_1 και Σ_2 είναι $u_1 - y_2$ και $u_2 - y_1$, αντίστοιχα.

(α) Βρείτε τις εξισώσεις του συστήματος με διάνυσμα κατάστασης: $[x_1^T\ x_2^T]^T$, διάνυσμα εισόδου: $[u_1^T\ u_2^T]^T$ και διάνυσμα εξόδου: $[y_1^T\ y_2^T]^T$.

(β) Αποδείξτε την παρακάτω πρόταση η δώστε αντιπαράδειγμα: ¨Το σύστημα ανάδρασης στο (α) είναι πλήρως παρατηρήσιμο (πλήρως ελέγξιμο) αν και μόνο αν κάθε ένα απο τα συστήματα $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ και $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο (πλήρως ελεγξιμο)¨.

(γ) Έστω ότι $u_2 \equiv 0$ (δηλ. απαλείψτε το u_2 ως συνάρτηση εισόδου από το σύστημα) και επαναλάβετε την ανάλυση σας στο μέρος (β).

Λύση: (α) Οι εξισώσεις κατάστασης είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ -B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(β) Και τα δύο σκέλη της πρότασης είναι σωστά. Γράφουμε:

$$\begin{bmatrix} sI - A_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & sI - A_2 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & I & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A_1 & 0 \\ 0 & sI - A_2 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

που είναι της μορφής $P_1(s) = RP_2(s)$. Εφόσον ο πίνακας R είναι μη-ιδιάζων, ο πίνακας $P_1(s)$ έχει πλήρες Rank γιά κάθε $s \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν ο πίνακας $P_2(s)$ έχει πλήρες Rank γιά κάθε $s \in \mathbb{C}$. Επομένως το σύστημα ανάδρασης είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν τα δύο επιμέρους συστήματα είναι πλήρως παρατηρήσιμα. Επίσης γράφουμε:

$$\begin{bmatrix} sI - A_1 & B_1C_2 & B_1 & 0 \\ B_2C_1 & sI - A_2 & 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & sI - A_2 & 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & I & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

που είναι της μορφής $P_1(s) = P_2(s)R$. Εφόσον ο πίνακας R είναι μη-ιδιάζων, ο πίνακας $P_1(s)$ έχει πλήρες Rank γιά κάθε $s \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν ο πίνακας $P_2(s)$ έχει πλήρες Rank γιά κάθε $s \in \mathbb{C}$. Επομένως το σύστημα ανάδρασης είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν τα δύο επιμέρους συστήματα είναι πλήρως ελέγξιμα.

(γ) Όταν $u_2 \equiv 0$, οι εξισώσεις κατάστασης γράφονται:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ -B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Η απόδειξη της ισοδυναμίας πλήρους παρατηρησιμότητας του συστήματος ανάδρασης με την πλήρη παρατηρησιμότητα του κάθε επιμέρους συστήματος εξακολουθεί να ισχύει. Η πλήρης ελεγξιμότητα κάθε επιμέρους συστήματος είναι αναγκαία συνθήκη για την πλήρη ελεγξιμότητα του συστήματος ανάδρασης αλλά δεν είναι ικανή. Γιά παράδειγμα, επιλέγουμε: $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = C_2 = 1$, $C_1 = 0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1$$

στο οποίο η μεταβλητή κατάστασης x_2 είναι μή-ελέγξιμη.

B7 (α) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Τότε $\Phi(t) = e^{At}$ είναι η μοναδική λύση του ΠΑΤ:

$$\Phi^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\Phi^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1\Phi'(t) + \alpha_0\Phi(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες: $\Phi(0) = I_n$, $\Phi'(0) = A$, $\Phi''(0) = A^2$, …, $\Phi^{(n-1)}(0) = A^{n-1}$.

(β) Έστω πίνακας A όπως στο μέρος (α). Τότε:

$$\Phi(t) = e^{At} = \beta_1(t)I_n + \beta_2(t)A + \ldots + \beta_n(t)A^{n-1}$$

όπου $\beta_k(t)$, $1 \le k \le n$ είναι οι λύσεις των n ΠΑΤ:

$$\beta^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\beta^{(n-1)}(t) + \alpha_1\beta'(t) + \alpha_0\beta(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες:

$$\left.\begin{matrix} \beta_1(0) = 1 \\ \beta_1'(0) = 0 \\ \vdots \\ \beta_1^{(n-1)}(0) = 0 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} \beta_2(0) = 0 \\ \beta_2'(0) = 1 \\ \vdots \\ \beta_2^{(n-1)}(0) = 0 \end{matrix}\right\} \qquad \cdots \qquad \left.\begin{matrix} \beta_n(0) = 0 \\ \beta_n'(0) = 0 \\ \vdots \\ \beta_n^{(n-1)}(0) = 1 \end{matrix}\right\}$$

αντίστοιχα.

Λύση: (α) Έστω $\Phi_1(t)$ και $\Phi_2(t)$ δύο λύσεις του ΠΑΤ. Τότε $\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ είναι λύση του ΠΑΤ που ορίζεται από το διαφορικό σύστημα και τις αρχικές συνθήκες: $\Phi(0) = \Phi'(0) = \ldots = \Phi^{(n-1)}(0) = 0$. Από το μονοσήμαντο της λύσης: $\Phi(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ και άρα $\Phi_1(t) = \Phi_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Αν $\Phi(t) = e^{At}$ τότε $\Phi'(t) = Ae^{At}, \ldots, \Phi^{(n-1)}(t) = A^{n-1}e^{At}$ και επομένως:

$$\Phi^{(n)} + a_{n-1}\Phi^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\Phi'(t) + a_0\Phi(t) = (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n)e^{At} = p(A)e^{At} = 0$$

χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cauley-Hamilton. Άρα e^{At} η μοναδική λύση του ΠΑΤ.

(β) Ορίζουμε:

$$\Phi(t) = \beta_0(t)I_n + \beta_1(t)A) + \ldots + \beta_{n-1}(t)A^{n-1}$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
&\Phi^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\Phi^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1\Phi'(t) + \alpha_0\Phi(t) \\
&\quad = \beta_0^{(n)}(t)I_n + \beta_1^{(n)}(t)A + \ldots + \beta_{n-1}^{(n)}(t)A^{n-1} + \\
&\quad + a_{n-1}(\beta_0^{(n-1)}(t)I_n + \beta_1^{(n-1)}(t)A + \ldots + \beta_{n-1}^{(n-1)}(t)A^{n-1}) + \ldots + \\
&\quad + a_1(\beta_0'(t)I_n + \beta_1'(t)A + \ldots + \beta_{n-1}'(t)A^{n-1}) \\
&\quad + a_0(\beta_0(t)I_n + \beta_1(t)A + \ldots + \beta_{n-1}(t)A^{n-1})
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
&\Phi^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\Phi^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1\Phi'(t) + \alpha_0\Phi(t) \\
&\quad = (\beta_0^{(n)}(t) + a_{n-1}\beta_0^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\beta_0'(t) + a_0\beta_0(t))I_n \\
&\quad + (\beta_1^{(n)}(t) + a_{n-1}\beta_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\beta_1'(t) + a_0\beta_1(t))A + \ldots + \\
&\quad + (\beta_{n-1}^{(n)}(t) + a_{n-1}\beta_{n-1}^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\beta_{n-1}'(t) + a_0\beta_{n-1}(t))A^{n-1} \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\Phi(0) &= \beta_0(0)I_n + \beta_1(0)A + \ldots + \beta_{n-1}(0)A^{n-1} = I_n \\
\Phi'(0) &= \beta_0'(0)I_n + \beta_1'(0)A + \ldots + \beta_{n-1}'(0)A^{n-1} = A \\
&\vdots \\
\Phi^{(n-1)}(0) &= \beta_0^{(n-1)}(0)I_n + \beta_1^{(n-1)}(0)A + \ldots + \beta_{n-1}^{(n-1)}(0)A^{n-1} = A^{n-1}
\end{aligned}$$

Άρα $\Phi(t)$ είναι λύση του ΠΑΤ που ορίζεται στο (α). Από το μονοσήμαντο της λύσης του ΠΑΤ στο (α):

$$\Phi(t) = e^{At} = \beta_1(t)I_n + \beta_2(t)A + \ldots + \beta_n(t)A^{n-1}$$

γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$.

B8: Έστω σύστημα $\Sigma_i(A, b)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x(0) = x_0 = 0$. Έστω ότι $u(t + \frac{1}{2}) = u(t)$, $t \geq 0$. Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε την συνάρτηση $u(t)$ έτσι ώστε $x(1) = x_1$ αν και μόνο αν υπάρχει $\eta \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε: $(e^{A/2} + I)\Gamma_c\eta = x_1$, $\Gamma_c = [b\ Ab\ \ldots\ A^{n-1}b]$.

Λύση: Αν υπάρχει τέτοια περιοδική συνάρτηση $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, τότε

$$x_1 = x(1) = \int_0^1 e^{A(1-\tau)}bu(\tau)d\tau = e^A\left[\int_0^{1/2} e^{-A\tau}bu(\tau)d\tau + \int_{1/2}^1 e^{-A\tau}bu(\tau)d\tau\right]$$

Με αλλαγή μεταβλητών $\xi = \tau - \frac{1}{2}$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$x_1 = e^A \left[\int_0^{1/2} e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau + e^{-A/2} \int_0^{1/2} e^{-A\xi} bu(\xi) d\xi \right] = (e^{A/2} + I) \int_0^{1/2} e^{A(\frac{1}{2}-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

Ισοδύναμα,

$$x_1 = (e^{A/2} + I) \int_0^{1/2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k bu(\tau) d\tau = (e^{A/2} + I) \sum_{k=0}^{n-1} A^k b \int_0^{1/2} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau$$

η

$$x_1 =:= (e^{A/2} + I) \sum_{k=0}^{n-1} A^k b \eta_k = (e^{A/2} + I) \Gamma_c \eta$$

και παρόμοια το αντίστροφο.

B9: Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη και $f'(y) \geq \epsilon > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\det[b \; Ab \; \ldots \; A^{n-1}b] \neq 0$ και $t_1 > 0$, τότε η εξίσωση

$$\int_0^{t_1} e^{-At} b f(b^T e^{-A^T t} p) dt = x$$

έχει μοναδική λύση p για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Λύση: Εφόσον $\Sigma_i(A, b)$ είναι πλήρως ελέγξιμο, έχουμε

$$W(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} bb^T e^{-A^T t} dt = W^T(0, t_1) \succ 0$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση:

$$f(b^T e^{-A^T t} p) = b^T e^{-A^T t} W^{-1}(0, t_1) x$$

έχει μοναδική λύση p για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Εφόσον $f'(y) \geq \epsilon > 0$ γιά κάθε $y \in \mathbb{R}$ η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι καλά ορισμένη (και γνησίως αύξουσα). Άρα

$$f(b^T e^{-A^T t} p) = b^T e^{-A^T t} W^{-1}(0, t_1) x \Rightarrow b^T e^{-A^T t} p = f^{-1} \left(b^T e^{-A^T t} W^{-1}(0, t_1) x \right)$$

και συνεπώς

$$\left(\int_0^{t_1} e^{-At} bb^T e^{-A^T t} dt \right) p = \int_0^{t_1} e^{-At} b f^{-1} \left(b^T e^{-A^T t} W^{-1}(0, t_1) x \right) dt$$

που συνεπάγεται ότι:

$$p = W^{-1}(0, t_1) \int_0^{t_1} e^{-At} b f^{-1} \left(b^T e^{-A^T t} W^{-1}(0, t_1) x \right) dt$$

B10: Δείξτε ότι:

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & BB^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^{At} & e^{At} W(0,t) \\ 0 & e^{-A^T t} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } W(0,t) = \int_0^t e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T \tau} d\tau$$

ο πίνακας Gramian ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(A, b)$.

Λύση: Έστω
$$\Phi = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix}$$
Ο πίνακας $e^{\Phi t}$ είναι η (μοναδική) λύση του ΠΑΤ: $X' = \Phi X$, $X(0) = I$. Ισοδύναμα
$$\begin{bmatrix} X'_{11} & X'_{12} \\ X'_{21} & X'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{11} & X'_{12} \\ X'_{21} & X'_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_{11}(0) & X_{12}(0) \\ X_{21}(0) & X_{22}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$
Επομένως:
$$\begin{aligned} X'_{22}(t) &= -A^T X_{22},\ X_{22}(0) = I_n \ \Rightarrow \ X_{22}(t) = e^{-A^T t} \\ X'_{21}(t) &= -A^T X_{21},\ X_{21}(0) = 0 \ \Rightarrow \ X_{21}(t) = 0 \\ X'_{11}(t) &= AX_{11} + BB^T X_{21}(t) = AX_{11},\ X_{11}(0) = I_n \Rightarrow \ X_{11}(t) = e^{At} \end{aligned}$$
και
$$X'_{12}(t) = AX_{12} + BB^T e^{-A^T t},\ X_{12}(0) = 0 \Rightarrow \ X_{12}(t) = e^{AT} X_{12}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BB^T e^{-A^T \tau} d\tau$$
η
$$X_{12}(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T \tau} d\tau = e^{At} W(0,t)$$
Επομένως
$$e^{\Phi t} = \begin{bmatrix} e^{At} & e^{At} W(0,t) \\ 0 & e^{-A^T t} \end{bmatrix}$$

B11: Έστω το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ και έστω ότι η έξοδος του συστήματος είναι μετρήσιμη τις χρονικές στιγμές $t = nT$, $n \in \mathbb{N}_0$. Κάτω από ποιές συνθήκες ένας ικανός αριθμός μετρήσεων αρκεί για να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα την αρχική κατάσταση $x(0)$;

Λύση: Η έξοδος του συστήματος $\Sigma_o(A, C)$: $x' = Ax$, $y = Cx$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, είναι $y = Ce^{At} x_0$. Επομένως:
$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(T) \\ y(2T) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \end{bmatrix} x_0, \quad \Phi = e^{AT}$$
Απο το Θεώρημα Cauley-Hamilton το rank του πίνακα δεξιά δεν αυξάνεται μετά το block $C\Phi^{n-1}$. Επομένως έχουμε:
$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(T) \\ \vdots \\ y((n-1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} x_0 =: \Gamma_o x_0, \quad \Phi = e^{AT}$$
Η αρχική κατάσταση x_0 προσδιορόζεται μονοσημαντα αν και μόνο αν $\mathrm{rank}(\Gamma_o) = n$, οπότε
$$x_0 = (\Gamma_o^T \Gamma_o)^{-1} \Gamma_o^T \begin{bmatrix} y(0) \\ y(T) \\ \vdots \\ y((n-1)T) \end{bmatrix}$$

B12: Η ($C^2(\mathbb{R})$) συνάρτηση $x(t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $x''(t) + x(t) = 0$ και οι τιμές της είναι γνωστές για $t = k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$. Μπορούμε να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα τις τιμές $x(0)$ και $x'(0)$ από αυτή την πληροφορία;

Λύση: Εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης. Η λύση του ΠΑΤ είναι: $x(t) = x(0)\cos t + x'(0)\sin t$. Επομένως $x'(t) = -x(0)\sin t + x'(0)\cos t$ και

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(0) \\ x(0) \end{bmatrix}$$

Το μοντέλο καταστάσεων χώρου γράφεται:

$$z' = \begin{bmatrix} x''(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = Az = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix},\ y = Cz = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$Ce^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(0) \\ x(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ -x(0) \end{bmatrix}$$

και επόμένως $x'(0)$ δεν μπορεί να προσδιορισθεί από (αυθαίρετο αριθμό) περιοδικών μετρήσεων της εξόδου.

B13: Έστω ότι $\Sigma_i(A, b)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ είναι πλήρως ελέγξιμο και $c_1^T(sI_n - A)^{-1}b = c_2^T(sI_n - A)^{-1}b$, $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $c_2 \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $c_1 = c_2$.

Λύση: Έστω $\xi^T = (c_1 - c_2)^T$. Τότε $\xi^T(sI_n - A)^{-1}b = 0 \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\xi^T(sI_n - A)^{-1}b) = \xi^T e^{At}b = 0$. Θέτοντας $t = 0$ έχουμε $\xi^T b = 0$. Παραγωγίζοντας $n - 1$ φορές στο $t = 0$ έχουμε $\xi^T A^k b = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ισοδύναμα $\xi^T\Gamma_c = 0$ και άρα $\xi = 0$ αφού $\det(\Gamma_c) \neq 0$. Άρα $c_1 = c_2$.

B14: Έστω $\Sigma_i(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, πλήρως ελέγξιμο και $\mathrm{Rank}(B) = m$. Δείξτε ότι τότε $\mathrm{Rank}(A) \geq n - m$.

Λύση: Εφόσον $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο, $\mathrm{Rank}([sI_n - A \mid B]) = n$ γιά κάθε $s \in \mathbb{C}$. Άρα και για $s = 0$: $\mathrm{Rank}([-A \mid B]) = n \Leftrightarrow \mathrm{Rank}([A \mid B]) = n$. Εφόσον οι m στήλες του πίνακα B είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ο πίνακας A πρέπει να έχει τουλάχιστον $n-m$ γραμμικά ανεξάρτητες στήλες ώστε να έχουμε $\mathrm{Rank}([A \mid B]) = n$.

B15: Έστω $\Sigma_i(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $\Sigma_i(\hat{A}, \hat{B})$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ με αντίστοιχους πίνακες ελεγξιμότητας

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{ και } \hat{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \ldots & \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix}$$

όπου $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = \mathrm{Rank}(\hat{\Gamma}_c) = n$. Έστω ότι υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(P) \neq 0$, τέτοιος ώστε $P[\Gamma_c \mid A^nB] = [\hat{\Gamma}_c \mid \hat{A}^n\hat{B}]$. Δείξτε ότι $\hat{B} = PB$ και $\hat{A} = PAP^{-1}$. Υπόδειξη: Δείξτε ότι $(PA - \hat{A}P)\Gamma_c = 0$.

Λύση: Έχουμε: $P\Gamma_c = \hat{\Gamma}_c$ και $PA^nB = \hat{A}^n\hat{B}$. Η πρώτη ισότητα γράφεται αναλυτικά:

$$P\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PB & PAB & \ldots & PA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \ldots & \hat{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

που μαζί με την $PA^nB = \hat{A}^n\hat{B}$ συνεπάγεται ότι

$$PA\left[\begin{array}{cccc} B & AB & \ldots & A^{n-1} \end{array}\right] = \hat{A}\left[\begin{array}{cccc} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \ldots & \hat{A}^{n-1} \end{array}\right]$$

Ισοδύναμα:

$$PA\Gamma_c = \hat{A}\hat{\Gamma}_c = \hat{A}P\Gamma_c$$

Άρα

$$(PA - \hat{A}P)\Gamma_c = 0 \Rightarrow PA = \hat{A}P \Rightarrow \hat{A} = PAP^{-1}$$

εφόσον οι γραμμές του πίνακα Γ_c είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Η ισότητα $\hat{B} = PB$ προκύπτει εξισώνοντας τις πρώτες m στήλες της εξίσωσης $P\Gamma_c = \hat{\Gamma}_c$.

B16: Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$, $x' = Ax + Bu$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί σε γραμμικοποιημένο μοντέλλο δορυφόρου σε κυκλική τροχιά. Οι μεταβλητές του διανύσματος κατάστασης $x^T = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]$ είναι: x_1 η ακτινική απόκλιση από την ακτίνα ισορροπίας και x_3 η μεταβλητή γωνίας της τροχιάς. Οι μεταβλητές x_2 και x_4 αντιστοιχούν στην γραμμική ταχύτητα στην ακτινική διεύθυνση και στην γωνιακή ταχύτητα, αντίστοιχα. Οι μεταβλητές εισόδου u_1 και u_2 ($u = [u_1\ u_2]^T$) είναι οι δυνάμεις που ασκούν οι προωθητήρες στην ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση, αντίστοιχα.

(α) Είναι το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο; Αν το διάνυσμα εξόδου είναι $y = [x_1\ x_3]^T$, είναι το αντίστοιχο σύστημα $\Sigma_o(A,C)$ παρατηρήσιμο;

(β) Είναι το σύστημα πλήρως ελέγξιμο αν ο ακτινικός προωθητήρας σταματήσει να λειτουργεί; αν ο εφαπτομενικός προωθητήρας σταματήσει να λειτουργεί;

(γ) Είναι το σύστημα πλήρως παρατηρήσιμο μόνο απο την έξοδο $y = x_1$; Μόνο από την έξοδο $y = x_3$;

Λύση: (α) Ο πίνακας ελεγξιμότητας με δύο εισόδους:

$$\Gamma_c = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \end{array}\right]$$

Με ανταλλαγές γραμμών ο πίνακας μετασχηματίζεται σε μορφή echelon:

$$\Gamma_c \sim \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{array}\right]$$

και επομένως $\text{Rank}(\Gamma_c) = 4$ και το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο. Παρόμοια:

$$\Gamma_o^T = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3\omega^2 & 0 & 0 & -6\omega^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{array}\right]$$

Επομένως $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = 4$ και το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

(β) Με είσοδο μόνο το u_2:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\Gamma_c \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6\omega^3 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\omega^3 \end{bmatrix}$$

Επομένως (για $\omega \neq 0$), $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = 4$ και το σύστημα παραμένει πλήρως ελέγξιμο. Με είσοδο μόνο το u_1:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\Gamma_c \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως (για $\omega \neq 0$), $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = 3 < 4$ και το σύστημα δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

(γ) Με έξοδο μόνο $y = x_1$:

$$\Gamma_o^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως (για $\omega \neq 0$), $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = 3 < 4$ και το σύστημα δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Με έξοδο μόνο $y = x_3$:

$$\Gamma_o^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6\omega^3 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6\omega^3 \end{bmatrix}$$

Επομένως (για $\omega \neq 0$), $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = 4$ και το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

B17: Έστω το σύστημα $\Sigma(A, B, C)$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Μετασχηματίστε το σύστημα στην κανονική μορφή Kalman και εντοπίστε τα τέσσερα υποσυστήματα Σ_{co}, $\Sigma_{\bar{c}o}$, $\Sigma_{c\bar{o}}$, $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$. (β) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Λύση: Εφόσον $AB = 0$, έχουμε:

$$\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Οι μή μηδενικές γραμμές του Γ_o είναι οι γραμμές του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $\mathrm{Ker}(\Gamma_o) = \mathcal{X}_{\bar{o}}$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα $x \in \mathbb{R}^5$ γιά τα οποία $-x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0$, $x_2 - x_3 + x_4 = 0$ και $x_5 = 0$, η, ισοδύναμα: $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3 - x_4$ και $x_5 = 0$. Άρα:

$$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathrm{Ker}(\Gamma_o) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Γιά να βρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c \cap \mathcal{X}_{\bar{o}}$ ελέγχουμε αν

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Εξετάζουμε το σύστημα:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

το οποίο δεν έχει λύση. Άρα: $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c \cap \mathcal{X}_{\bar{o}} = \{0\}$. Στην συνέχεια ορίζουμε: $\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathbb{R}^5$. Εδώ: $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \{0\}$ και άρα $\mathcal{X}_{co} = \mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c)$. Επίσης: $\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathrm{Ker}(\Gamma_o)$ και εφόσον $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \{0\}$ έχουμε $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathrm{Ker}(\Gamma_o)$. Στην συνέχεια ορίζουμε $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$ τέτοιον ώστε: $\mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathbb{R}^5$. Ισοδύναμα:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \oplus \mathbb{X}_{\bar{c}o} = \mathbb{R}^5$$

Εφόσον τα τρία διανύσματα στην παραπάνω εξίσωση είναι γραμμικά ανεξάρτητα, συμπληρώνουμε την βάση του $\mathbb{R}^5$ με τα δύο τελευταία διανύσματα του πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma-\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta+\beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

και τελικά:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta+\beta-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 1 \end{array}\right]$$

Επιλέγοντας, $\epsilon = \alpha = \beta = \gamma = 0$ και $\delta = 1$ ο πίνακας είναι μη-ιδιάζων και επομένως οι στήλες του είναι βάση του $\mathbb{R}^5$. Συνοψίζοντας:

$$\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \{0\},\ \mathcal{X}_{co} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},\ \mathcal{X}_{\bar{c}o} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},\ \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ορίζουμε:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και $\hat{A} = Q^{-1}AQ$, $\hat{B} = Q^{-1}B$, $\hat{C} = CQ$, έχουμε:

$$\left[\begin{array}{c||c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline\hline \hat{C} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|cc||c} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

B18: Έστω το σύστημα:

$$\Sigma_o(A, C) := \Sigma_o\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \right)$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Δείξτε ότι $\Sigma_o(A, C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $\Sigma_o(A_{22}, A_{12})$ πλήρως παρατηρήσιμο.

Λύση: Έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες: $\Sigma_o(A, C)$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$\exists s \in \mathbb{C}, \exists \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \neq 0\ :\ \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & sI - A_{22} \\ I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0$$

Ισοδύναμα:

$$\exists s \in \mathbb{C}, \exists \xi_2 \neq 0\ :\ \begin{bmatrix} sI - A_{22} \\ A_{12} \end{bmatrix} \xi_2 = 0$$

αν και μόνο αν $\Sigma_o(A_{22}, A_{12})$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Άρα $\Sigma_o(A, C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $\Sigma_o(A_{22}, A_{12})$ πλήρως παρατηρήσιμο.

Γ. Χαλικιάς, 7-5-2023