Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμότητα

1. Προκαταρκτικά

1.1 Θετικά ορισμένοι/ημι-ορισμένοι πίνακες

Ορισμός: Έστω $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ο P είναι θετικά ορισμένος (θετικά ημι-ορισμένος), $P \succ 0$ ($P \succeq 0$) αν η τετραγωνική μορφή $x^T P x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ ($x^T P x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$). Παρόμοια ορίζουμε αρνητικά ορισμένους (ημι-ορισμένους) πίνακες: $P \prec 0 \Leftrightarrow -P \succ 0$ ($P \preceq 0 \Leftrightarrow -P \succeq 0$).

Παρατήρηση: Αν $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \succ 0$ ($P \succeq 0$), τότε χωρίς βλάβη γενικότητας μπορο·υμε να υποθέσουμε ότι $P = P^T$. Πράγματι,

$$x^T P x = x^T \left[\frac{1}{2}(P + P^T) + \frac{1}{2}(P - P^T)\right] x$$

όπου ο πίνακας $P + P^T$ ($P - P^T$), είναι συμμετρικός (αντι-συμμετρικός). Επομένως,

$$x^T P x = x^T \left(\frac{P + P^T}{2}\right) x \quad \text{για κάθε } \ x \in \mathbb{R}^n$$

και επομένως $P \succ 0 \Leftrightarrow P + P^T \succ 0$ (αντίστοιχα $P \succeq 0 \Leftrightarrow P + P^T \succeq 0$). Στο εξής ορίζουμε:

$$S_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succ 0\}, \ \ \bar{S}_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succeq 0\}, \ \ S^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T\}$$

και έχουμε: $S_+^n \subseteq \bar{S}_+^n \subseteq S^n$, δηλαδή υποθέτουμε ότι θετικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι πίνακες (όπως και αρνητικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι) είναι αυτόματα συμμετρικοί.

Ιδιότητες:

I_1 : S_+^n και $\bar{S}_+^n$ είναι κυρτοί κώνοι στον $\mathbb{R}^{n\times n}$, δηλαδή:

$$I_1(a): \ P_1, P_2 \in S_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in S_+^n \ \forall\, \lambda \in [0,1], \quad P \in S_+^n \Rightarrow \lambda P \in S_+^n \ \forall\, \lambda > 0$$
$$I_1(b): \ P_1, P_2 \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in \bar{S}_+^n \ \forall\, \lambda \in [0,1], \quad P \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P \in \bar{S}_+^n \ \forall\, \lambda \geq 0.$$

I_2 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $P \succ 0 \Leftrightarrow \det(E_i^T P E_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου E_i ο πίνακας που ορίζεται από τις i-πρώτες στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_n.

I_3 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \succ 0$, τότε $\lambda_i(P) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (και αντίστροφα για συμμετρικό P): Εφόσον $P = P^T$ έχουμε $P = U\Lambda U^T$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, και $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $UU^T = U^T U = I_n$. Έστω ότι $\lambda_j \leq 0$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε, αν u_j η j-στήλη του U και συμβολίζοντας με e_j την j-στήλη του I_n, θα είχαμε ότι:

$$u_j^T P u_j = u_j^T U\Lambda U^T u_j = e_j^T \Lambda e_j = \lambda_j \leq 0$$

άτοπο, αφού $\|u_j\| = 1$. Αντίστροφα, αν $P = P^T$ έχει θετικές ιδιοτιμές: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, τότε

$$x^T P x = x^T U\Lambda U^T x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|U^T x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|x\|^2 > 0 \ \text{ αν } \ x \neq 0$$

και άρα $P \succ 0$. Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι: $P \succeq 0 \Leftrightarrow \lambda_i(P) \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

I_5 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \succeq 0$ τότε $x^T P x = 0 \Leftrightarrow Px = 0$: Η αριστερή συνεπαγωγή είναι προφανής. Έστω $x^T P x = 0$ για κάποιον πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \succeq 0$. Γράφουμε $P = U\text{diag}\{\Lambda_1, 0\}U^T$ όπου $\Lambda_1 = \text{diag}(\Lambda_1) \succ 0$ και $UU^T = U^T U = I_n$. Έστω $U = [U_1 \mid U_2]$, $U_1 = \mathbb{R}^{n\times r}$, $r = \text{rank}(P)$. Τότε $Px = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(U_2)$. Επίσης $P = U_1 \Lambda_1 U_1^T = U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T := P^{1/2} P^{1/2}$ όπου $P^{1/2} = U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T = (P^{1/2})^T \succeq 0$, $\Lambda_1^{1/2} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\}$. Επομένως $x^T P x = 0 \Leftrightarrow \|P^{1/2} x\| = 0 \Leftrightarrow P^{1/2} x = 0 \Leftrightarrow Px = 0$.

I_4 : Αν $P(t) = \int_0^t Q(\tau)Q^T(\tau)d\tau,\ t > 0$ και $Q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times m})$, τότε $P(t) = P^T(t) \succeq 0$ και $\int_0^t x^T P(\tau)xd\tau = \int_0^t \|Q^T(\tau)x\|^2 d\tau$. Επομένως $x^T P(t)x = 0 \Leftrightarrow Q^T x(\tau) = 0$ για κάθε $\tau \in [0\ t]$ λόγω συνέχειας. Επίσης $t_2 \geq t_1 \Rightarrow P(t_2) \succeq P(t_1)$ (που εξ¨ορισμού σημαίνει ότι $P(t_2) - P(t_1) \succeq 0$).

I_6 : Έστω
$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$
όπου $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $P_{11} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m < n$. Τότε: $P \succ 0 \Leftrightarrow (P_{22} \succ 0$ και $P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T \succ 0)$. Ο πίνακας $P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T$ λέγεται συμπλήρωμα Schur του P_{22}.

1.2 Θεώρημα Cauley-Hamilton

Θεώρημα: Κάθε πίνακας ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλ. αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n \ \Rightarrow\ \phi(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_n A^n = 0$$

Απόδειξη: Έστω $B(\lambda) = \text{adj}(A - \lambda I_n)$. Τότε $\partial B_{ij}(\lambda) \leq n - 1$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Έστω ότι

$$B(\lambda) = B_0 + B_1\lambda + B_{n-1}\lambda^{n-1},\ B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

. Επομένως:

$$(A - \lambda I_n)B(\lambda) = \phi(\lambda)I_n \Rightarrow (A - \lambda I_n)B_0 + B_1\lambda + B_{n-1}\lambda^{n-1} = (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n)I_n$$

Ισοδύναμα:

$$AB_0 + (AB_1 - B_0)\lambda + (AB - 2 - B_1)\lambda^2 + \ldots + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n = (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n)I_n$$

Εξισώνοντας τους πολυωνυμικούς όρους και πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις με $A^n, A^{n-1}, \ldots, I$, αντίστοιχα:

$$\left.\begin{aligned} -B_{n-1} &= a_n I_n \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I_n \\ &\vdots \\ AB_1 - B_0 &= a_1 I_n \\ AB_0 &= a_0 I_n \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} -A^n B_{n-1} &= a_n A^n \\ A^n B_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2} &= a_{n-1}A^{n-1} \\ &\vdots \\ A^2 B_1 - AB_0 &= a_1 A \\ AB_0 &= a_0 I_n \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $\phi(A) = 0$. □

1.3 A-αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ένας υπόχωρος $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι A-αναλλοίωτος (συμβολισμός: $A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$) αν $x \in \mathcal{V} \Rightarrow Ax \in \mathcal{V}$.

Παραδείγματα: (i) $\mathcal{N}_r(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$. (ii) $\mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$. (iii) $\mathcal{N}_r(A^m) = \{x \in \mathbb{R}^n : A^m x = 0\}$. (iv) $\mathcal{R}(A^m) = \{A^m x : x \in \mathbb{R}^n\}$. (v) Έστω $J_n(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times}$ πίνακας Jordan με ιδιοτιμή λ. Ο υπόχωρος $\mathcal{M} =< e_1, e_2, \ldots, e_k >$, $1 \leq k \leq n$, όπου e_k η k-στήλη του μοναδιαίου πίνακα I_n είναι $J_n(\lambda)$-αναλλόιωτος. (v) Έστω $A = \lambda I$ και $\mathcal{V}$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Τότε ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. (vi) Έστω $A = \text{diag}\{A_1, A_2\}$, $\lambda_i \in \mathcal{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε $\mathcal{M}_1 =< e_1 >$, $\mathcal{M}_2 =< e_1, e_2 >$ είναι A-αναλλοίωτοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. (vii) Έστω $\{v_i\}_{i=1}^m$ σύνολο

(δεξιών) ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $A \in \mathbb{R}^n$. Τότε ο υπόχωρος $< v_1, v_2, \ldots v_m >$ είναι A-αναλλοίωτος.
(vii) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ block-τριγωνικός:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \ A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, \ r < n \ \text{ και } \ \mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R}^r \right\}$$

Τότε ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος.

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\mathcal{V}$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$. Τότε ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνο αν $Av_i \in \mathcal{V}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$: Κατευθείαν από τον ορισμό. (α) $\Leftarrow$: Έστω $x \in \mathcal{V}$. Το x γράφεται (μονοσήμαντα) ως γραμμικός συνδιασμός των $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$, δηλαδή $x = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Τότε $Ax = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i (Av_i)$ και επομένως $Ax \in \mathcal{V}$ αφού $Av_i \in \mathcal{V}$. Αρα ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος. $\square$

Έστω $\mathcal{V}$ A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Έστω

$$M = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_{k-1} & t_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k}, \ \mathcal{V} = \mathcal{R}(M) = < t_1, t_2, \ldots, t_k >$$

Εφόσον $At_1 \in \mathcal{V}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$At_1 = x_{11}t_1 + x_{21}t_2 + \ldots + x_{k1}t_k = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{k1} \end{bmatrix}$$

και γενικά

$$AM = A \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kk} \end{bmatrix} := MX$$

δηλαδή αν $\mathcal{R}(M)$ είναι A-αναλλοιωτος υπόχωρος, τότε υπάρχει πίνακας X τέτοιος ώστε $AM = MX$. Το αντίστροφο ισχύει επίσης: Αν $AM = MX$ για κάποιον πίνακα X, τότε $\mathcal{R}(M)$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος.

Έστω ότι $\text{Rank}(M) = k$, δηλαδή $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ βάση του $\mathcal{V}$. Τότε κάθε ιδιοτιμή του $X \in \mathbb{R}^{k\times k}$ είναι ιδιοτιμή του A και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ανήκει στον $\mathcal{V}$: Αν $Xu = \lambda u$, $u \neq 0$, τότε $Mu \neq 0$ και $A(Mu) = M(Xu) = \lambda(Mu)$ και άρα $\lambda \in \sigma(A)$. Γενικότερα, αν $AM = MX$ τότε $X = A|_{\mathcal{R}(M)}$ και οι πίνακες A και M έχουν (τουλάχιστον) $\text{Rank}(M)$ κοινές ιδιοτιμές.

Πρόταση: Έστω $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $x(0) \in \mathcal{V} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{V}$ για κάθε $t \geq 0$.

2. Ελεγξιμότητα

Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A, B) : x' = Ax + Bu$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$,

Ορισμός: Η 'κατάσταση' $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ελέγξιμη αν υπάρχει $t_1 > 0$ (πεπερασμένο) και $u \in C([0, t_1], \mathbb{R}^m)$ που μεταφέρει την κατάσταση $x(0) = x_0$ στην κατάσταση $x(t_1) = 0$. Αν κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ελέγξιμη κατάσταση τότε λέμε ότι το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

Έστω ότι η κατάσταση x_0 είναι ελέγξιμη. Τότε υπάρχει $t_1 > 0$ και $u \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε

$$0 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \Rightarrow -x_0 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή

$$L_c(0,t_1) : C([0,t_1],\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n,\ \ L_c(0,t_1)u = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Τότε η κατάσταση x_0 είναι ελέγξιμη αν και μόνο αν $x_0 \in \mathcal{R}[L_c(0,t_1)]$ για κάποιο $t_1 > 0$. Το σύνολο των ελέγξιμων καταστάσεων:

$$\mathcal{X}_c = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 \in \mathcal{R}[L_c(0,t_1)],\ t_1 \in (0,\infty)\}$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\mathcal{X}_c = \mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε την Gramian ελεγξιμότητας του συστήματος:

$$W_c(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}d\tau \quad (t_1 > 0)$$

για την οποία ισχύει ότι $W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1) \succeq 0$ για κάθε $t_1 > 0$. Ορίζουμε επίσης τον πίνακα ελεγξιμότητας:

$$\Gamma_c = \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times nm}$$

Θεώρημα: Γιά κάθε $t_1 > 0$ έχουμε: $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}(\Gamma_c)$.

Απόδειξη: (i) Αποδεικνύεται πρώτα ότι $\mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. Έχουμε:

$$L_c(0,t_1)u = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Ορίζουμε συνάρτηση εισόδου: $u(\tau) = B^Te^{A\tau}\xi \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$ όπου $\xi \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο διάνυσμα. Τότε:

$$L_c(0,t_1)u = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}d\tau \cdot \xi = W_c(0,t_1)\xi$$

και επομένως (εφόσον ξ αυθαίρετο), $\mathcal{R}[W_c(0,t_1)] \subseteq \mathcal{R}[L_c(0,t_1)]$.

Αντίστροφα, έστω ότι $x_0 \in \mathcal{R}[L_c(0,t_1)]$. Τότε υπάρχει $u \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε $L_c(0,t_1)u = x_0$. Καθώς $W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1)$ έχουμε

$$\mathcal{R}[W_c(0,t_1)] \oplus \mathcal{N}[W_c(0,t_1)] = \mathbb{R}^n \ \text{ και } \ \mathcal{N}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]^{\perp}$$

Επομένως το x_0 γράφεται (κατα μοναδικό τρόπο) ως:

$$x_0 = x_c + x_n,\ \ x_c \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)],\ \ x_n \in \mathcal{N}[W_c(0,t_1)]$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} W_c(0,t_1)x_n = 0 \Rightarrow x_n^TW_c(0,t_1)x_n = 0 &\Rightarrow \int_0^{t_1} x_n^Te^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}x_nd\tau = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^{t_1} \|B^Te^{-A^T\tau}x_n\|^2d\tau = 0 \end{aligned}$$

και επομένως (λόγω συνέχειας) συμπεραίνουμε ότι:

$$B^T e^{-A^T\tau} x_0 = 0 \;\; \text{για κάθε} \;\; \tau \in [0, t_1]$$

Επίσης:

$$\mathcal{N}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]^\perp \Rightarrow x_c^T x_n = 0$$

και επομένως:

$$x_0^T x_n = (x_c^T + x_n^T) x_n = \|x_n\|^2 \Rightarrow (L_c(0,t_1)u)^T x_n = \|x_n\|^2 \Rightarrow \int_0^{t_1} u^T(\tau) B^T e^{-A^T\tau} x_n d\tau = \|x_n\|^2 = 0$$

(αφού $B^T e^{-A^T\tau} x_0 \equiv 0$ στο διάστημα $[0,t_1]$). Επομένως $x_n = 0$ και $x_0 = x_c \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. Άρα $\mathcal{R}[L_c(0,t_1)] \subseteq \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$ και από το πρώτο μέρος $\mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$.

(ii) Σε αυτό το βήμα της απόδειξης θα δείξουμε ότι για κάθε $t_1 > 0$ έχουμε $\mathcal{R}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[\Gamma_c]$. Αρχικά δείχνουμε ότι $\mathcal{R}[W_c(0,t_1)] \subseteq \mathcal{R}[\Gamma_c]$: Έστω $x_0 \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. Τότε από το (i) $x_0 \in \mathcal{R}[L_c(0,t_1)]$, άρα υπάρχει $u \in C([0,t_1], \mathbb{R}^m)$ τ.ω.

$$x_0 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

Από το Θεώρημα Cauley-Hamilton $A^n \in < I, A, \ldots, A^{n-1} >$ και άρα

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(\tau) A^k \quad \Rightarrow \quad x_0 = \int_0^{t_1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(\tau) A^k B u(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \beta_k(\tau) u(\tau) d\tau$$

Θέτοντας

$$\alpha_k(t_1) = \int_0^{t_1} \beta_k(\tau) u(\tau) d\tau, \;\; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

έχουμε:

$$x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t_1) A^k B = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t_1) \\ \alpha_1(t_1) \\ \alpha_2(t_1) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t_1) \end{bmatrix}$$

και άρα $x_0 \in \mathcal{R}(\Gamma_c) \Rightarrow \mathcal{R}[W_c(0,t_1)] \subseteq \mathcal{R}[\Gamma_c]$.

Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι: $\mathcal{R}[\Gamma_c] \subseteq \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$ (για κάθε $t_1 > 0$): Έστω $x_0 \in \mathcal{R}(\Gamma_c)$ και έστω (για αντίφαση) ότι $x_0 \notin \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. Τότε $x_0 = x_c + x_n$, $x_c \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$, $x_n \in \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]^\perp$, $x_n \neq 0$. Έχουμε (παρόμοια με προηγούμενο μέρος της απόδειξης):

$$W_c(0,t_1) x_n = 0 \Rightarrow x_n^T W_c(0,t_1) x_n = 0 \Rightarrow \int_0^{t_1} x_n^T e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} x_n d\tau = 0$$

Επομένως

$$\int_0^{t_1} \|B^T e^{-A^T\tau} x_n\|^2 d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad B^T e^{-A^T\tau} x_n = 0, \; \forall\, \tau \in [0,t_1] \;\; \Rightarrow \;\; B^T e^{-A^T\tau} x_n \Big|_{\tau=0} = B x_n = 0$$

Παραγωγίζοντας την ταυτότητα αυτή έχουμε:

$$x_n^T e^{-A\tau} B = 0 \;\; \forall \;\; \tau \in [0,t_1] \quad \Rightarrow (x_n^T e^{-A\tau} B)'|_{t=0} = 0$$

και επαγωγικά:

$$x_n^T e^{-A\tau} A^k B|_{\tau=0} = x_n^T A^k B = 0, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Επομένως

$$x_n^T B = x_n^T AB = \ldots = x_n^T A^{n-1} B = 0 \Rightarrow x_n^T \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array} \right] = x_n^T \Gamma_c = 0$$

Συνδιάζοντας με την σχέση $x_0 = \Gamma_c \eta$ και την σχέση $x_n^T x_c = 0$ έχουμε:

$$\|x_n\|^2 = x_n^T x_n = x_n^T (x_c + x_n) = x_n^T x_0 = x_n^T \Gamma_c \eta = 0 \Rightarrow x_n = 0$$

(άτοπο). Επομένως $\mathcal{R}(\Gamma_c) \subseteq \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$ που μαζί με τον αντίστροφο εγκλεισμό συνεπάγεται ότι $\mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)]$. □

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι $\mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}(\Gamma_c)$ ανεξάρτητα από την επιλογή της (θετικής) παραμέτρου t_1 και επομένως ο ελέγξιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_c$ δεν εξαρταται απο το t_1.

Θεώρημα: $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c)$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το $\mathcal{R}(B)$.

Απόδειξη: $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{X}_c$ είναι προφανές (εφόσον οι στήλες του πίνακα B είναι οι πρώτες m στήλες του Γ_c. Έστω $x \in \mathcal{X}_c$. Τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}^{mn}$ τέτοιο ώστε $x = \Gamma_c y$. Έχουμε

$$Ax = A \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & \cdot & A^{n-2}B & A^{n-1}B \end{array} \right] y = \left[\begin{array}{ccccc} AB & A^2B & \cdot & A^{n-1}B & A^nB \end{array} \right] y$$

Οι στήλες του πίνακα A^nB είναι γραμμικοί συνδιασμοί των στηλών του Γ_c (Cauley-Hamilton) και επομένως $Ax \in \mathcal{X}$, δηλαδή $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$.

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V}$ είναι επίσης A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τ.ω. $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{X}_c$. Τότε οι στήλες του B είναι στον $\mathcal{V}$. Εφόσον ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος, οι στήλες του AB είναι στον $\mathcal{V}$, και με το ίδιο σκεπτικό το ίδιο ισχύει και για τις στήλες των $A^2B,\ A^3B, \ldots A^{n-1}B$. Συμπεραίνουμε ότι οι στήλες του Γ_c είναι στον $\mathcal{V}$ που συνεπάγεται ότι $\mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{V}$. Άρα ο $\mathcal{X}_c$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος που περιέχει το $\mathcal{R}(B)$. □

Λήμμα (Kalman): Έστω $\Sigma_i(A,B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, που δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε υπάρχει $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, τέτοιο ώστε: $\Sigma_i(A,B) \sim \Sigma_i(\hat{A},\hat{B})$, όπου

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \ \hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c\times m}$, $n_c = \mathrm{Rank}(\Gamma_c)$, όπου $\Gamma_c = [B \ \ AB \ \ \ldots \ \ A^{n-1}B]$ ο πίνακας ελεγξιμότητας και όπου $\Sigma_i(\hat{A}_{11},\hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη: Έστω $n_c = \mathrm{Rank}(\Gamma_c) < n$. Ορίζουμε τον πίνακα:

$$Q = [Q_1 \mid Q_2] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ \ Q_1 = [v_1 \ v_2 \ \ldots v_{n_c}] \in \mathbb{R}^{n\times n_c}$$

όπου $\{v_i\}_{i=1}^{n_c}$ βάση του $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c)$ και $\det Q \neq 0$ (δηλαδή οι στήλες του Q_2 συμπληρώνουν την βάση του $\mathbb{R}^n$). Θα δείξουμε ότι $Q\hat{A} = AQ$ και $B = Q\hat{B}$, δηλαδή

$$[v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_{n_c}|Q_2] \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} = A[v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_{n_c}|Q_2], \quad B = [v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_{n_c}|Q_2] \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Εφόσον $\mathcal{R}(Q_1) = \mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}([B \ \ AB \ \ \ldots \ \ A^{n-1}B])$, ο υπόχωρος $\mathcal{R}(Q_1)$ είναι A-αναλλοίωτος και επομένως $Av_i \in \mathcal{R}(Q_1)$, $i = 1,2,\ldots,n_c$. Επομένως, κάθε μία απο τις n_c στήλες του πίνακα AQ_1 γρ΄φεται ως γραμμικός συνδιασμός των $\{v_1\}_{i=1}^{n_c}$, δηλαδή $AQ_1 = Q_1\hat{A}_{11}$ για κάποιον πίνακα $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$. Επίσης, εφόσον $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}(Q_1)$ κάθε στήλη του B γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των $\{v_1\}_{i=1}^{n_c}$ μέσω των αντίστοιχων στοιχείων κάθε στήλης του $\hat{B}_1$.

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(\hat{A},\hat{B})$ γράφεται:

$$\hat{\Gamma}_c = \left[\ \hat{B} \mid \hat{A}\hat{B} \mid \ldots \mid \hat{A}^{n-1}\hat{B} \ \right] = \left[\ Q^{-1}B \mid Q^{-1}AB \mid \ldots \mid Q^{-1}A^{n-1}B \ \right] = Q^{-1}\Gamma_c$$

Όμως:

$$\hat{\Gamma}_c = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \hat{B}_1 & \hat{A}_{11}\hat{B}_1 & \dots & \hat{A}_{11}^{n-1}\hat{B}_1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]$$

και επομένως

$$\text{Rank}(\Gamma_c) = n_c = \text{Rank}(\hat{\Gamma}_c) = \text{Rank}\left(\left[\begin{array}{c|c|c|c} \hat{B}_1 & \hat{A}_{11}\hat{B}_1 & \dots & \hat{A}_{11}^{n-1}\hat{B}_1 \end{array}\right]\right)$$

$$= \text{Rank}\left(\left[\begin{array}{c|c|c|c} \hat{B}_1 & \hat{A}_{11}\hat{B}_1 & \dots & \hat{A}_{11}^{n_c-1}\hat{B}_1 \end{array}\right]\right)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα Cauley-Hamilton. Επομένως το σύστημα $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. $\square$

Θεώρημα: Έστω σύστημα $\Sigma_i(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

(β) Ο πίνακας Gramian $W_c(0, t_1) \succ 0$ για κάθε $t_1 > 0$.

(γ) $\text{Rank}(\Gamma_c) = n$.

(δ) $\text{Rank}[L_c(0, t_1)] = n$ για κάθε $t_1 > 0$.

(ε) $\text{Rank}[sI_n - A|B] = n$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$. Ισοδύναμα $\text{Rank}[\lambda I_n - A|B] = n$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$.

Απόδειξη: Εφόσον όπως έχουμε ήδη δείξει:

$$\mathcal{X}_c = \mathcal{R}[L_c(0, t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0, t_1)] = \mathcal{R}(\Gamma_c)$$

η ισοδυναμία $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ είναι άμεση.

(γ) $\Rightarrow$ (ε): Έστω ότι $\text{Rank}(\Gamma_c) = n$ και ότι υπάρχει $\lambda \in \sigma(A)$ και $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\xi \neq 0$, ώστε

$$\xi^*[\lambda I_n - A \mid B] = 0 \Rightarrow \xi^* A = \lambda \xi^*, \;\; \xi^* B = 0$$

Επιπλέον,

$$\xi^* A^2 = (\xi^* A)A = \lambda \xi^* A = \lambda^2 \xi^* \;\; \text{και γενικά} \;\; \xi^* A^k = \lambda^k \xi^*, \; k = 1, 2, \dots, n-1$$

Επομένως,

$$\xi^* \Gamma_c = \xi^* \left[\begin{array}{c|c|c|c} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \lambda \xi^* B & \dots & \lambda^{n-1}\xi^* B \end{array}\right] = 0$$

(άτοπο, καθώς $\text{Rank}(\Gamma_c) = n$ και $\xi \neq 0$).

(ε) $\Rightarrow$ (α): Εξ' υποθέσεως ισχύει ότι $\text{Rank}[\lambda I_n - A\ |B] = n$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$. Υποθέτουμε για αντίφαση ότι $\Sigma_i(A, B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε, από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, τέτοιος ώστε:

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \;\; \hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c\times m}$, $n_c = \text{Rank}(\Gamma_c) < n$, όπου $\Gamma_c = [B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B]$ ο πίνακας ελεγξιμότητας και όπου $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο. Παρατηρούμε ότι $\sigma(A) = \sigma(\hat{A}) = \sigma(\hat{A}_{11}) \cup \sigma(\hat{A}_{22})$.

Έστω $\lambda \in \sigma(\hat{A}_{22})$ με αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα $\beta^* \neq 0$, δηλαδή $\beta^* \hat{A}_{22} = \lambda \beta^*$. Κατασκευάζουμε το διάυσμα $\alpha^* = [0_{n_c}^T \mid \beta^*] \neq 0$. Τότε:

$$\alpha^*[\lambda I_n - A \mid B] = [0^T \mid \beta^*] \left[\begin{array}{cc|c} \lambda I_{n_c} - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & B_1 \\ 0 & \lambda I_{n-n_c} - \hat{A}_{22} & 0 \end{array} \right] = 0^T$$

Επομένως,

$$\alpha^*[\lambda I_n - QAQ^{-1} \mid QB] = 0 \Rightarrow \alpha^* Q[\lambda I_n - A \mid B] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha^* Q[\lambda I_n - A \mid B] = 0$$

που είναι άτοπο γιατί αντιβαίνει στην υπόθεση. □

Θεώρημα: Αν $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο τότε μπορούμε να μεταφέρουμε αυθαίρετη αρχική κατάσταση $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ σε αυθαίρετη τελική κατάσταση $x(t_1) = x_f \in \mathbb{R}^n$ σε αυθαίρετο χρόνο $t_1 > 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να μεταφέρουμε την (αυθαίρετη) αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ στην (αυθαιρετη) τελική κατάσταση $x_f \in \mathbb{R}^n$ σε (αυθαιρετο) χρόνο $t_1 > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $u \in C([0, t_1], \mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε:

$$x(t_1) = x_f = e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} Bu(\tau) d\tau \Leftrightarrow e^{At_1}(x_0 - e^{-At_1} x_f) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau = 0$$

Έστω $\xi = x_0 - e^{-At_1} x_f$. Εφόσον το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο υπάρχει $u \in C([0, t_1], \mathbb{R}^m)$ που μεταφέρει την (αυθαίρετη) αρχική κατάσταση $x(0) = \xi$ στην κατάσταση $x(t_1) = 0$. Η ίδια συνάρτηση μεταφέρει την κατάσταση $x(0) = x_0$ στην κατάσταση $x(t_1) = x_f$. □

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος του συστήματος $\Sigma_i(A, B)$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε:

$$\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = \mathrm{Rank}[B\ AB\ A^2B] = \mathrm{Rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

και το σύστημα δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Ο ελέγξιμος υπόχωρος είναι:

$$\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

2.1 Ελεγξιμότητα Διαγωνίων μορφών:

Οι ιδιότητες ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(A, B)$ παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας: Έστω $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(Q) \neq 0$, και $\Sigma_i(A, B) \sim \Sigma_i(Q^{-1}AQ, Q^{-1}B)$. Οι πίνακες ελεγξιμότητας που αντιστοιχούν στα δύο ισοδύναμα συστήματα είναι:

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{ και } \hat{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} Q^{-1}B & Q^{-1}AB & Q^{-1}A^2B & \ldots & Q^{-1}A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

και άρα $\hat{\Gamma}_c = Q^{-1}\Gamma_c \Rightarrow \mathrm{Rank}(\Gamma_c) = \mathrm{Rank}(\hat{\Gamma}_c)$.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ απλής δομής. Αν $\{\lambda_i\}$ οι ιδιοτιμές του A, τότε

$$AP = P\Lambda, \ \ \text{όπου} \ \ \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

όπου Λ και P οι πίνακες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, αντίστοιχα. Εφόσον A απλής ο P είναι μή ιδιάζων και $\Lambda = P^{-1}AP$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό:

$$x = Pz \Rightarrow x' = Pz' = Ax + Bu \Rightarrow z' = P^{-1}APz + P^{-1}Bu = \Lambda z + \hat{B}u, \ \ \text{όπου} \ \ \hat{B} = P^{-1}B$$

Άρα, $z_i' = \lambda_i z_i + \hat{b}_i^T u$, $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου $\hat{b}_i^T$ η i-γραμμή του $\hat{B}$. Επομένως το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(\Lambda, \hat{B})$ είναι πλήρως ελέγξιμο, η, ισοδύναμα, αν και μόνο αν ο πίνακας:

$$[\lambda I - \Lambda \mid \hat{B}] = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda - \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & \hat{b}_1^T \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & \ldots & 0 & \hat{b}_2^T \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda - \lambda_n & \hat{b}_n^T \end{array}\right]$$

έχει rank ίσο με n για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Εφόσον ο πίνακας $[\lambda I - \lambda \mid \hat{B}]$ μπορεί να χάσει rank μονο αν $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδή αν $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, συμπεραίνουμε ότι $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\hat{b}_i^T \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Στην γενική περίπτωση ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δεν είναι απλής δομής: Έστω:

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1}(\lambda - \lambda_2)^{\tau_2} \cdots (\lambda - \lambda_\rho)^{\tau_\rho}$$

όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$ και $\sum_{i=1}^{\rho} \tau_i = n$. Ο ακέραιος τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i. Τότε υπάρχει μη-ιδιάζων πίνακας P (πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων) τέτοιος ώστε: $P^{-1}AP = J$, όπου J πίνακας Jordan, $J = \operatorname{diag}\{J_1, J_2, \ldots, J_\rho\}$, $J_i \in \mathbb{C}^{\tau_i \times \tau_i}$, $i = 1, 2, \ldots, \rho$ και $J_i = \operatorname{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \ldots, J_{id_i}\}$, και όπου $d_i = \dim \mathcal{N}(\lambda_i I_n - A)$, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i, $i = 1, 2, \ldots, \rho$. Έστω $J_{ij} \in \mathbb{C}^{q_{ij}\times q_{ij}}$, $j = 1, 2, \ldots d_i$, $i = 1, 2, \ldots, \rho$. Οι ακέραιαι q_{ij} υπολογίζονται απο την χαρακτηριστική Segre και το διάγραμμα Ferrer. Έστω ότι:

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_\rho \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times m}, \ \ \hat{B}_i = \begin{bmatrix} \hat{B}_{i1} \\ \hat{B}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{B}_{id_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\tau_i \times m} \ \ \text{και} \ \ \hat{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{1ij}^T \\ \hat{b}_{2ij}^T \\ \vdots \\ \hat{b}_{q_{ij}ij}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q_{ij}\times m}$$

Θέτουμε: $\hat{b}_{q_{ij}ij}^T = \hat{b}_{\epsilon ij}^T$ (η έσχατη γραμμή του $\hat{B}_{ij}$) και ορίζουμε: ως $\hat{B}_{\epsilon i}$ τον υποπίνακα του $\hat{B}_i$, διαστάσεων $d_i \times m$, αποτελούμενο απο τις d_i έσχατες γραμμές έκαστου $\hat{B}_{ij}$, δηλαδή:

$$\hat{B}_{\epsilon i} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{\epsilon i1}^T \\ \hat{b}_{\epsilon i2}^T \\ \vdots \\ \hat{b}_{\epsilon id_i}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{d_i \times m}$$

Τότε έχουμε το πρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα: Το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \rho$, οι γραμμές κάθε πίνακα $\hat{B}_{\epsilon,i}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Απόδειξη: Το $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Rank}[\lambda I - A \mid B] = n$. Η απόδειξη βασίζεται στο παρακάτω παράδειγμα που αντιστοιχει σε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$,

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, από το οποίο η γενική περίπτωση προκύπτει εννοιολογικά εύκολα (αλλά με βασανιστικά πολύπλοκο συμβολισμό). Έστω ότι η δέσμη (A, B) σε μορφή Jordan είναι

$$[\lambda I_7 - A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} \lambda-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{111}^T \\ 0 & \lambda-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 11}^T \\ \hline 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{112}^T \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 & \hat{b}_{212}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 12}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_2 & -1 & \hat{b}_{121}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_2 & \hat{b}_{\epsilon 21}^T \end{array}\right]$$

Η δέσμη μπορεί να χάσει rank μόνο αν $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Θέτοντας $\lambda = \lambda_1$ έχουμε:

$$[\lambda_1 I_7 - A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{111}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 11}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{112}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \hat{b}_{212}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 12}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1-\lambda_2 & -1 & \hat{b}_{121}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1-\lambda_2 & \hat{b}_{\epsilon 21}^T \end{array}\right]$$

Εκτελούμε με την σειρά τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών που αφήνουν το Rank αναλλοίωτο:

- Προσθέτουμε $\hat{b}_{111}^T$ επί την δεύτερη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $\hat{b}_{112}^T$ επί την τέταρτη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $\hat{b}_{212}^T$ επί την πέμπτη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\hat{b}_{121}^T$ επί την πέμπτη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$ επί την πέμπτη στήλη στην έκτη στήλη.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\hat{b}_{\epsilon 21}^T$ επί την έβδομη στήλη στις τελευταίες m στήλες.

O rank-ισογύναμος πίνακας που προκύπτει από τους παραπάνω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς είναι:

$$[\lambda_1 I_7 - A \mid B] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 11}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 12}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1-\lambda_2 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1-\lambda_2 & 0^T \end{array}\right]$$

Έχουμε ότι $\mathrm{Rank}[\lambda_1 I_7 - A \mid B] \geq 5$ και $\mathrm{Rank}[\lambda_1 I_7 - A \mid B] = 7$ αν και μόνο αν οι δύο γραμμες: $\hat{b}_{\epsilon 11}^T$ και $\hat{b}_{\epsilon 12}^T$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θέτοντας $\lambda = \lambda_2$:

$$[\lambda_2 I_7 - A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} \lambda_2-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{111}^T \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 11}^T \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{112}^T \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & -1 & 0 & 0 & \hat{b}_{212}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 12}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \hat{b}_{121}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 21}^T \end{array}\right]$$

Εκτελούμε με τη σειρά τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών που αφήνουν το Rank αναλλοίωτο:

- Προσθέτουμε $(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}$ επί την πρώτη στήλη στην δεύτερη.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\hat{b}_{111}^T$ επί την πρώτη στήλη στις τελευταίες m στήλες.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\hat{b}_{\epsilon 11}^T$ επί την δεύτερη στήλη στις τελευταίες m στήλες
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\hat{b}_{111}^T$ επί την τρίτη στήλη στις τελευταίες m στήλες
- Προσθέτουμε $(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}$ επί την τρίτη στήλη στην τέταρτη.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\hat{b}_{212}^T$ επί την τέταρτη στήλη στις τελευταίες m στήλες
- Προσθέτουμε $(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}$ επί την τέταρτη στήλη στην πέμπτη.
- Προσθέτουμε $-(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\hat{b}_{\epsilon 12}^T$ επί την π·εμπτη στήλη στις τελευταίες m στήλες
- Προσθέτουμε $\hat{b}_{121}^T$ επί την έβδομη στήλη στις τελευταίες m στήλες

Ο rank-ισογύναμος πίνακας που προκύπτει από τους παραπάνω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς είναι:

$$[\lambda_2 I_7 - A \mid B] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|cc||c} \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{b}_{\epsilon 21}^T \end{array}\right]$$

Είναι σαφές ότι $\text{Rank}[\lambda_2 I_7 - A \mid B] \geq 6$ και $\text{Rank}[\lambda_2 I_7 - A \mid B] = 7$ αν και μόνο αν $\hat{b}_{\epsilon 21}^T \neq 0$.

Συνοψίζοντας, ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $\text{Rank}[\lambda I_7 - A \mid B] = 7$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι

$$\text{Rank}\begin{bmatrix} \hat{b}_{\epsilon 11}^T \\ \hat{b}_{\epsilon 12}^T \end{bmatrix} = 2 \ \text{ και } \ \hat{b}_{\epsilon 21}^T \neq 0$$

όπως απαιτεί το Θεώρημα. Η γενική περίπτωση προκύπτει παρομοίως. □

Παρατήρηση: Αν $m=1$ (μία είσοδος), τότε αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\Sigma_i(A,b)$ πλήρως ελέγξιμο είναι $d_1 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, \rho$.

3. Παρατηρησιμότητα

Θεωρούμε το σύστημα $\Sigma_o(A,C) : x'(t) = Ax(t), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,\ y(t) = Cx(t)$ με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Το σύστημα αντιστοιχεί σε γραμμικό ξρονικά ανεξάρτητο σύστημα με μηδενική είσοδο.

Ορισμός: Έστω το σύστημα $\Sigma_o(A,C)$. Η κατάσταση $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη αν καθορίζεται μονοσήμαντα από την έξοδο του συστήματος $y(t)$, $t \in [0, t_1]$ για κάποιο πεπερασμένο $t_1 > 0$. Το σύστημα $\Sigma_o(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη, δηλαδή αν κάθε αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ καθορίζεται μονοσήμαντα απο την έξοδο σε πετερασμένο διάστημα $[0, t_1]$.

Έστω $y(\tau) = Ce^{A\tau}x_0$ η έξοδος του συστήματος στο διάστημα $\tau \in [0, t_1]$. Επομένως,

$$e^{A^T\tau}C^T y(\tau) = e^{A^T\tau}C^T C e^{A\tau}x_0 \Rightarrow \int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^T y(\tau)d\tau = \int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^T C e^{A\tau}d\tau \cdot x_0 := W_o(0,t_1)x_0$$

όπου $W_o(0,t_1)$ είναι ο πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας. Έχουμε ότι $W_o(0,t_1) = W_o^T(0,t_1) \succeq 0$. Αν επιπλέον $W_o(0,t_1) \succ 0$, τότε

$$x_0 = W_o^{-1}(0,t_1)\int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^T y(\tau)d\tau$$

και η κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη. Επιπλέον, εφόσον η ιδιότητα αυτή ισχύει γιά αυθαίρετο ζεύγος $\left(x_9, y_{[0,t_1]}\right)$, η συνθήκη $W_o(0,t_1) \succ 0$ συνεπάγεται ότι το σύστημα $\Sigma_o(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Στην περίπτωση που ο πίνακας $W_o(0,t_1)$ είναι ιδιάζων, τότε υπάρχει $\xi \neq 0$, $W_o(0,t_1)\xi = 0$. Επομένως, αν η εξίσωση έχει λύση x_0, τότε $x_0 + \xi$ είναι επίσης λύση και η κατάσταση x_0 δεν μπορεί να καθορισθεί μονοσήμαντα και άρα δεν είναι παρατηρήσιμη.

Θεώρημα: Έστω $\Sigma_o(A,C)$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) $\Sigma_o(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

(β) Ο πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας είναι θετικά ορισμένος, δηλ. $W_o(0,t_1) \succ 0$ για κάθε $t_1 > 0$.

(γ) Ο πίνακας παρατηρησιμότητας,

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np\times n}$$

έχει $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = n$, δηλαδή οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ισοδύναμα $\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{N}_r(CA^{i-1}) = \{0\}$.

(δ) Ο πίνακας $[\lambda I_n - A^T \mid C^T]$ έχει Rank n για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ (Ισοδύναμα για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$).

(ε) Το σύστημα $\Sigma_c(A^T, C^T)$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη: Πρώτα αποδεικνύεται η ισοδυναμία (α) $\Leftrightarrow$ (γ). Η ισοδυναμία με τις υπόλοιπες σχέσεις βασίζεται στην δυικότητα που μας δίνει η (ε).

(γ) $\Rightarrow$ (α): Από την σχέση $y(t) = Ce^{At}x_0$, $t \in [0,t_1]$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 := \Gamma_o x_0$$

Εφόσον $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = n$ η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση και επομένως η κατάσταση x_0 είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Εφόσον $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο, $\Sigma_o(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

(α) $\Rightarrow$ (γ): Έστω ότι $\Sigma_o(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αλλά $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) < n$. Τότε υπάρχει $x_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε: $\Gamma_o x_0 \Rightarrow CA^i x_0 = 0$, $i \in \mathbb{N}_0$ (Cauley-Hamilton). Επομένως $y(t) = Ce^{At}x_0 = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Συμπεραίνουμε ότο το σύστημα Σ_o δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο (Η κατάσταση $x(0) = 0$ δεν μπορεί να διακριθεί απο την κατάσταση $x(0) = x_0$ με χρήση της εξόδου $y(t)$, $t \in [0,t_1]$, όσο μεγάλο $t_1 > 0$ και αν διαλέξουμε.

(α) $\Leftrightarrow$ (ε): Απο την ισοδυναμία (α) $\Leftrightarrow$ (γ) έχουμε ότι $\Sigma_o(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν:

$$\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = n \Leftrightarrow \mathrm{Rank}(\Gamma_o^T) = n \Leftrightarrow \Sigma_c(A^T, C^T) \text{ πλήρως ελέγξιμο}$$

Η ισοδυναμία με τις άλλες προτάσεις προκύπτει τώρα από το Θεώρημα Ελεγξιμότητας. $\square$

Παρατήρηση: Από την απόδειξη (γ) $\Rightarrow$ (α) προκύπτει ότι το μήκος του διάστήματος $[0, t_1]$, $t_1 > 0$ μπορει να ειναι αυθαίρετα μικρό.

3.1 Μή παρατηρήσιμος υπόχωρος

Το σύνολο των μή-παρατηρήσιμων καταστάσεων $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ ορίζεται ως το σύνολο των καταστάσεων $x_0 \in \mathbb{R}^n$ για κάθε μία από τις οποίες η αντίστοιχη συνάρτηση εξόδου $y(t) = Ce^{At}x_0 = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Προκύπτει εύκολα λόγω γραμμικότητας ότι $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $M(x_0)$ το αντίστοιχο ομοσύνολο (coset)

$$M(x_0) = x_0 + \mathcal{X}_{\bar{o}} = \{x_0 + \xi : \xi \in \mathcal{X}_{\bar{o}}\}$$

Τότε κάθε αρχική κατάσταση $x(0) \in M(x_0)$ είναι συμβατή με την έξοδο $y(t) = Ce^{At}x_0$, $t \geq 0$ και επομένως όλες οι καταστάσεις $x(0) \in M(x_0)$ είναι μη-παρατηρήσιμες αν $\mathcal{X}_{\bar{o}} \neq \{0\}$. Το επόμενο Θεώρημα ταυτίζει τον $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ με τον πυρήνα του πίνακα παρατηρησιμότητας.

Θεώρημα: Ισχύει ότι:

$$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o) \;\text{ όπου }\; \Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Επομένως το σύστημα $\Sigma_0(A, C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \{0\}$.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$, $t \geq 0$. Τότε $CA^k x_0 = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, που συνεπάγεται ότι $CA^k x_0 = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ (Cauley-Hamilton) και άρα $Ce^{At}x_0 = 0$, $t \geq 0 \Rightarrow x_0 \in \mathcal{X}_{\bar{o}}$. Αντίστροφα, $x_0 \in \mathcal{X}_{\bar{o}}$ συνεπάγεται ότι $Ce^{At}x_0 = 0$, $t \geq 0$, και επομένως $[Ce^{At}x_0]^{(k)}|_{t=0} = CA^k x_0 = 0$, $k \geq 0$, και άρα $x_0 \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

Έχουμε επίσης: $\dim(\mathcal{X}_{\bar{o}}) = \dim \mathcal{N}_r(\Gamma_o) = n - \text{Rank}(\Gamma_o)$. Άρα $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \{0\}$ αν και μόνο αν $\text{Rank}(\Gamma_o) = n$, η, ισοδύναμα αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο. $\square$

Θεώρημα: Οι ιδιότητα πλήρους παρατηρησιμότητας διατηρείται σε ισοδύναμα συστήματα.

Απόδειξη: Έστω $\Sigma_o(A, C) \sim \Sigma_o(Q^{-1}AQ, CQ)$. Τότε: $CQ(Q^{-1}AQ)^i = CQQ^{-1}A^iQ = CA^iQ$ για κάθε $i \geq 0$ και επομένως $\hat{\Gamma}_o = \Gamma_o Q \Leftrightarrow \text{Rank}(\hat{\Gamma}_o) = \text{Rank}(\Gamma_o)$. $\square$

Θεώρημα: Ο μή παρατηρήσιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ του $\Sigma_o(A, C)$ είναι ο μεγαλύτερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχεται στον $\mathcal{N}_r(C)$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι $x \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o) \Rightarrow CA^k x = 0$ $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Επομένως $(k = 0)$ $x \in \mathcal{N}_r(C)$. Επιπλέον, $A^n x \in < x, Ax, \ldots, A^{n-1}x >$ και επομένως $\Gamma_o Ax = 0 \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o) = \mathcal{X}_{\bar{o}}$. Άρα $A\mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq \mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq \mathcal{N}_r(C)$. Έστω ότι $\mathcal{V}$ είναι επίσης A-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχεται στο $\mathcal{N}_r(C)$. Τότε $x \in \mathcal{V} \Rightarrow Cx = 0$ και επομένως $CAx = CA^2x = \ldots = CA^{n-1}x = 0$. Άρα $x \in \mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$ και επομένως $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}_{\bar{o}}$. $\square$

Λήμμα (Kalman): Έστω ότι $\Sigma_o(A, C)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Τότε υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας, $\Sigma_o(A, C) \sim \Sigma_o(Q^{-1}AQ, CQ)$, $\det Q \neq 0$, τέτοιος ώστε:

$$\hat{A} := Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \;\; \hat{C} := CQ = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $\hat{C}_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$, $n_o = \text{Rank}(\Gamma_o)$ και $\Sigma_o(\hat{A}_{11}, \hat{C}_1)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

Απόδειξη: Με χρήση δυικότητας ελεγξιμότητας - παρατηρησιμότητας. $\square$

Έστω σύστημα $\Sigma(A,B,C,D)$: $x' = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, $y = Cx + Du$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Έστω επίσης ότι $\dim(\mathcal{X}_c) = \mathrm{Rank}(\Gamma_c) < n$ και $\dim(\mathcal{X}_{\bar{o}}) = n - \mathrm{Rank}(\Gamma_o) < n$. Τότε το σύστημα δεν είναι πλήρως ελεγξιμο ούτε πλήρως παρατηρήσιμο. Στην περίπτωση αυτη μπορούμε να γράψουμε τον χώρο κατάστασης ως:

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n = \mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$$

όπου: $\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c$, $\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{X}_{\bar{o}}$, $\mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{X}_{\bar{c}}$, $\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} = \mathcal{X}_o$ και όπου $\mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{X}_o \oplus \mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι οι υπόχωροι $\mathcal{X}_c$ και $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένοι και αντιστοιχούν στο $\mathcal{R}(\Gamma_c)$ και τον $\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$, αντίστοιχα. Οι υπόλοιποι ορίζονται ως εξής: (α) Ο $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ ορίζεται ως $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c \cap \mathcal{X}_{\bar{o}}$, (β) ο $\mathcal{X}_{co}$ συμπληρώνει την βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ στον $\mathcal{X}_c$, και (γ) ο $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ συμπληρώνει την βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ στον $\mathcal{X}_{\bar{o}}$. Επομένως ο $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένος, ενώ οι $\mathcal{X}_{co}$ και $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ δεν είναι.

Θα δείξουμε την ανάλυση του $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ στο παραπάνω ευθή άθροισμα των τεσσάρων υποχώρων με αλλαγή συντεταγμένων μέσω ενός μετασχηματισμού ισοδυναμίας $\Sigma(A,B,C,D) \sim \Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$. Στις νέες συντεταγμέσες το διάνυσμα κατάστασης $\hat{x}$ αναλύεται ως άθροισμα διανυσμάτων :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{co} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{x}_{\bar{c}o} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

που ανήκουν, αντίστοιχα, στους υπόχωρους $\mathcal{X}_{co}$, $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$, $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$ και $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$. Στις νέες συντεταγμένες το σύστημα $\Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$ αναλύεται σε τέσσερα συστήματα (Σ_{co}, $\Sigma_{c\bar{o}}$, $\Sigma_{\bar{c}o}$ και $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$ που αλληεπιδρούν μεταξύ τους όπως αναλύεται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα (Κανονική μορφή Kalman): Έστω σύστημα $\Sigma(A,B,C,D)$. Υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας $\Sigma(A,B,C,D) \ \sim^Q \ \Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det Q \neq 0$, τέτοιος ώστε:

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{44} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CQ = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 & \hat{C}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες:

(i) Το σύστημα:

$$\Sigma_i\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}\right)$$

είναι πλήρως ελέγξιμο.

(ii) Το σύστημα:

$$\Sigma_o\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{13} \\ 0 & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_3 \end{bmatrix}\right)$$

είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

(iii) Το σύστημα: $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο.

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στην κατασκευή βάσεων για τους κάτωθι υπόχωρους:

(i) Αρχικά ορίζουμε βάση για τον υπόχωρο $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c) \cap \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

(ii) Στην συνέχεια επιλέγουμε βάση για τον υπόχωρο $\mathcal{X}_{co}$ έτσι ώστε $\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c)$, δηλαδή επεκτείνουμε την βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ σε αυτήν του $\mathcal{R}(\Gamma_c)$.

(iii) Στην συνέχεια επιλέγουμε βάση για τον υπόχωρο $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ έτσι ώστε $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$, δηλαδή επεκτείνουμε την βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ σε αυτήν του $\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

(iv) Τέλος επιλέγουμε βάση για τον υπόχωρο $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$ έτσι ώστε $\mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{R}(\Gamma_c) \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathbb{R}^n$, δηλαδή επεκτείνουμε την βάση του $\mathcal{R}(\Gamma_c) \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ σε αυτήν του $\mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det Q \neq 0$, ως εξής:

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} q_1 & \dots & q_j & q_{j+1} & \dots & q_k & q_{k+1} & \dots & q_l & q_{l+1} & \dots & q_n \end{array}\right]$$

όπου

(i) $\{q_{j+1}, \dots, q_k\}$ βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c) \cap \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

(ii) $\{q_1, \dots, q_j\}$ βάση του $\mathcal{X}_{co}$ ώστε $\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c)$.

(iii) $\{q_{l+1}, \dots, q_n\}$ βάση του $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ ώστε $\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

(iv) $\{q_{k+1}, \dots, q_l\}$ βάση του $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$ ώστε $\mathcal{R}(\Gamma_c) \cap \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} = \mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε επίσης

$$T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \; T_1 \in \mathbb{R}^{j\times n}, \; T_2 \in \mathbb{R}^{(k-j)\times n}, \; T_3 \in \mathbb{R}^{(l-k)\times n}, \; T_4 \in \mathbb{R}^{(n-l)\times n}$$

δηλαδή αντίστοιχα με τον διαμερισμό του πίνακα Q. Έχουμε:

$$TQ = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{k-j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{l-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-l} \end{bmatrix}]$$

Ορίζουμε επίσης $\hat{A} = Q^{-1}AQ = TAQ$, $\hat{B} = Q^{-1}B = TB$, $\hat{C} = CQ = CT^{-1}$ και $\hat{A}_{ij} = T_iAQ_j$, $\hat{B}_i = T_iB$, $\hat{C}_j = CQ_j$, $(i,j) \in \{1,2,3,4\}^2$, δηλαδή:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \; \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \\ \hat{B}_4 \end{bmatrix} \; \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \hat{C}_3 & \hat{C}_4 \end{bmatrix}$$

(α) Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$

Εκ΄ κατασκευής ο υπόχωρος $\Gamma_c = \mathcal{R}([Q_1 \; Q_2])$ είναι A-αναλλοίωτος και επομένως $A[Q_1 \; Q_2] = [Q_1 \; Q_2]X$ για κάποιον πίνακα X. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} X = 0$$

(β) Ισχύει ότι: $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma_c) \subseteq \mathcal{R}([Q_1 \; Q_2])$ και άρα $B = [Q_1 \; Q_2]Y$ για κάποιον πίνακα Y. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(γ) Ο υπόχωρος $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{R}([Q_2\ Q_4])$ είναι A-αναλλοίωτος και συνεπώς $A[Q_2\ Q_4] = [Q_2\ Q_4]Z$ για κάποιον πίνακα Z. Άρα:

$$\left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{12} & \hat{A}_{14} \end{array}\right] = T_1 A \left[\begin{array}{cc} Q_2 & Q_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} Q_2 & Q_4 \end{array}\right] Z = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]$$

(δ) Έχουμε: $\hat{A}_{34} = T_3 A Q_4$. Όπως στο (γ) ο υπόχωρος $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{R}([Q_2\ Q_4])$ είναι A-αναλλοίωτος και συνεπώς $A[Q_2\ Q_4] = [Q_2\ Q_4]Z$ για κάποιον πίνακα Z. Άρα

$$\hat{A}_{34} = T_3 A Q_4 = T_3 A \left[\begin{array}{cc} Q_2 & Q_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \end{array}\right] = T_3 \left[\begin{array}{cc} Q_2 & Q_4 \end{array}\right] Z \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \end{array}\right] = 0$$

(ε) Έχουμε: $[C_2\ C_4] = C[Q_2\ Q_4]$. Όμως $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{R}([Q_2\ Q_4]) \subseteq \mathcal{N}_r(C)$ που συνεπάγεται ότι

$$\left[\begin{array}{cc} \hat{C}_2 & \hat{C}_4 \end{array}\right] = C \left[\begin{array}{cc} Q_2 & Q_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]$$

Οι ιδιότητες ελεγξιμότητας/παρατηρησιμότητας των συστημάτων

$$\Sigma_i\left(\left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{array}\right]\right),\ \Sigma_o\left(\left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{13} \\ 0 & \hat{A}_{33} \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} \hat{C}_1 & \hat{C}_3 \end{array}\right]\right) \ \text{και}\ \Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$$

που αναφέρονται στο Θεώρημα προκύπτουν απο το Λήμμα ελεγξιμότητας και το Λήμμα παρατηρησιμότητας του Kalman. □

Γ. Χαλικιάς, 5-6-2022