"Ροή" Δυναμικού συστήματος

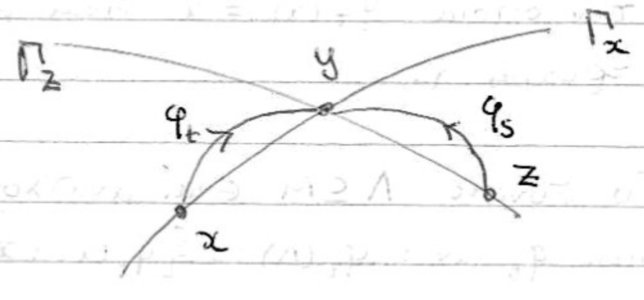
Στην προηγούμενη ενότητα συμβολίζαμε την λύση του ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, ως $u(t; x_0)$. Αν το "διανυσματικό πεδίο" $f \in C^1$, τότε η λύση $u \in C^1$ και ως προς t και ως πρός x_0. Στην ενότητα αυτή αλλάζουμε οπτική και θεωρούμε την λύση ως απεικόνιση του χώρου φάσης στον εαυτό του με παράμετρο τον χρόνο και γράφουμε $u(t; x_0) = \varphi_t(x_0)$. Αν η φ ορίζεται γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$ τό σύστημα λέγεται "πλήρες".

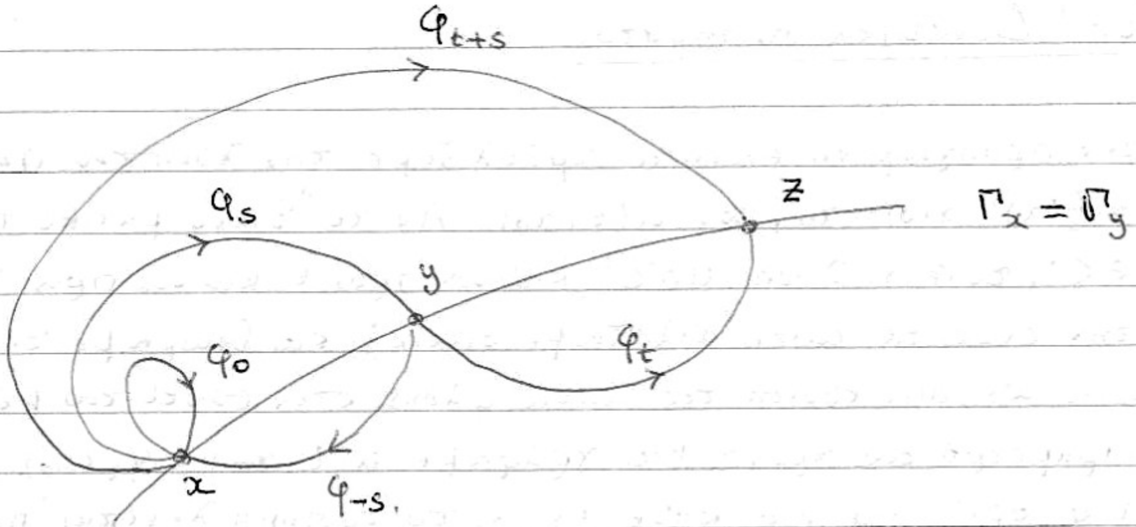
Ορισμός: Έστω M ο χώρος φάσης πλήρους δυναμικού συστήματος. Η "ροή" του συστήματος είναι μία μονο-παραμετρική, διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \times M \to M$, τέτοια ώστε:
(i) $\varphi_0(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ καί (ii) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ $\forall t, s \in \mathbb{R}$ (ιδιότητα ομάδας). Γιά κάθε $x \in M$ η $\varphi_t(x)$, $t \in \mathbb{R}$, ορίζει καμπύλη στό M (τήν τροχιά Γ_x).

Από τον ορισμό προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(I_1): $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = I$ (ταυτοτική συνάρτηση $I(x) = x$).
Ισοδύναμα $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$

(I_2): Δύο διακεκριμένες τροχιές δεν έχουν κοινό σημείο. Αν γιά κάποιο $y \in \mathbb{R}$ έχουμε $y = \varphi_t(x) = \varphi_s(z)$, τότε $\varphi_{t+r}(x) = \varphi_{s+r}(z)$ γιά κάθε $r \in \mathbb{R}$ και οι τροχιές ταυτίζονται ($\Gamma_x = \Gamma_z$).





Η "εξέλιξη" του συστήματος περιγράφεται από τροχιές (~~καμπύ~~ "ολοκληρωτικές καμπύλες") στον χώρο φάσης. Διακρίνουμε:

Θετική τροχιά: $\Gamma_x^+ = \{\varphi_t(x) : t \geq 0\}$

Αρνητική τροχιά: $\Gamma_x^- = \{\varphi_t(x) : t \leq 0\}$

Ολική τροχιά: $\Gamma_x = \Gamma_x^+ \cup \Gamma_x^-$

Ειδικές περιπτώσεις τροχιάς:

(i) Σημείο ισορροπίας: $\Gamma_x = \{x\}$

(ii) Περιοδική τροχιά: $\gamma = \Gamma_x$ όταν $\varphi_{T+t}(x) = \varphi_t(x)$ γιά κάθε t. Η ελάχιστη θετική τιμή T γιά την οποία $\varphi_T(x) = x$ είναι η περίοδος της τροχιάς γ.

Ορισμός: Το σύνολο $\Lambda \subseteq M$ είναι αναλλοίωτο ως πρός την συνάρτηση φ_t αν: $\varphi_t(\Lambda) := \{\varphi_t(x) : x \in \Lambda\} \subseteq \Lambda$ γιά

κάθε $t \in \mathbb{R}$, δηλ. αν γιά κάθε $x \in \Lambda$, $\varphi_t(x) \in \Lambda$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αν $x \in \Lambda$ όπου Λ είναι αναλλοίωτο ως πρός την φ_t, τότε $\Gamma_x \subseteq \Lambda$.
Ενα σύνολο $\Lambda \subseteq M$ είναι θετικά αναλλοίωτο αν $\varphi_t(\Lambda) \subseteq \Lambda$ γιά κάθε $t \geq 0$.

Το διανυσματικό πεδίο f που σχετίζεται με την ροή του συστήματος ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \Big|_{t=0} \qquad (*)$$

Η ροή $\varphi_t(x)$ είναι λύση του ΠΑΤ : $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$.

Λήμμα: Αν $\varphi_t(x)$ είναι συνάρτηση ροής, τότε είναι λύση του ΠΑΤ :

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(x_0) = f\left(\varphi_t(x_0)\right), \quad \varphi_0(x_0) = x_0$$

γιά διανυσματικό πεδίο f όπως ορίζεται στην εξίσωση $(*)$

Απόδειξη: Εστω $x(t) = \varphi_t(x_0)$. Παραγωγίζοντας και κάνοντας χρήση την ιδιότητα ομάδας (ii) :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\varphi_{t+\varepsilon}(x_0) - \varphi_t(x_0) \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\varphi_\varepsilon(x(t)) - \varphi_0(x(t)) \right] \\
&= f(x(t))
\end{aligned}$$

και επομένως η $\varphi_t(x_0)$ είναι λύση του ΠΑΤ. $\square$

Παράδειγμα

Έστω $\varphi_t(x_0) = x e^{\lambda t}$. Η $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι πράγματι συνεχώς διαφορίσιμη ως πρός t και x. Επιπλέον, η $\varphi_t(x)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες ροής:

(i) $\varphi_0(x) = x e^{\lambda 0} = x$,

(ii) $\varphi_t(x) = x e^{\lambda t}$, $\varphi_s(x) = x e^{\lambda s}$ και

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x) = (x e^{\lambda s}) e^{\lambda t} = x e^{\lambda(t+s)}.$$

Παραγωγίζοντας:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = \lambda x e^{\lambda t} = \lambda \varphi_t(x)$$

και επομένως τό διανυσματικό πεδίο πού σχετίζεται με τήν ροη $\varphi_t(x)$ είναι $f(x) = \lambda x$ καί η φ_t είναι λύση της εξίσωσης $x' = \lambda x$.

Παράδειγμα

Έστω $\varphi_t(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1t}(x) \\ \varphi_{2t}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 e^{-t} \\ x_2 e^{x_1(e^{-t}-1)} \end{pmatrix} \in C^1$ ως προς t και x

Έχουμε: $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \begin{bmatrix} \varphi_{1s}(x) e^{-t} \\ \varphi_{2s}(x) e^{\varphi_{1s}(x)(e^{-t}-1)} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} x_1 e^{-s} e^{-t} \\ x_2 e^{x_1(e^{-s}-1)} \cdot e^{x_1 e^{-s}(e^{-t}-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 e^{-(s+t)} \\ x_2 e^{x_1 e^{-s}} \cdot e^{-x_1} e^{x_1 e^{-(s+t)}} \cdot \cancel{e^{x_1 e}} \cdot e^{-x_1 e^{-s}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 e^{-(s+t)} \\ x_2 e^{-x_1} e^{x_1 e^{-(s+t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 e^{-(s+t)} \\ x_2 e^{x_1 (e^{-(s+t)} - 1)} \end{bmatrix}$$

$$= \varphi_{s+t}(x)$$

Παραγωγίζοντας:

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(x) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -x_1 e^{-t} \\ x_2(-x_1 e^{-t}) e^{x_1(e^{-t}-1)} \end{bmatrix} \Big|_{t=0}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_1 x_2 \end{bmatrix} = f(x).$$

Που αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_1 x_2 \end{bmatrix}. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1' + x_1 = 0 \\ x_2' + x_1 x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Η πρώτη εξίσωση έχει λύση $x_1 = x_{10} e^{-t}$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη: $x_2' = -x_{10} e^{-t} x_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{dx_2}{x_2} = -x_{10} \int e^{-t}\, dt + c$$

$$\Rightarrow \ln|x_2| = +x_{10} e^{-t} + c \quad ; \quad \ln|x_2(0)| = x_{10} + c$$

$$\Rightarrow c = \ln|x_{20}| - x_{10} \Rightarrow \ln|x_2| = x_{10} e^{-t} + \ln|x_{20}| - x_{10}$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x_{2}}{x_{20}}\right| = x_{10} e^{-t} - x_{10} \Rightarrow x_2(t) = x_{20} e^{x_{10}(e^{-t}-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} e^{-t} \\ x_{20} e^{x_{10}(e^{-t}-1)} \end{pmatrix}$$

Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

Έστω τό γραμμικό αυτόνομο σύστημα $x' = Ax$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τίς παρακάτω έννοιες ευστάθειας (προσωρινά, μόνο γιά γραμμικά συστήματα, οι ορισμοί θά γενικευτούν αργότερα).

<u>Ορισμός</u>: Τό σύστημα $x' = Ax$, $x(0) = x_0$ είναι ευσταθές αν γιά κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ η λύση $x(t) = e^{At}x_0$ είναι φραγμένη στό διάστημα $[0, \infty)$.

<u>Ορισμός</u>: Τό σύστημα $x' = Ax$, $x(0) = x_0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν γιά κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ η λύση $x(t) = e^{At}x_0 \to 0$ καθώς $t \to +\infty$.

<u>Θεώρημα</u>

(1) Τό γραμμικό αυτόνομο σύστημα $x' = Ax$ είναι ευσταθή αν καί μόνο αν

(i) $Re(\lambda_i) \leq 0$ γιά κάθε $\lambda_i \in \sigma(A)$, καί

(ii) Γιά κάθε $\lambda_i \in \sigma(A)$ μέ $Re(\lambda_i) = 0$ η γεωμετρική καί αλγεβρική πολλαπλότητα είναι ίσες, δηλ. $r_i = d_i$

(2) Τό γραμμικό αυτόνομο σύστημα $x' = Ax$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν καί μόνο αν $Re(\lambda_i) < 0$ γιά κάθε $\lambda_i \in \sigma(A)$.

<u>Απόδειξη</u> (σκιαγράφηση)

Η απόδειξη βασίζεται στίς παρακάτω παρατηρήσεις:

(1) Οι ιδιότητες ευστάθειας καί ασυμπτωτικής ευστάθειας στούς ορισμούς είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας $A \to Q^{-1}AQ$, $\det(Q) \neq 0$.

(2) Έστω $A = PJP^{-1}$ όπου P ο πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων και J ο πίνακας Jordan. Από την παρατήρηση (1) τό σύστημα $x' = Ax$ είναι ευσταθές (ασ. ευσταθές) αν καί μόνο αν τό σύστημα $y' = Jy$ είναι ευσταθές (ασ. ευσταθές).

Έστω $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\cdots(\lambda-\lambda_e)^{\tau_e}$ τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Έχουμε:

$$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \dots, J_e), \quad J_i \in \mathbb{C}^{\tau_i \times \tau_i} \quad (\Sigma \tau_i = n)$$

$J_i = \mathrm{diag}(J_{i1}, J_{i2}, \dots J_{id_i})$ και J_{ij} της μορφής

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \Rightarrow e^{J_{ij}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) Έστω $f_k(t) = t^k e^{\lambda t}$, $0 \le t < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(i) Η $f_k(t)$ είναι φραγμένη στό $[0, \infty)$ αν καί μόνο αν $(\mathrm{Re}(\lambda) < 0)$ ή $(\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ καί $k = 0)$.

(ii) $\lim_{t \to +\infty} f_k(t) = 0$ αν καί μόνο αν $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Ευσταθής, ασταθής καί κεντρικός υπόχωρος

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ορίζουμε:

$\mathcal{X}_- = \langle u_i \rangle$ όπου (u_i) τά γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του A

με $Re(\lambda_i)<0$, $\mathcal{X}_-$ είναι ο "ευσταθής υπόχωρος" του A.

$\mathcal{X}_0 = \langle u_i \rangle$, όπου (u_i) τά γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A πού αντιστοιχούν στίς ιδιοτιμές λ_i μέ $Re(\lambda_i)=0$. $\mathcal{X}_0$ είναι ο "κεντρικός υπόχωρος" του A.

$\mathcal{X}_+ = \langle u_i \rangle$, όπου (u_i) τά γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στίς ιδιοτιμές λ_i μέ $Re(\lambda_i)>0$. $\mathcal{X}_+$ είναι ο "ασταθής υπόχωρος" του A.

Ισχύει:

(α) $\mathbb{R}^n = \mathcal{X}_- \oplus \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_+$

(β) Κάθε ενας από τους τρείς υπόχωρους είναι A-αναλλοίωτος, πχ. $x \in \mathcal{X}_+ \Rightarrow Ax \in \mathcal{X}_+$, κλπ.

(γ) Αν $x_0 \in \mathcal{X}_+ \Rightarrow x(t) = e^{At}x_0 \in \mathcal{X}_+$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$. Παρόμοια γιά $\mathcal{X}_0$ καί $\mathcal{X}_-$.

Ορισμός: Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται "υπερβολικός" αν $\mathcal{X}_0 = \{\underline{0}\}$.

Ταξινόμηση γραμμικών συστημάτων στόν χώρο φάσης $\mathbb{R}^2$

Εστω $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Τότε η πραγματική μορφή Jordan του A είναι μια από τις παρακάτω.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$\lambda_i \in \mathbb{R}$	$(\omega \neq 0)$.	$\lambda_i \in \mathbb{R}$	$d_1 = 1 < 2 = \tau_1$.

Περίπτωση 1^η : $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $(\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0)$.

Σέ κανονική μορφή τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} z_1' = \lambda_1 z_1 \\ z_2' = \lambda_2 z_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_1 = z_{10} e^{\lambda_1 t}$, $z_2 = z_{20} e^{\lambda_2 t}$. Απαλείφοντας τήν μεταβλητή χρόνου (t) έχουμε:

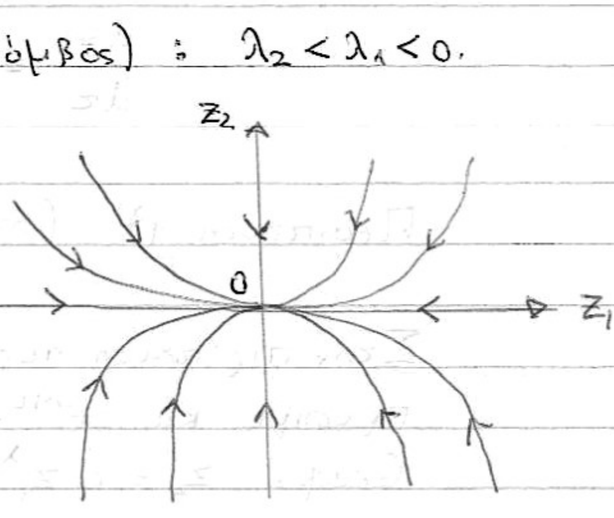
$$z_2 = z_{20} \left(e^{\lambda_1 t} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = z_{20} \left(\frac{z_1}{z_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} =$$

$$= \frac{z_{20}}{(z_{10})^{\lambda_2/\lambda_1}} z_1^{\lambda_2/\lambda_1} := c\, z_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά.

Περίπτωση 1^α (Ευσταθής κόμβος) : $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Στήν περίπτωση αυτή $e^{\lambda_1 t} \to 0$ και $e^{\lambda_2 t} \to 0$ καθώς $t \to +\infty$. Η λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Τό διάγραμμα φάσης:



Οι τροχιές συγκλίνουν στό O εφαπτομενικά στον z_1 άξονα. (που αντιστοιχεί στό ιδιοδιάνυσμα της "αργής" ιδιοτιμής). Πράγματι:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, z_1^{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)} \qquad \text{μέ} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1 > 0.$$

Αρα: $$\lim_{|z_1|\to 0} \frac{dz_2}{dz_1} = 0$$

Στό οριο $t \to -\infty$ οι τροχιές του συστήματος τείνουν σε διεύθυνση παράλληλη μέ τόν αξονα z_2 που αντιστοιχεί στην διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος της ιδιοτιμής λ_2. Παρατηρούμε επίσης οτι αν ~~$z_0 \in$~~ $z_0 \in u_i$ $(i=1,2)$ οπου $u_1=(1,0)^T$ καί $u_2=(0\ 1)^T$ τά δύο ιδιοδιανύσματα τοτε $z(t) \in \underline{u}_i$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Περιπτωση 1^β (ασταθής κόμβος) : $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

Τό διάγραμμα φάσης είναι τό ιδιο αλλά η διεύθυνση των τροχιών (βέλη που υποδηλώνουν αύξηση χρόνου) αντιστρέφονται. Στήν περίπτωση αυτή εχουμε $J \to -J$ καί θέτοντας $\tau = -t$ έχουμε

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{d(-t)} = -\frac{dz}{dt} = -Jz$$

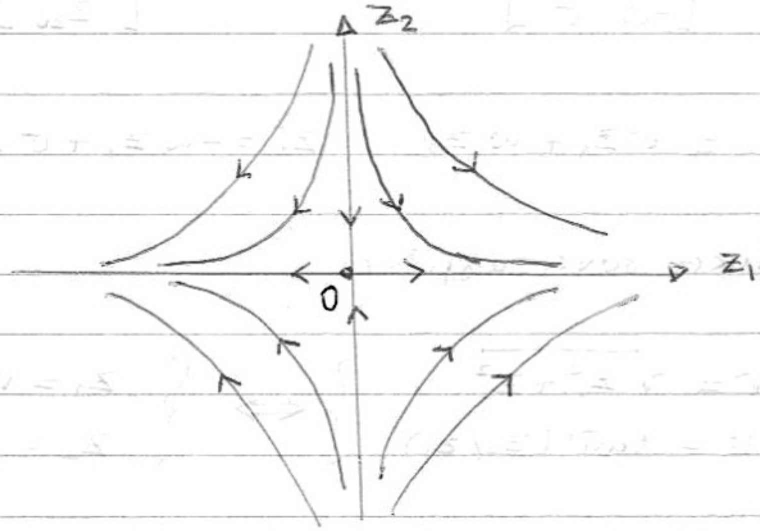
Περιπτωση 1^γ (σαγματικό σημείο) : $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

Στήν περίπτωση αυτή οι ιδιοτιμές έχουν αντίθετο πρόσημο και $e^{\lambda_1 t} \to +\infty$, $e^{\lambda_2 t} \to 0$ καθώς $t \to +\infty$. Εχουμε $z_2 = c\, z_1^{\lambda_2/\lambda_1}$ μέ εκθέτη $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ καί οι

τροχιές στό επίπεδο φάσης προσομοιάζουν μέ υπερβολές.
Από τήν σχέση

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c\,\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1<0$$

συμπεραίνομε ότι οι τροχιές εφάπτονται στόν άξονα z_1 καθώς $|z_1|\to\infty$ καί στόν ~~όριο~~ άξονα z_2 στό όριο $|z_1|\to 0$.
Η μόνη εξαίρεση στίς υπερβολικές τροχιές είναι οι 4 τροχιές στούς άξονες z_1 καί z_2 (από δύο σέ κάθε ημιάξονα). Οι τροχιές στόν άξονα z_2 λέγονται ευσταθείς τροχιές καί οι δύο τροχιές στόν άξονα των z_1 ασταθείς.



Περίπτωση $2^η$: Μιγαδικές (συζυγείς) ιδιοτιμές $\lambda_{1,2}=\sigma\pm i\omega$ $(\omega\neq 0)$.

Στήν περίπτωση αυτή οι ιδιοτιμές είναι (αναγκαστικά) διακεκριμένες καί ο πίνακας είναι απλής δομής. Έστω $(\sigma\pm i\omega,\ x\pm iy)$ τά ζεύγη ιδιοτιμών - ιδιοδιανυσμάτων. Τότε

$$A(x+iy) = (\sigma+i\omega)(x+iy) \Rightarrow \left.\begin{aligned} Ax &= \sigma x - \omega y \\ Ay &= \omega x + \sigma y \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad A\,[x\,\vdots\,y] = [x\,\vdots\,y]\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}.$$

Άρα η εξίσωση γράφεται:

$$\underline{u}' = A\underline{u} \Rightarrow \underline{u}' = [x\,\vdots\,y]\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}[x\,\vdots\,y]^{-1}\underline{u}$$

Με αλλαγή μεταβλητών: $\underline{z} = [x\,\vdots\,y]^{-1}\underline{u}$ έχουμε:

$$\underline{z}' = \begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}\underline{z} \quad , \quad \underline{z}(0) = \begin{bmatrix} z_{10}\\ z_{20}\end{bmatrix}$$

δηλ.

$$z_1' = \sigma z_1 + \omega z_2 \quad , \quad z_2' = -\omega z_1 + \sigma z_2$$

Σε πολικές συντεταγμένες

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\\ \theta &= \tan^{-1}(z_2/z_1)\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} z_1 &= r\cos\theta\\ z_2 &= r\sin\theta\end{aligned}\right.$$

Παραγωγίζοντας:

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= r'\cos\theta - r\sin\theta\cdot\theta'\\ z_2' &= r'\sin\theta + r\cos\theta\cdot\theta'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1'\\ z_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r'\\ \theta'\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r'\\ \theta'\end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1'\\ z_2'\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{r}}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cancel{r}\cos\theta\\ \cancel{r}\sin\theta\end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma\cos\theta + \omega\sin\theta \\ -\omega\cos\theta + \sigma\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\sigma\cos^2\theta + r\omega\cancel{\cos\theta\sin\theta} - r\omega\cancel{\sin\theta\cos\theta} + r\sigma\sin^2\theta \\ -\sigma\cancel{\sin\theta\cos\theta} - \omega\sin^2\theta - \omega\cos^2\theta + \sigma\cancel{\cos\theta\sin\theta} \end{bmatrix}$$

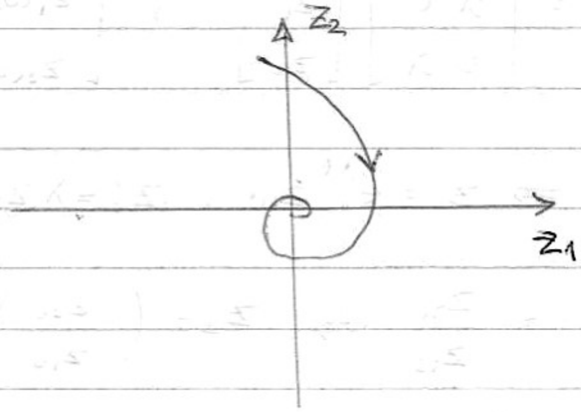
$$= \begin{bmatrix} r\sigma \\ -\omega \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r' = r\sigma \quad \text{καί} \quad \theta' = -\omega$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \int \frac{dr}{r} = \int \sigma\, dt + c' \Rightarrow \ln r = \sigma t + c' \Rightarrow r = r_0 e^{\sigma t} \\ &\theta = -\omega t + \theta_0 \end{aligned}\right\}$$

<u>Περίπτωση 2^α</u> $(\sigma<0)$ "Ευσταθής εστία"

Όταν $\sigma<0 \Rightarrow r(t) \to 0$ καθώς $t \to +\infty$



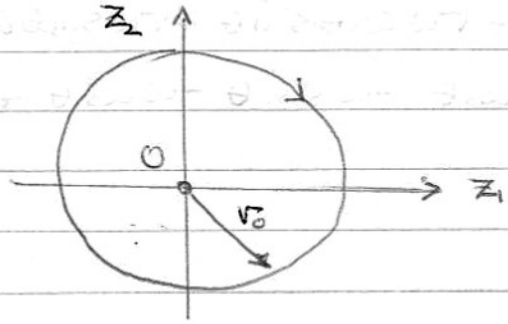
$\omega>0$: "Δεξιόστροφος" έλικας (αριστερόστροφος αν $\omega<0$).

<u>Περίπτωση 2^β</u> $(\sigma>0)$ "Ασταθής εστία"

Όταν $\sigma>0 \Rightarrow r(t) \to +\infty$ στο όριο $t \to +\infty$.

Περίπτωση 2γ $\sigma = 0$: "Κέντρο" (φανταστικές ιδιοτιμές)

$\sigma = 0 \Rightarrow r(t) = r_0$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$. (αρμονικός ταλαντωτής)



Περίπτωση 3η : Μή μηδενικές ίσες ιδιοτιμές ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$)

Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

Περίπτωση 3α : Ο A απλής δομής. (J διαγώνιος).

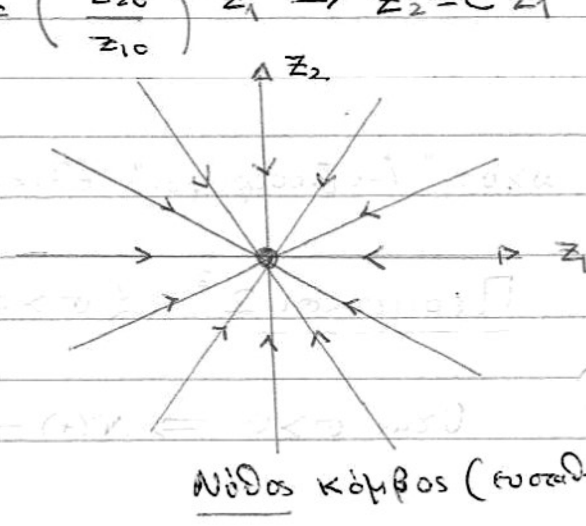
Σέ κανονική μορφή τό σύστημα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow z_1' = \lambda z_1 \Rightarrow z_1 = e^{\lambda t} z_{10} , \quad z_2' = \lambda z_2 \Rightarrow z_2 = e^{\lambda t} z_{20}$$

Αρα: $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_{20}}{z_{10}} \Rightarrow z_2 = \left(\dfrac{z_{20}}{z_{10}}\right) z_1 \Rightarrow z_2 = c\, z_1$

($c \in \mathbb{R}$ αυθαίρετο). Τό διάγραμμα φάσης αποτελείται από ευθείες πού περνάν από τήν αρχή των αξόνων (μέ διεύθυνση πρός τό O αν $\lambda < 0$ η αντίστροφα αν $\lambda > 0$)



Νόθος κόμβος (ευσταθής)

Περίπτωση 3β (A μή-απλής δομής)

Οι εξισώσεις γράφονται:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{z}(0) = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1 + z_2 \\ z_2' &= \lambda z_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1 + e^{\lambda t} z_{20} \\ z_2 &= e^{\lambda t} z_{20} \end{aligned} \right\}.$$

Γιά την πρώτη εξίσωση: Γενική λύση ομογενούς $z_1 = Ae^{\lambda t}$
Ειδική λύση μή ομογενούς: $\hat{z}_1 = Bte^{\lambda t} \Rightarrow \hat{z}_1' = Be^{\lambda t} + B\lambda t e^{\lambda t}$
$\Rightarrow Be^{\lambda t} + \cancel{B\lambda t e^{\lambda t}} = \cancel{\lambda B t e^{\lambda t}} + e^{\lambda t} z_{20} \Rightarrow B = z_{20}$
Αρα γενική λύση: $z_1 = Ae^{\lambda t} + z_{20} t e^{\lambda t}$, $z_1(0) = z_{10} = A$
και επομένως $z_1(t) = z_{10} e^{\lambda t} + z_{20} t e^{\lambda t}$. Τελικά:

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{10} e^{\lambda t} + z_{20} t e^{\lambda t} \\ z_{20} e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Επομένως: $e^{\lambda t} = \dfrac{z_2}{z_{20}} \Rightarrow t = \dfrac{1}{\lambda} \ln\left(\dfrac{z_2}{z_{20}}\right)$.

$$\Rightarrow z_1 = e^{\lambda t}(z_{10} + z_{20} t) = \frac{z_2}{z_{20}} \left(z_{10} + \frac{z_{20}}{\lambda} \ln\left(\frac{z_2}{z_{20}}\right) \right)$$

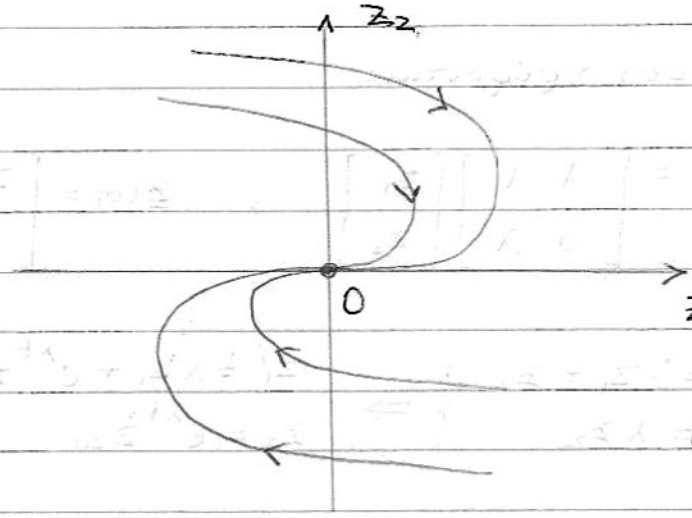
Επίσης:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_{20}}{z_{10} + z_{20} t} = \frac{1}{\left(\frac{z_{10}}{z_{20}}\right) + t}$$

και $\displaystyle \lim_{|t| \to \infty} \frac{z_2}{z_1} = 0$. Επίσης:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{\lambda z_2}{\lambda z_1 + z_2} = \frac{\lambda \frac{z_2}{z_1}}{\lambda + \frac{z_2}{z_1}} \longrightarrow 0 \quad \text{στό όριο } |t| \to \infty$$

Διάγραμμα φάσης



Νόθος κόμβος
(ευσταθής)

Ασυμπτωτικά οι τροχιές έχουν οριζόντια διεύθυνση στό όριο $|t|\to\infty$. Αν $\lambda<0$ ο νόθος κόμβος είναι ευσταθής, ενώ όταν $\lambda>0$ ασταθής. (οι τροχιές κατευθύνονται ~~προς~~ πρός ~~τό~~ τό σημείο O η πρός τήν αντίθετη κατεύθυνση).

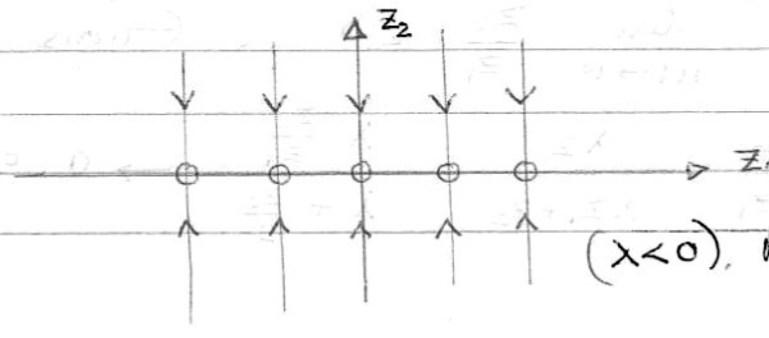
Περίπτωση $4^{η}$ (Μια τουλάχιστον μηδενική ιδιοτιμή).

Περίπτωση $4^{α}$: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda\neq 0$.

$$z'=\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \implies \left.\begin{aligned} z_1' &= 0 \\ z_2' &= \lambda z_2 \end{aligned}\right\}.$$

Σημεία ισορροπίας: $z_2=0$, κάθε σημείο του z_1-άξονα είναι σημείο ισορροπίας.

Έχουμε $z_1=c$, $z_2=e^{\lambda t}z_{20}$. Διάγραμμα φάσης:



($\lambda<0$). Αντιστροφή διεύθυνσης για $\lambda>0$.

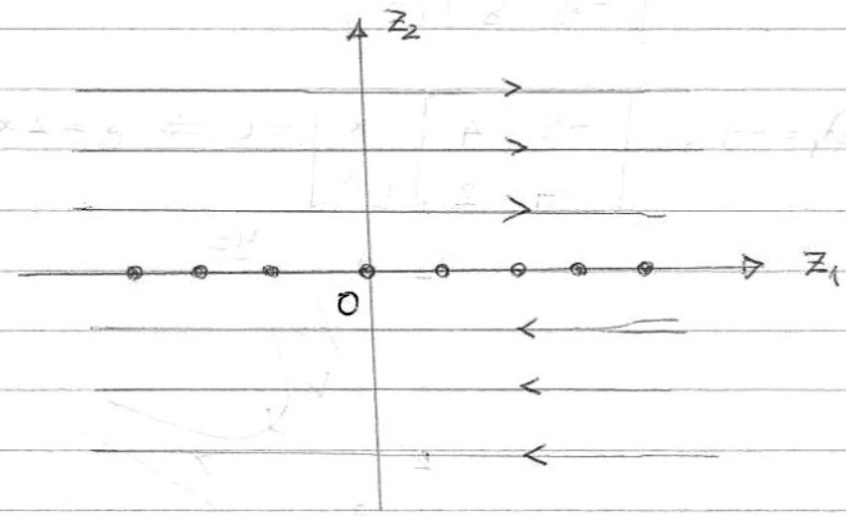
Περίπτωση 4β : Δύο μηδενικές ιδιοτιμές $\lambda_1=\lambda_2=0$
(περίπτωση Jordan).

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1' = z_2 \ , \ z_2' = 0$$

Άρα $z_2 = c$, $z_1' = c \Rightarrow z_1 = ct + d$ $\quad c, d \in \mathbb{R}$.

$z_2 = z_{20}$, $z_1 = z_{20} t + z_{10}$

Κάθε σημείο του z_1-άξονα είναι σημείο ισορροπίας.



Περίπτωση 4γ : Δύο μηδενικές ιδιοτιμές ($A=0$).
Κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ είναι σημείο ισορροπίας.

Παράδειγμα.

Να μελετηθεί το διάγραμμα φάσης του συστήματος

$$x' = Ax \ , \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του A.

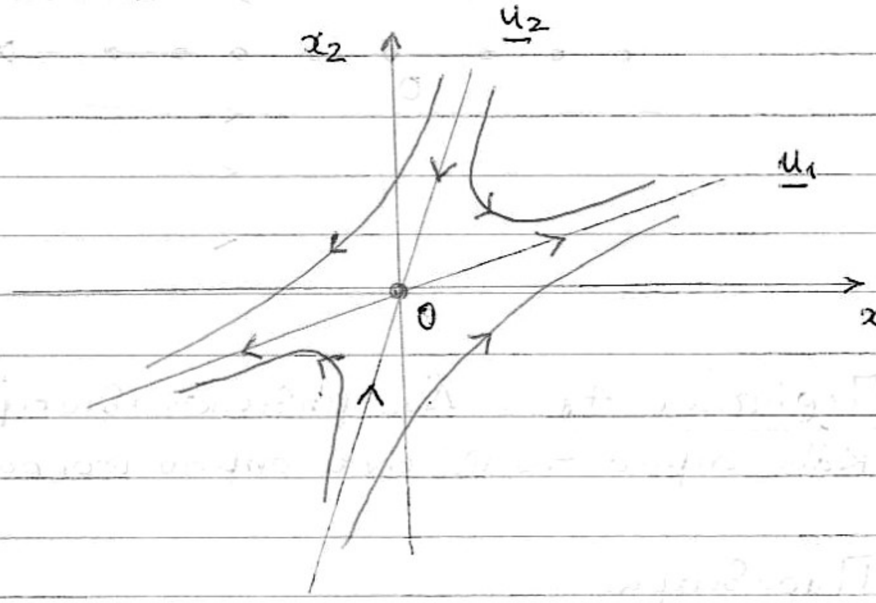
$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-5 & 4 \\ -4 & \lambda+5 \end{bmatrix}.$$

$$= \lambda^2 - 25 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3$$

Οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες, άρα $x=0$ είναι σαγματικό σημείο. Τα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$\lambda_1 = 3: \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 2\beta,\ \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3: \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \beta = 2\alpha,\ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα.

Να μελετηθεί το διάγραμμα φάσης για το γραμμικό σύστημα

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} x \quad := Ax$$

Ιδιοτιμές:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -8 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 16$$

$$= (\lambda+4i)(\lambda-4i) = 0 \Rightarrow \lambda = 4i \,,\ \bar{\lambda} = -4i$$

Ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda = 4i \ : \ \begin{bmatrix} 4i & 2 \\ -8 & 4i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow 8\alpha = 4i\beta \Rightarrow 2\alpha = i\beta$$

$$u = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αρα:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{z}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}$$

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}$$

$$\Rightarrow z_1' = 4z_2 \,,\ z_2' = -4z_1$$

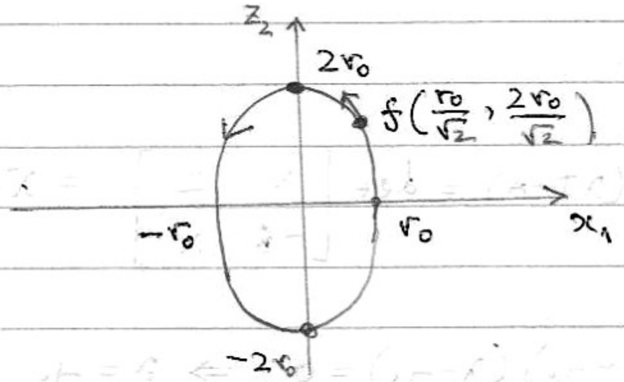
Αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες:

$$r^2 = z_1^2 + z_2^2 \Rightarrow 2rr' = 2z_1z_1' + 2z_2z_2' = 2z_1(4z_2) + 2z_2(-4z_1)$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow r' = 0 \Rightarrow r^2 = \cancel{c} = r_0^2 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = r_0^2$$

Στις αρχικές συντεταγμένες: $z_1 = \frac{1}{2}x_2$, $z_2 = x_1$, αρα

$$z_1^2 + z_2^2 = \frac{1}{4}x_2^2 + x_1^2 = r_0^2 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2r_0}\right)^2 = 1$$



Γιά νά βρούμε την διεύθυνση της τροχιάς (x_1, x_2) πού αντιστοιχεί σέ σύστημα $(x_1' = -2x_2,\ x_2' = 8x_1)$ υπολογίζουμε τό (x_1', x_2') σέ τυχαίο σημείο, π.χ. $(x_1, x_2) = \left(\frac{r_0}{\sqrt{2}}, \frac{2r_0}{\sqrt{2}}\right)$. Τότε

$$(x_1', x_2') = \left(\frac{-4r_0}{\sqrt{2}}, \frac{8r_0}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4r_0}{\sqrt{2}}(-1, 2)$$

και επομένως η ροή είναι αριστερόστροφη.

<u>Παρατήρηση</u> (ευαισθησία ταξινόμησης σέ μικρές παραμετρικές διαταραχές).

Οι ιδιοτιμές πίνακα είναι συνεχείς συναρτήσεις των στοιχείων του, επομένως αυθαίρετα μικρές διαταραχές $\|\delta A\|$, $A \to A + \delta A$ σέ πίνακα A μέ φανταστικές ιδιοτιμές μπορεί νά αλλάξουν τά ποιοτικά χαρακτηριστικά του διαγράμματος φάσης (σέ αντίθεση μέ υπερβολικά σ.ι. πού είναι "δομικά ευσταθή"). Για παράδειγμα, έστω σύστημα

$$z' = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu = 0,\ \omega \neq 0$$

με ιδιοτιμές $\lambda = \pm i\omega$. Αν $\mu \neq 0$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = \mu \pm i\omega$ και τό σ.ι. από "κέντρο" μεταβάλλεται σέ εστία (ευσταθή ή ασταθή ανάλογα αν $\mu < 0$ ή $\mu > 0$ αντίστοιχα). Ανάλογα, περιμένουμε τά ποιοτικά χαρακτηριστικά γραμμικοποιημένου συστήματος νά διατηρούνται (τοπικά) μόνο γιά υπερβολικά συστήματα όπου $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0\}$.

Θεώρημα Taylor (στον $\mathbb{R}^n$)

Έστω $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Αν $f \in C^1$ στο D και $\|x-y\|$ αρκούντως μικρό, τότε

$$f(y) = f(x) + Df(x)(y-x) + R(x,y)$$

όπου: $$\lim_{y \to x} \frac{R(x,y)}{\|y-x\|} = 0 \qquad \square$$

Έστω x^* σημείο ισορροπίας της $x' = f(x)$ στο D, δηλ. $f(x^*) = 0$. Έστω $y = x^* + h$. Τότε

$$h' = f(x^*+h) = f(x^*) + Df(x^*)h + R(x^*, y),$$

όπου: $$\lim_{h \to 0} \frac{R(x^*, x^*+h)}{\|h\|} = 0$$

Εφόσον $f(x^*) = 0$ και γράφοντας $R(x^*, x^*+h) := R_1(h)$ έχουμε (ως προς τις τοπικές συντεταγμένες με κέντρο το x^*)

$$h' = Df(x^*)h + R_1(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{R_1(h)}{\|h\|} = 0$$

Το γραμμικοποιημένο σύστημα ορίζεται ως:

$$h' = Df(x^*)h$$

όπου $Df(x^*)$ ο πίνακας Jacobian της f στο σημείο ισορροπίας x^*.

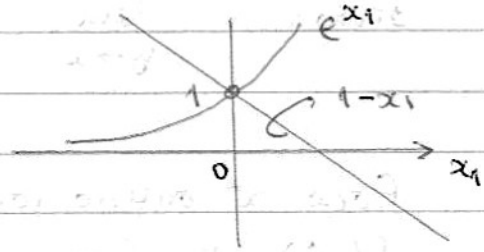
Παράδειγμα: Να βρεθεί το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από κάθε σ.ι. αν

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1 \\ -x_2 - x_2 e^{x_1} \end{bmatrix}$$

Τα σ.ι είναι λύσεις του συστήματος $f_1(x_1,x_2)=0$ καί $f_2(x_1,x_2)=0$. Έχουμε

$$f_2(x_1,x_2)=0 \Rightarrow x_2(1+e^{x_1})=0 \Rightarrow x_2=0 \Rightarrow e^{x_1}=1-x_1$$

$\Rightarrow x_1=0$. Άρα τό μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι τό $x^*=(0,0)$.



Ο πίνακας Jacobian:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_1,x_2)=x^*=(0,0)} = \begin{bmatrix} 1+e^{x_1} & 4 \\ -x_2 e^{x_1} & -1-e^{x_1} \end{bmatrix}_{(0,0)}$$

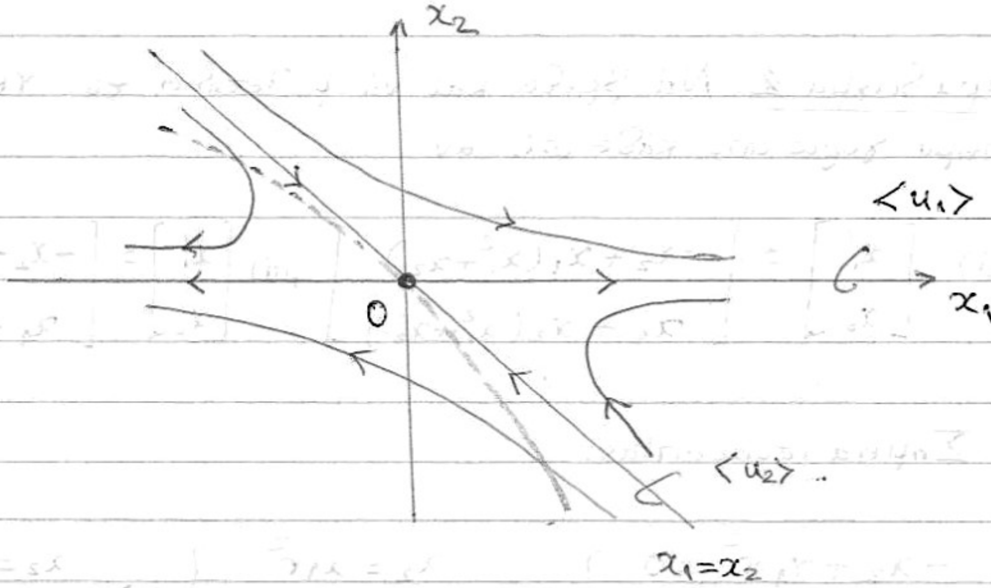
$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$ με ιδιοτιμές $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$. Άρα τό σ.ι $x^*=(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Ιδιοδιανύσματα: $(\lambda I - A)\underline{u}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-2 & -4 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0$

Γιά $\lambda_1=2$: $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \beta=0$, $u_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Γιά $\lambda_2=-2$: $\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha+\beta=0$, $u_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Τό διάγραμμα φάσης γιά τό γραμμικοποιημένο σύστημα:



Γιά τό μή γραμμικό σύστημα: $x_2 = 0 \Rightarrow x_2' = 0$, άρα ο άξονος x_1 παραμένει μέρος ~~της~~ του διαγράμματος φάσης. Στόν άξονα x_1 έχουμε

$$x_1' = e^{x_1} - (1 - x_1) \quad \left.\begin{matrix} > 0 & \text{αν } x_1 > 0 \\ < 0 & \text{αν } x_1 < 0 \end{matrix}\right\}$$

παρόμοια μέ τό γραμμικοποιημένο σύστημα. Επίσης:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{-x_2 - x_2 e^{x_1}}{x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1} \quad \text{καί}$$

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{x_2 = -x_1} = \frac{x_1(1 + e^{x_1})}{-3x_1 + e^{x_1} - 1} \simeq \frac{x_1 + x_1(1 + x_1)}{-3x_1 + (1 + x_1) - x_1}$$

$$= \frac{2x_1 + x_1^2}{-2x_1} = -1 - \frac{1}{2}x_1$$

μέ την προσέγγιση $e^{x_1} \simeq 1 + x_1$ (γιά μικρό $|x_1|$ κοντά στό σημείο ισορροπίας). Έχουμε:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{x_2 = -x_1} \simeq -1 - \frac{1}{2}x_1 \quad \left.\begin{matrix} < -1 & \text{γιά } x_1 > 0 \\ > -1 & \text{γιά } x_1 < 0 \end{matrix}\right\}.$$

Παράδειγμα 2 Νά βρεθεί καί νά μελετηθεί τό γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από κάθε σ.ι. αν

(i) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_1(x_1^2+x_2^2) \\ x_1 + x_2(x_1^2+x_2^2) \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1(x_1^2+x_2^2) \\ x_1 - x_2(x_1^2+x_2^2) \end{bmatrix}$

(i) Σημεία ισορροπίας:

$$\left.\begin{aligned} -x_2 + x_1 r^2 &= 0 \\ x_1 + x_2 r^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 r^2 \\ x_1 + x_1 r^4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Αρα $(x_1^*, x_2^*) = x^* = (0,0)$ τό μοναδικό σ.ι. Πίνακας Jacobian:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x^*} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 & -1 + 2x_1x_2 \\ 1 + 2x_1x_2 & x_1^2 + 3x_2^2 \end{bmatrix}_{(0,0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm i$, αρα σ.ι. "κέντρο" που αντιστοιχεί σέ περιοδική λύση.

Ανάλυση μή γραμμικού συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -x_2 + x_1 r^2 \\ x_2' &= x_1 + x_2 r^2 \end{aligned}\right\}.$$

Αλλαγή σέ πολικές συντεταγμένες:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = -r\sin\theta + r^3\cos\theta \\ x_2' &= r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = r\cos\theta + r^3\sin\theta \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

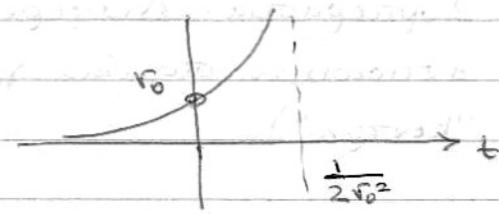
$$\left.\begin{aligned} (1)\cos\theta + (2)\sin\theta &: \ r' = r^3 \\ (1)\sin\theta - (2)\cos\theta &: \ -r\theta' = -r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} r' &= r^3 \\ \theta' &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Έχουμε $r \to \infty$ καθώς $t \to \frac{1}{2r_0^2}$ ("έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο).

Αναλυτική λύση:

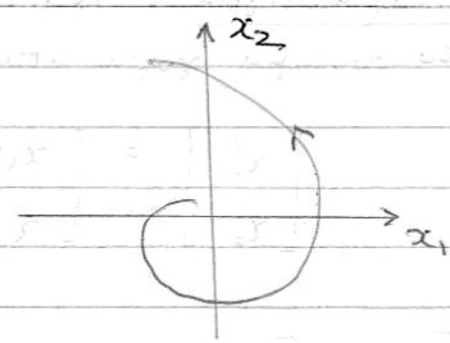
$$\int \frac{dr}{r^3} = \int dt + c \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2} = t + c \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2} - 2t$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 2t}}$$



Η λύση για το θ: $\theta = t + \theta_0$

Το διάγραμμα φάσης:



Τοπικά το διάγραμμα φάσης προσομοιάζει "ασταθή εστία"

(ii) Με παρόμοιους υπολογισμούς το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι πάλι το $x^* = (0,0)$ και ο πίνακας Jacobian του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι πάλι το ίδιο:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\lambda = \pm i$ και σ.ι. είναι "κέντρο", όπως στην περίπτωση (i).

Μέ παρόμοιο τρόπο, οι εξισώσεις τού μή-γραμμικού συστήματος σε πολικες συντεταγμένες είναι:

$$r' = -r^3 \quad \text{καί αρα} \quad r \to 0 \text{ καθως } t \to +\infty. \text{ (αναλυτική λύση } r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} + 2t}} \text{).}$$

$$\theta' = 1 \Rightarrow \theta = t + \theta_0$$

Στην περίπτωση αυτή τά χαρακτηριστικά του συστήματος προσομοιάζουν μέ "ευσταθή εστία".

<u>Συμπέρασμα</u>: Διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά αντιστοιχούν στο ίδιο γραμμικοποιημένο σύστημα (στην περίπτωση "κέντρου").

<u>Παράδειγμα</u>: Νά γραμμικοποιηθεί καί νά μελετηθεί τό σύστημα γύρω από κάθε σ.ι.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1-r^2) - x_2 \\ x_2(1-r^2) + x_1 \end{bmatrix}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Σημεία Ισορροπίας: $x_2 = x_1(1-r^2)$, $x_1 = -x_2(1-r^2)$

Αρα: $x_1 + x_1(1-r^2)^2 = 0 \Rightarrow x_1[1+(1-r^2)^2] = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$. Αρα $x^* = (0,0)$ μοναδικό σ.ι. $(r=0)$.

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \cancel{2} r r' = \cancel{2} x_1 x_1' + \cancel{2} x_2 x_2' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2} r r' = x_1[x_1(1-r^2) - \cancel{x_2}] + x_2[x_2(1-r^2) + \cancel{x_1}]$$
$$= (x_1^2 + x_2^2)(1-r^2) = r^2(1-r^2).$$

$$\Rightarrow r' = r(1-r^2).$$

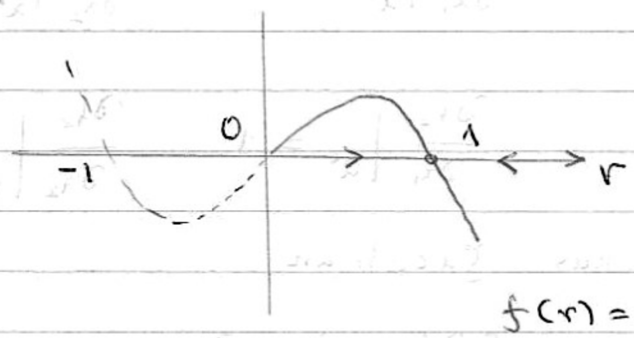
Επίσης

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \tan^{-1}(\psi), \quad \psi = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\theta' = \frac{1}{1+\psi^2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\,\frac{x_2' x_1 - x_1' x_2}{x_1^2}$$

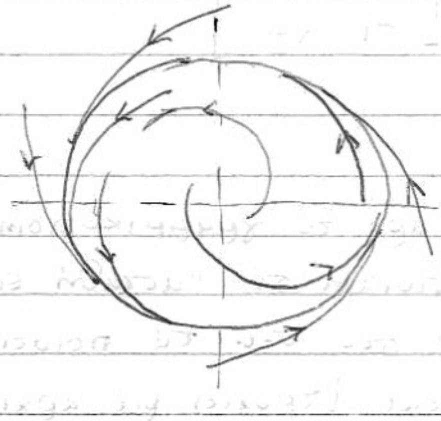
$$= \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}\,\frac{\left(x_2(1-r^2)+x_1\right)x_1 - x_2\left(x_1(1-r^2)-x_2\right)}{x_1^2}$$

$$= 1 \Rightarrow \theta(t) = t + \theta_0$$



$f(r) = r(1+r)(1-r)$

Αν $r_0 = 1 \Rightarrow r' = 0 \Rightarrow r(t) = 1$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$ καί $\theta = t + \theta_0$. Περιοδική τροχιά στον μοναδιαίο κύκλο.



Αν $r_0 < 1$ η $r_0 > 1$ $(r_0 \neq 0)$ η τροχιά "συγκλίνει" στην περιοδική τροχιά $(r, \theta) = (1, t+\theta_0)$ υπό την έννοια ότι $\mathrm{dist}(x, C(0,1)) \to 0$ όπου $\mathrm{dist}(x, C(0,1)) = \inf\{\|x - z\| : z \in C(0,1)\}$

Ο κύκλος $C(0,1)$ λέγεται "οριακός κύκλος". Τό σημείο ισορροπίας $x^* = (0,0)$ είναι ασταθές.

Γραμμική ανάλυση (γραμμικοποίηση)

$$f_1(x_1,x_2) = x_1(1-x_1^2-x_2^2) - x_2$$
$$f_2(x_1,x_2) = x_2(1-x_1^2-x_2^2) + x_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1-3x_1^2-x_2^2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -2x_1x_2-1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2x_1x_2+1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 1-x_1^2-3x_2^2$$

Επομένως

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x^*} = 1 \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x^*} = -1$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x^*} = 1 \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x^*} = 1$$

Και ο πίνακας Jacobian

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=x^*} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)^2+1=0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

Έχουμε $Re(\lambda_{1,2}) = 1 > 0$, άρα το γραμμικοποιημένο σύστημα έχει σ.ι. που αντιστοιχεί σε "ασταθή εστία". Παρατηρούμε ότι "κοντά" στο σ.ι. τα ποιοτικά χαρακτηριστικά διατηρούνται (τροχιές με αρχική συνθήκη εντός του μοναδιαίου κύκλου – με εξαίρεση το (0,0) – "συγκλίνουν" στον οριακό κύκλο $r=1$.

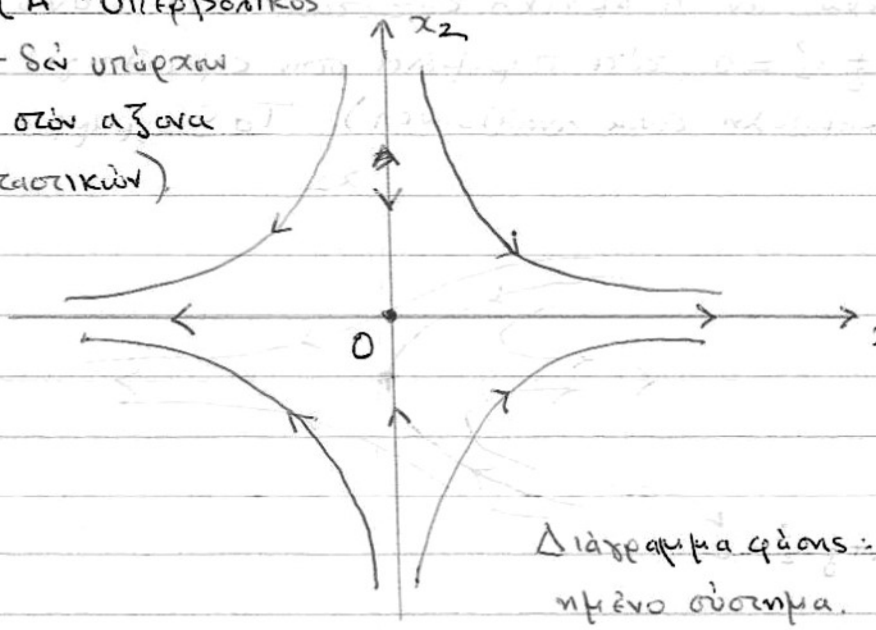
Παράδειγμα: Νά βρεθεί καί νά αναλυθεί τό γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από κάθε σημείο ισορροπίας.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}$$

Σημεία ισορροπίας: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Αρα τό $x^* = (0,0)$ είναι τό μόνο σημείο ισορροπίας. Γραμμικοποιημένο σύστημα έχει πίνακα Jacobian:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Καί αρα τό $x^* = (0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. Τά ιδιοδιανύσματα είναι $[1\ 0]^T$ καί $[0\ 1]^T$ πού αντιστοιχούν ~~αν~~ στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ καί $\lambda = -1$. Το σ.ι. $x^* = (0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. (Α "υπερβολικός" πίνακας - δέν υπάρχει ιδιοτιμή στόν αξονα των φανταστικών)



Διάγραμμα φάσης: Γραμμικοποιημένο σύστημα.

Τό μή γραμμικό σύστημα μπορεί νά λυθεί αναλυτικα: Οι εξισώσεις γράφονται ως εξής:

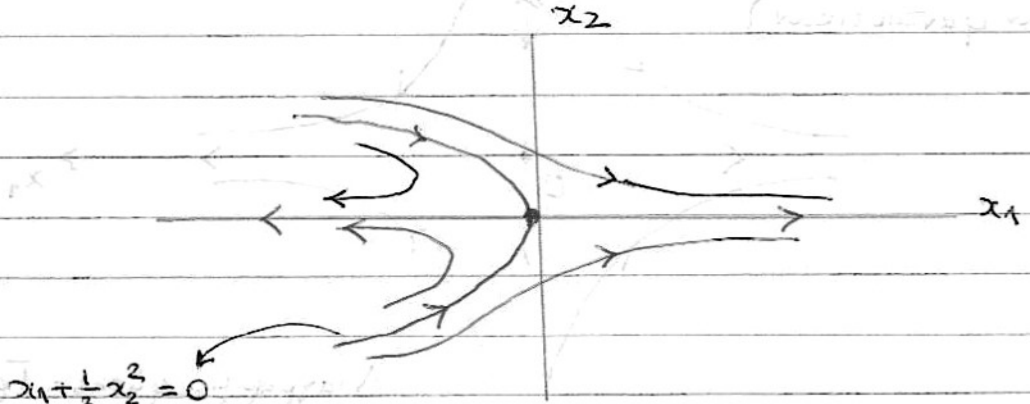
$x_2' = -x_2 \Rightarrow x_2(t) = e^{-t} x_{20}$,

$x_1' = x_1 + x_2^2 \Rightarrow x_1' - x_1 = e^{-2t} x_{20}^2$: Γενική λύση ομογενούς $x_1 = Ae^t$. Ειδική λύση (μή ομογενούς) της μορφής $x_1 = Be^{-2t}$
$\Rightarrow -2Be^{-2t} - Be^{-2t} = e^{-2t} x_{20}^2 \Rightarrow B = -\frac{1}{3} x_{20}^2$. Άρα γενική λύση (μή ομογενούς) : $x_1 = Ae^t - \frac{1}{3} x_{20}^2 e^{-2t}$. Αρχική συνθήκη : $t=0$, $x_1 = x_{10} \Rightarrow x_{10} = A - \frac{1}{3} x_{20}^2 \Rightarrow A = (x_{10} + \frac{1}{3} x_{20}^2)$.
Άρα: $x_1 = (x_{10} + \frac{1}{3} x_{20}^2) e^t - \frac{1}{3} x_{20}^2 e^{-2t}$.

Παρατηρούμε ότι αν $x_{10} + \frac{1}{3} x_{20}^2 = 0$, $x_1(t) = -\frac{1}{3} x_{20}^2 e^{-2t}$ και $x_1(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$. Στην περίπτωση αυτή η λύση είναι:

$$x_1(t) = -\frac{1}{3} x_{20}^2 e^{-2t}, \quad x_2(t) = e^{-t} x_{20}$$

και $x_1(t) = -\frac{1}{3} x_{20}^2 \left(\frac{x_2(t)}{x_{20}} \right)^2 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3} x_2^2$ και επομένως αν η αρχική κατάσταση είναι πάνω στην καμπύλη $x_1 + \frac{1}{3} x_2^2 = 0$, τότε παραμένει στην καμπύλη γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$. (η καμπύλη είναι αναλλοίωτη). Το διάγραμμα φάσης:



(Αν $x_{20} = 0$ τότε $x_1 = x_{10} e^t$ και $|x_1| \to \infty$ ενώ $x_2(t) = 0$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$). Παρατηρούμε ότι κοντά στό σημείο ισορροπίας τό διάγραμμα φάσης "προσομοιάζει" αυτό του γραμμικοποιημένου συστήματος (ενώ γενικά είναι "τοπολογικά ισοδύναμο").

Ευστάθεια Lyapunov

Εστω αυτόνομο σύστημα $x' = f(x)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, οπου $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, f τοπικά Lipschitz στό D. Εστω x^* μεμονομένο σημείο ισορροπίας, δηλ. $f(x^*) = 0$. Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε οτι $x^* = 0$.

(Αν $x^* \neq 0$ ορίζουμε τήν αλλαγή μεταβλητών $y = x - x^*$. Τότε:

$$y' = x' = f(x) = f(y + x^*) = g(y)$$

οπου $g(0) = f(x^*) = 0$.)

Ορισμός: Τό σημείο ισορροπίας $x = 0$ της $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, είναι:

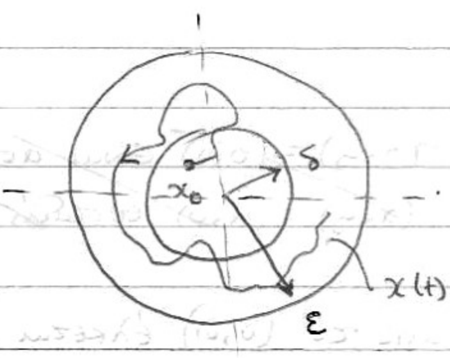
(i) Ευσταθές (κατά Lyapunov) αν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \text{γιά κάθε } t \geq 0$$

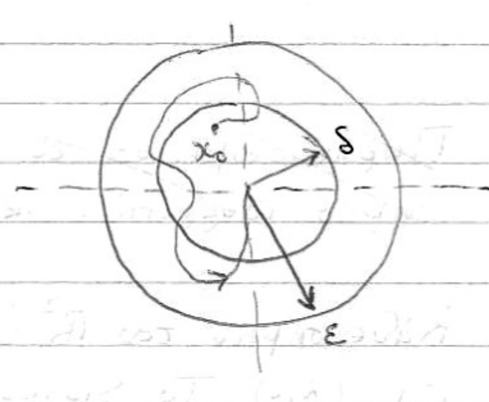
(ii) Ασταθές αν δέν είναι ευσταθές

(iii) Ασυμπτωτικά ευσταθή αν είναι ευσταθές καί μπορούμε νά επιλέξουμε τό $\delta > 0$ ετσι ωστε:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$



Ευστάθεια (Lyapunov)



Ασυμπτωτική Ευστάθεια.

Παρατήρηση:

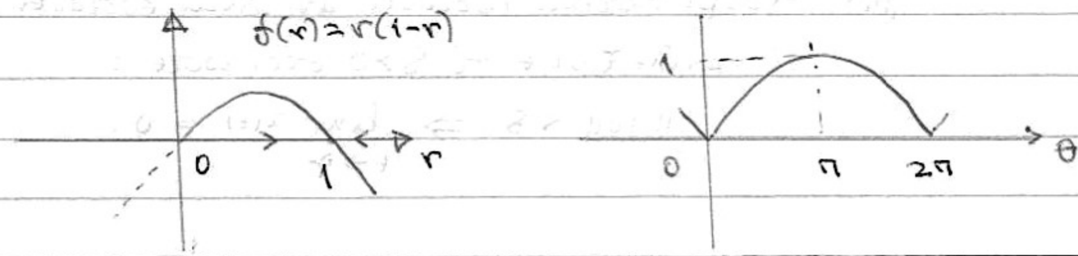
Δεν μπορούμε να παραλείψουμε την συνθήκη ευστάθειας στον ορισμό της ασυμπτωτικής ευστάθειας στο (iii), δηλαδή το γεγονός ότι το $x^*=0$ "έλκει" κάθε αρχική συνθήκη σε μία περιοχή του $x^*=0$ δεν εγγυάται ευστάθεια Lyapunov (όπως σε γραμμικά συστήματα). Το παρακάτω παράδειγμα διευκρινίζει αυτό το σημείο

Παράδειγμα.

Έστω το σύστημα στον $\mathbb{R}^2$ πού περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες ως:

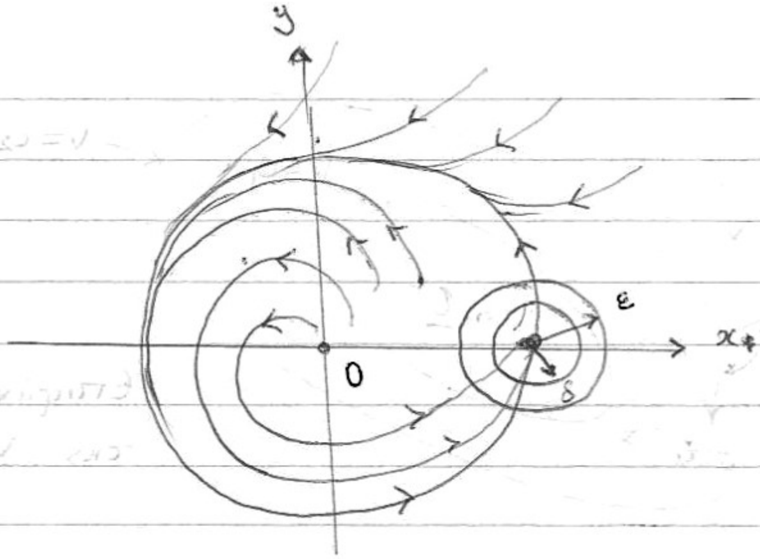
$$r'(t) = r(t)\left(1 - r(t)\right), \quad \theta'(t) = \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)$$

Το σύστημα έχει δύο σημεία ισορροπίας: $r=0$ και $(r=1,\ \theta=0)$, δηλ. σε καρτεσιανές συντεταγμένες $(x,y)=(0,0)$ και $(x,y)=(1,0)$.



~~Παρατηρούμε ότι το σημείο $(x,y)=(0,0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας και το $(x,y)=(1,0)$ ευσταθές~~

Κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ (εκτός από το $(0,0)$) έλκεται από το σ.ι. $(1,0)$. Το διάγραμμα φάσης είναι ως εξής:



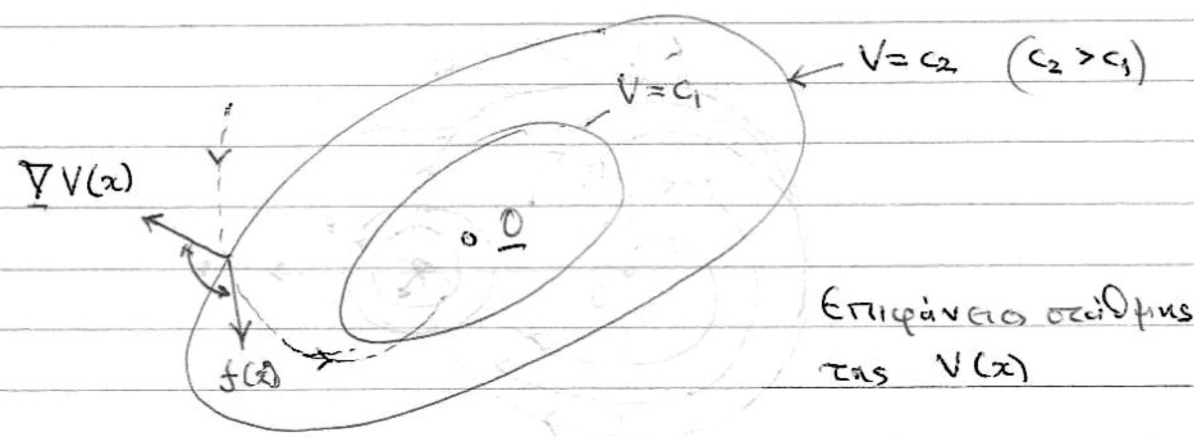
Παρ' όλα αυτά τό ~~σ.ι~~ σ.ι (1,0) δέν είναι ευσταθές κατά Lyapunov (καί επομένως ούτε ασυμπτωτικά). Δέν είναι δυνατόν νά περιορίσουμε την τροχιά κοντά στό (1,0) ~~ακτίνας σε~~ εντός κύκλου μέ κεντρο τό (1,0) καί ακτίνα $\varepsilon>0$ αρχίζοντας αυθαίρετα κοντά στό (1,0) (εντός κύκλου μέ κεντρο τό (1,0) καί ακτίνα $\delta>0$ αυθαίρετα μικρή). Γιά παράδειγμα, σημεία στην περιφέρεια του κύκλου $R=1$ καί αυθαίρετη ~~γωνία~~ θ μικρή γωνία $\theta_0>0$ θά ακολουθήσουν την τροχιά $R=1$, $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi$ ~~προς~~ συγκλίνοντας στό σ.ι (1,0). □

Έστω $V: D \to \mathbb{R}$ ~~διαφορίσιμη~~ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \in D$. (συνάρτηση Lyapunov). Έστω $x(t)$, $t \geq 0$, $x(0)=x_0$ η τροχιά του συστήματος. Η παράγωγος της V κατά μήκος της τροχιάς $x(t)$ είναι:

$$V'(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} x_i' = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = (\nabla V)^T f(x)$$

Επομένως αν $V'(x) \leq 0$ η $V(x)$ φθίνει κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος $x' = f(x)$.



Θεώρημα.

Έστω $x^*=0$ το σ.ι. της $x'=f(x)$ και $D\subseteq\mathbb{R}^n$ (ανοικτό, συνεκτικό) χωρίο. Έστω $0\in D$. Έστω $V: D\to\mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο D και $f: D\to\mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz στο D. Έστω επίσης ότι η V ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

(i) $V(0)=0$ και $V(x)>0$, $x\in D\setminus\{0\}$

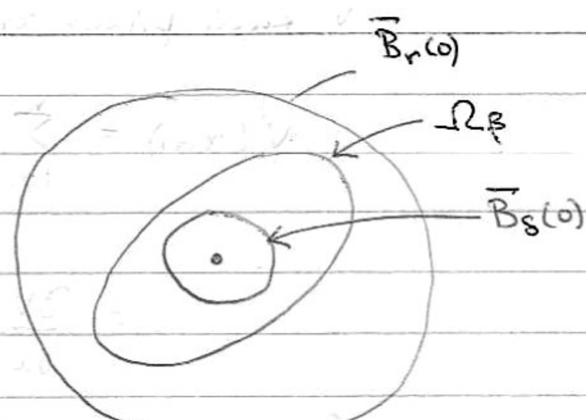
(ii) $V'(x)\leq 0$, $x\in D$.

Τότε το σ.ι. $x^*=0$ είναι ευσταθές (κατά Lyapunov). Επιπλέον αν

$$V'(x)<0\,,\quad x\in D\setminus\{0\}$$

τότε το σ.ι. είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη.



Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $r\in(0,\varepsilon]$ τω.

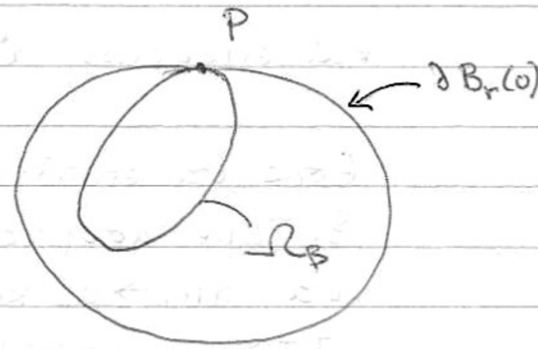
$$\overline{B}_r(0)=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\leq r\}\subseteq D.$$

Έστω $\alpha=\min\limits_{\|x\|=r} V(x)$ (το ελάχιστο υπάρχει αφού $V(x)$

συνεχής καί $\partial B_r(0)$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$).

Τότε $\alpha > 0$. Έστω $\beta \in (0, \alpha)$ καί

$\Omega_\beta = \{x \in \overline{B}_r(0) : V(x) \leq \beta\}$.



Τότε $\Omega_\beta \subseteq B_r(0)$ (διαφορετικά θά υπήρχε $p \in \Omega_\beta \cap \partial B_r(0)$ τ.ω $V(p) \geq \alpha > \beta$, άτοπο ~~ξ~~ αφού γιά κάθε $x \in \Omega_\beta$: $V(x) \leq \beta$.).

Τό σύνολο Ω_β είναι θετικά αναλλοίωτο :

$$x_0 \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \quad \text{γιά κάθε } t \geq 0.$$

Επίσης, τό Ω_β είναι συμπαγές (κλειστό εξ' ορισμού, φραγμένο αφού περιέχεται στό $\overline{B}_r(0)$). Εφόσον η f είναι τοπικά Lipschitz καί η ~~λύση~~ τροχιά $x(t)$, $t \geq 0$, περιέχεται εξ' ολοκλήρου στό Ω_β γιά κάθε $t \in [0, \eta]$ στό οποίο ορίζεται, τότε $\eta = \infty$ καί η λύση είναι καλά-ορισμένη καί μοναδική σέ όλο τό $t \in [0, \infty)$.

Από την συνέχεια της $V(x)$ καί $V(0) = 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω

$$\|x\| < \delta \Rightarrow V(x) < \beta.$$

Επομένως $\overline{B}_\delta(0) \subseteq \Omega_\beta \subseteq \overline{B}_r(0)$ καί:

$$x_0 \in \overline{B}_\delta(0) \Rightarrow x_0 \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \quad \forall t \geq 0$$
$$\Rightarrow x(t) \in \overline{B}_r(0) \quad \forall t \geq 0.$$

Αρα:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon \qquad \forall t \geq 0$$

και επομένως $x^* = 0$ είναι ευσταθές.

Εστω ότι επιπλέον $V'(x) < 0$, $x \in D \setminus \{0\}$. Γιά νά δείξουμε ασυμπτωτική ευστάθεια πρέπει νά δείξουμε ότι $x(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$, δηλ. ότι γιά κάθε $a > 0$ $\exists T > 0$: $\|x(t)\| < a$ γιά κάθε $t > T$. Από τό πρώτο μέρος της απόδειξης γνωρίζουμε ότι γιά κάθε $a > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $b > 0$ τ.ω. $\Omega_b \subseteq \overline{B}_a(0)$. Επομένως αρκεί νά δείξουμε ότι $V(x(t)) \to 0$ καθώς $t \to \infty$

Εφόσον $V(x(t))$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη (από τό 0)

$$V(x(t)) \to c \geq 0 \quad \text{καθώς} \quad t \to \infty$$

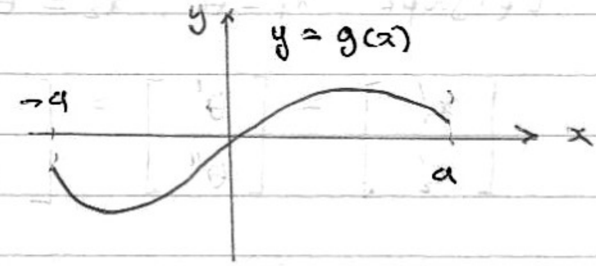
Εστω ότι $c > 0$ (γιά αντίφαση). Λόγω συνέχειας της $V(x)$ υπάρχει $d > 0$, τ.ω. $\overline{B}_d(0) \subseteq \Omega_c$. Εφόσον $V(x(t)) \to c > 0$ η τροχιά $x(t)$ δέν εισέρχεται στήν σφαίρα $\overline{B}_d(0)$ γιά κάθε $t \geq 0$. Εστω $-\gamma = \max\{V'(x) : d \leq \|x\| \leq r\}$ (που είναι καλά ορισμένο γιατί $V'(x)$ συνεχής καί $\{x : d \leq \|x\| \leq r\}$ συμπαγές. Εφόσον $V'(x) < 0$ γιά $x \in D \setminus \{0\}$ εχουμε $-\gamma < 0$, Επομένως

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t V'(x(\tau))\, d\tau \leq V(x_0) - \gamma t$$

Για $t > V(x_0)/\gamma$ εχουμε $V(x_0) - \gamma t < 0$, άτοπο. Αρα $c = 0$ καί επομένως $x(t) \to 0$. $\square$

Παράδειγμα

Έστω σύστημα $x' = -g(x)$ όπου $g(x)$ τοπικά Lipschitz στό διάστημα $(-a,a)$, $g(0)=0$ καί $x\,g(x) > 0$ γιά $x \in (-a,a)$, $x \neq 0$.



Τό σύστημα έχει μεμονωμένο σ.ι. στό $x^*=0$. Από τό διάγραμμα φάσης προκύπτει ότι τό $x^*=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Ορίζουμε (υποψήφια) συνάρτηση Lyapunov

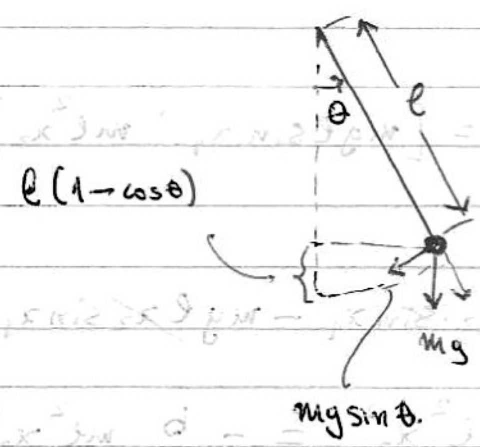
$$V(x) = \int_0^x g(y)\,dy \quad , \quad -a < x < a$$

Στό $D=(-a,a)$, $V \in C^1(D)$, $V(0)=0$, $V(x)>0$ γιά $x \in D\setminus\{0\}$.
Επίσης:

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\,x' = g(x)\,(-g(x)) = -g^2(x) < 0$$

γιά $x \in D\setminus\{0\}$. καί επομένως τό σ.ι. $x^*=0$ είναι πράγματι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα ("Μαθηματικό εκκρεμές")



$$ml^2\theta'' = -mgl\sin\theta - b\theta' \quad (b \geq \text{συντελεστής τριβής}).$$

$$\Rightarrow \theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta + c\theta' = 0, \quad c = \frac{b}{ml^2} \geq 0$$

Ορίζουμε $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta'$. Τότε:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - c\, x_2 \end{bmatrix}.$$

Σημεία ισορροπίας: $x_2 = 0$, $\sin x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 = \pi$
δηλ. $x^* = (0,0)$ και $x^* = (\pi, 0)$. Έστω
$D = \{(x_1, x_2) : |x_1| < \pi\}$.

Ορίζουμε (υποψήφια) συνάρτηση Lyapunov την συνολική ενέργεια του συστήματος:

$$V(x) = mgl(1-\cos x_1) + \frac{1}{2} m l^2 x_2^2$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η δυναμική ενέργεια (σε σχέση με το σημείο ισορροπίας και ο δεύτερος η κινητική ενέργεια ($v = l x_2$ η ταχύτητα της σφαίρας).

Έχουμε: $V(x) > 0$, $x \in D \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$, $V \in C^1(D)$.
Επίσης:

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x} x' = \left[mgl\sin x_1 \;\vdots\; ml^2 x_2 \right] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - c x_2 \end{bmatrix}$$

$$= mgl\, \cancel{x_2 \sin x_1} - mgl\, \cancel{x_2} \sin x_1 - c m l^2 x_2^2$$

$$= -cml^2 x_2^2 = -\frac{b}{ml^2} ml^2 x_2^2 = -b x_2^2$$

Εστω $b=0$ (συντελεστής τριβής $=0$). Τότε $V'(x)=0$ και το Θεώρημα Lyapunov εγγυάται ευστάθεια (αλλά όχι ασυμπτωτική ευστάθεια). Πράγματι, στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε απώλεια ενέργειας και τό πλάτος της ταλάντωσης γύρω από το σ.ι. είναι σταθερό (ταλάντωση χωρίς απόσβεση).

Εστω $b>0$. Εφόσον $V'(x)$ δεν είναι αυστηρά αρνητική στό $D\setminus\{0\}$ τό θεώρημα πάλι δεν εγγυάται ασυμπτωτική ευστάθεια - για αυτή την επιλογή της συνάρτησης $V(x)$ - όπως θα περιμέναμε (αλλά δες Θεώρημα Lasalle).

Τετραγωνικές συναρτήσεις

Η πιό απλή μορφή υποψήφιων συναρτήσεων Lyapunov είναι της μορφής:

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i,j} p_{ij} x_i x_j$$

όπου $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ θετικά ορισμένος. Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $P=P^T$: Αν ο P δεν είναι συμμετρικός μπορούμε να γράψουμε:

$$x^T P x = x^T\left(\frac{P+P^T}{2}\right)x + \underbrace{x^T\left(\frac{P-P^T}{2}\right)x}_{0}$$

$$= x^T\left(\frac{P+P^T}{2}\right)x$$

και επομένως ο P μπορεί να αντικατασταθεί από τον συμμετρικό πίνακα $\frac{1}{2}(P+P^T)$ χωρίς να αλλάξει η τιμή της "τετραγωνικής μορφής" $x^T P x$.

Ορισμός

Ο πίνακας $P=P^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ είναι θετικά ορισμένος ($P>0$) αν $x^TPx>0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$. Αν $x^TPx\geq 0$ γιά κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, τότε ο P λέγεται θετικά ημιορισμένος ($P\geq 0$). Ο $P=P^T$ είναι αρνητικά ορισμένος (ημιορισμένος) αν $-P>0$ ($-P\geq 0$) αντίστοιχα.

Ιδιότητες

(i) $P=P^T>0 \iff \lambda_i(P)>0$ γιά κάθε ιδιοτιμή $(i=1,2,\dots,n)$

$P=P^T\geq 0 \iff \lambda_i(P)\geq 0$ γιά κάθε ιδιοτιμή $(i=1,2,\dots,n)$.

(ii) $P=P^T>0 \iff P=Q^2,\ Q=Q^T>0$

$P=P^T\geq 0 \iff P=Q^2,\ Q=Q^T\geq 0$.

(iii) Έστω $P=P^T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ καί $P_k\in\mathbb{R}^{k\times k}$ ο πίνακας που σχηματίζεται από τις πρώτες k-γραμμές καί τις πρώτες k-στήλες του P.

Έστω $\pi=(\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_n)$ μετάθεση (permutation) των φυσικών $\{1,2,\dots,n\}$ καί P^π ο (συμμετρικός) πίνακας που σχηματίζεται εφαρμόζοντας την μετάθεση π στις γραμμές καί στήλες του P. Έστω P_k^π ο πίνακας που προκύπτει από τις πρώτες k γραμμές καί στήλες του P^π. Τότε:

(α) $P=P^T>0 \iff \det(P_k)>0 \quad \forall k\in\{1,2,\dots,n\}$

(β) $P=P^T<0 \iff (-1)^k\det(P_k)>0 \quad$ "

(γ) $P=P^T\geq 0 \iff \det(P_k^\pi)\geq 0 \quad \forall k\in\{1,2,\dots,n\}$ καί $\pi\in\Pi$.

(δ) $P=P^T\leq 0 \iff (-1)^k\det(P_k^\pi)\geq 0 \quad \forall k\in\{1,2,\dots,n\}$ καί κάθε $\pi\in\Pi$.

Παράδειγμα

Εξετάζουμε το (απλοποιημένο) σύστημα εκκρεμούς (με τριβή):

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a\sin x_1 - b x_2 \end{bmatrix} \qquad a, b > 0$$

Η συνάρτηση $V(x) = a(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ είναι θετικά ορισμένη στο $D = \{(x_1, x_2) : |x_1| < \pi\}$ αλλά

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}x_2' = a\sin \cancel{x_1}\cdot x_2 + x_2(-a\cancel{\sin x_1} - bx_2)$$

$$= -bx_2^2 \leq 0, \quad x \in D \setminus \{0\}$$

και $V'(x) = 0$ στον x_1-άξονα του $\mathbb{R}^2$ και άρα μπορούμε να συμπεράνουμε μόνο ευστάθεια. Έστω δεύτερη επιλογή υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T P x + a(1-\cos x), \quad P = P^T > 0$$

Αν $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \iff P_{11} > 0$ καί $P_{11}P_{22} - P_{12}^2 > 0$

και $V(x) > 0$ στο $D\setminus\{0\}$. Έχουμε:

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(P_{11}x_1^2 + 2P_{12}x_1x_2 + P_{22}x_2^2\right) + a(1-\cos x_1)$$

$$\Rightarrow V'(x) = \left(P_{11}x_1 + P_{12}x_2 + a\sin x_1\right)x_2 + \left(P_{12}x_1 + P_{22}x_2\right)\cdot(-a\sin x_1 - bx_2)$$

$$= P_{11}x_1x_2 + P_{12}x_2^2 + ax_2\sin x_1 - aP_{12}x_1\sin x_1 - aP_{22}x_2\sin x_2 - bP_{12}x_1x_2 - bP_{22}x_2^2$$

$$\Rightarrow V'(x) = (p_{11} - b\,p_{12})\,x_1 x_2 + a(1 - p_{22})\,x_2 \sin x_1$$

$$+ (p_{12} - b\,p_{22})\,x_2^2 - a\,p_{12}\,x_1 \sin x_1.$$

Θέλουμε νά επιλέξουμε τις παραμέτρους p_{ij} ώστε $V'(x) < 0$ $(x \neq 0)$ υπό τους περιορισμούς: $p_{11} > 0$ καί $p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0$.
Απλοποιούμε τον υπολογισμό επιλέγοντας $p_{11} = b\,p_{12}$, $p_{22} = 1$ οπότε:

$$V'(x) = (p_{12} - b)\,x_2^2 - a\,p_{12}\,x_1 \sin x_1, \quad \text{καί}$$

$$p_{12} > 0, \; b\,p_{12} - p_{12}^2 > 0 \quad (\Leftrightarrow p_{12}(b - p_{12}) > 0).$$

Έστω $p_{12} = \frac{b}{2}$. Τότε $V'(x) = -\frac{b}{2} x_2^2 - \frac{ab}{2} x_1 \sin x_1$ καί $P > 0 \Leftrightarrow V > 0$ στό $D \setminus \{0\}$. Έχουμε ~~$V'(x) \leq 0$~~ $\Rightarrow V'(x) < 0$ στό $D \setminus \{0\}$ καί επομένως τό σ.ι. $x^* = (0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Η συνάρτηση Lyapunov που εξασφαλίζει ασ. ευστάθεια είναι

$$V(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + a(1 - \cos x_1).$$

Πεδίο έλξης - ολική ασυμπτωτική ευστάθεια.

Έστω $x^* = 0$ ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι. Το πεδίο έλξης (domain of attraction) $D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ μέ $0 \in D_0$ ορίζεται ως:

$$D_0 = \{ x_0 \in D : x(0) = x_0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \}$$

Η θεωρία Lyapunov προσφέρει μέθοδο για την εκτίμηση του πεδίου έλξης. Από την απόδειξη του θεωρήματος

Lyapunov προκύπτει ότι αν το σύνολο

$$\Omega_\beta = \{ x \in D : V(x) \leq \beta \}$$

είναι φραγμένο, τότε ~~είναι θετικά αναλλοίωτο και~~ κάθε τροχιά με $x_0 \in \Omega_\beta$ συγκλίνει στο $x^*=0$ (υπό την προϋπόθεση ότι οι συνθήκες ασυμπτωτικής ευστάθειας του θεωρήματος ισχύουν). Άρα η λύση του προβλήματος

$$\beta^* = \sup \beta : \Omega_\beta \text{ φραγμένο και } \Omega_\beta \subseteq D$$

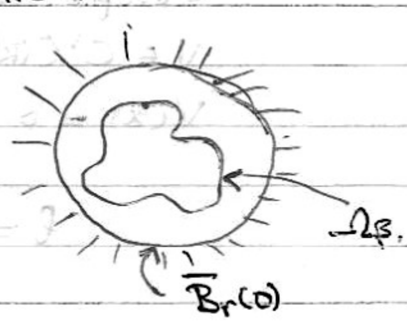
προσφέρει μια (βέλτιστη) εκτίμηση του D_0.

Στην συνέχεια μελετάμε συνθήκες υπό τις οποίες το πεδίο έλξης είναι ολόκληρος ο χώρος $\mathbb{R}^n$. (ολική ασυμπτωτική ευστάθεια). Παρατηρούμε ότι αναγκαία συνθήκη είναι το $x^*=0$ να είναι το μοναδικό σ.ι. (Αν $\hat{x}^* \neq x^*=0$ ήταν επίσης σ.ι. τότε $x_0 = \hat{x}^* \Rightarrow x(t) = \hat{x}^* \neq x^*$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$).

Έστω $\beta > 0$. Αν για κάποιο $r > 0$ ισχύει

$$\inf_{\|x\| \geq r} V(x) > \beta$$

τότε $\Omega_\beta \subseteq \bar{B}_r(0)$ και Ω_β φραγμένο.



Έστω $\varphi(r) = \inf_{\|x\| \geq r} V(x)$. Τότε $\varphi(r)$ είναι αύξουσα συνάρτηση (όχι απαραίτητα γνησίως αύξουσα), δηλ. αν $r_2 > r_1$ τότε $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{r_2}(0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{r_1}(0)$ και $\varphi(r_2) \geq \varphi(r_1)$ ~~κατά τα inf~~.

Αν $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \inf\limits_{\|x\|\geq r} V(x) = l$

τότε Ω_β είναι φραγμένο αν $\beta < l$. Επομένως, αν $l = \infty$ τότε τό Ω_β είναι φραγμένο γιά κάθε $\beta \geq 0$.

<u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ~~(με τις συνήθεις συνθήκες $V(x)>0$, $V(0)=0$)~~ ονομάζεται "ακτινικά-μη-φραγμένη" (radially unbounded) αν

$$V(x) \to \infty \quad \text{καθώς} \quad \|x\| \to \infty$$

δηλαδή αν γιά κάθε $\beta > 0$ $\exists\, r > 0 : \|x\| > r \Rightarrow$
$\Rightarrow V(x) > \beta$.
(οπότε $\Omega_\beta \subseteq \overline{B}_r(0)$).

<u>Παράδειγμα</u>: Εστω συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

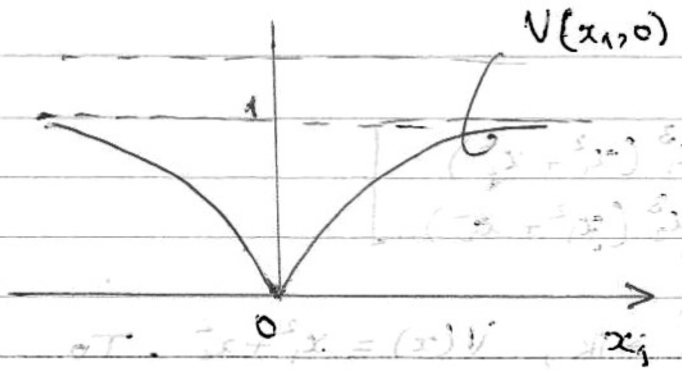
Εχουμε $V(x) > 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$, $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Γιά "μικρά" β οι καμπύλες στάθμης $V(x) = \beta$ είναι κλειστές καμπύλες. Εχουμε

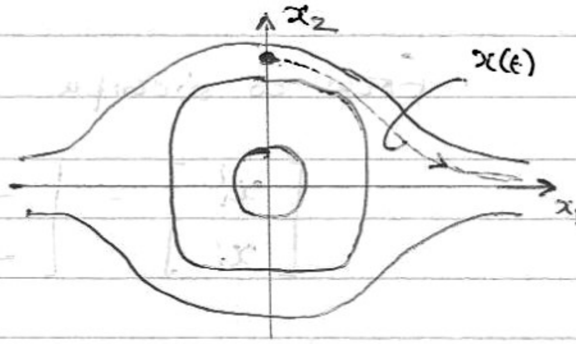
$$l = \lim_{r\to\infty} \inf_{\|x\|\geq r} V(x) = \lim_{r\to\infty} \min_{\|x\|=r} \left[\frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2\right]$$

$$= \lim_{r\to\infty} \min_{|x_1|=r} \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = \lim_{|x_1|\to\infty} \frac{x_1^2}{1+x_1^2}$$

$$= 1$$

Αρα Ω_β είναι φραγμένο αν και μόνο αν $\beta < 1$





Θεώρημα.

Εστω $x^* = 0$ σ.ι. του $x' = f(x)$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz. Εστω $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τ.ω.

(i) $V(0) = 0$, $V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(ii) $\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$

(iii) $V'(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$.

Τότε $x^* = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη

Εστω $p \in \mathbb{R}^n$ και $\beta = V(p)$. Από την υπόθεση (ii) η $V(x)$ είναι "ακτινικά μη-φραγμένη" και επομένως για κάθε $\beta > 0$ $\exists r > 0$ τ.ω. $\|x\| > r \Rightarrow V(x) > \beta$. Αρα $\Omega_\beta \subseteq \overline{B_r(0)}$ και επομένως Ω_β φραγμένο. Η υπόλοιπη απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος Lyapunov. $\square$

Παράδειγμα

Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^3(x_1^2+x_2^2) \\ -x_2^3(x_1^2+x_2^2) \end{bmatrix}$$

και συνάρτηση $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. Το σημείο $(0,0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Έχουμε:

$$V(x) > 0 \text{ γιά } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad V(0) = 0$$

και

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2' =$$

$$= 2x_1\left(-x_1^3(x_1^2+x_2^2)\right) + 2x_2\left(-x_2^3(x_1^2+x_2^2)\right)$$

$$= -2x_1^4(x_1^2+x_2^2) - 2x_2^4(x_1^2+x_2^2)$$

$$= -2(x_1^4+x_2^4)(x_1^2+x_2^2) < 0$$

γιά κάθε $(x_1,x_2) \neq (0,0)$

Επίσης ισχύει ότι $V(x) \to \infty$ καθώς $\|x\| \to \infty$. Και η $V(x)$ είναι ακτινικά μη-φραγμένη. Άρα το σύστημα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

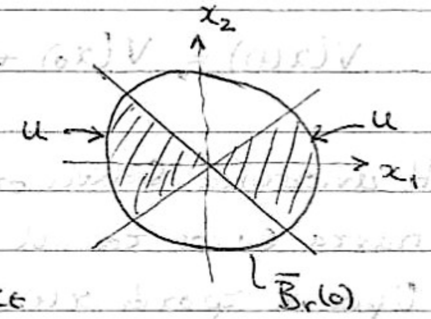
Θεωρήματα Αστάθειας

Έστω $V: D \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \in D$. Έστω ότι $V(0) = 0$ και ότι υπάρχει x_0 αυθαίρετα κοντά στο 0 γιά το οποίο $V(x_0) > 0$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε

$\bar{B}_r(0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r \} \subseteq D$ και έστω

$$U = \{ x \in \bar{B}_r(0) : V(x) > 0 \}$$

Τότε $U \neq \phi$, $U \subseteq \bar{B}_r(0)$. Το σύνορο του U είναι η επιφάνεια $V(x) = 0$ και η σφαίρα $\|x\| = r$. Εφόσον $V(0) = 0$ το 0 είναι στο σύνορο του U εντός του $\bar{B}_r(0)$.



Παρατηρούμε ότι το U έχει περισσότερα από ένα μέρος. Γιά παράδειγμα το διάγραμμα αντιστοιχεί στό σύνολο U γιά τήν συνάρτηση $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$.
Το σύνολο U κατασκευάζεται έτσι ώστε $V(0) = 0$ και $V(x_0) > 0$ γιά x_0 αυθαίρετα κοντά στο σημείο 0.

Θεώρημα.

Έστω $x_0^* = 0$ σημείο ισορροπίας γιά το σύστημα $x' = f(x)$. Έστω $V : D \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $V(0) = 0$ και $V(x_0) > 0$ γιά κάποιο x_0 με αυθαίρετα μικρό $\|x_0\|$. Έστω $U = \{ x \in \bar{B}_r(0) : V(x) > 0 \}$ και έστω ότι $V'(x) > 0$ στο U. Τότε το $x^* = 0$ είναι ασταθές.

Απόδειξη

$x_0 \in int(U)$ και $V(x_0) = a > 0$. Η τροχιά $x(t)$, $x(0) = x_0$ πρέπει να φύγη έξω από το U. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι γιά όσο η $x(t)$ είναι εντός του U, $V(x(t)) \geq a$ καθώς $V'(x) > 0$ στο U. Ορίζουμε

$$\gamma = \min \{ V'(x) : x \in U \text{ και } V(x) \geq a \}$$

που είναι καλά ορισμένο εφόσον η συνεχής συνάρτηση $\dot{V}(x)$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο συμπαγές σύνολο

$$\{x \in U \text{ και } V(x) \geq a\} = \{x \in \bar{B}_r(0) \text{ και } V(x) \geq a\}$$

Τότε $\gamma > 0$ και

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s))\,ds \geq a + \int_0^t \gamma\,ds = a + \gamma t$$

Η ανισότητα δείχνει ότι η τροχιά $x(t)$ δεν μπορεί να μείνει για πάντα εντός του U γιατί η $V(x)$ είναι φραγμένη στο U. Όμως η τροχιά $x(t)$ δεν μπορεί να βγει από το U διά μέσου της επιφάνειας $V(x) = 0$ γιατί $V(x(t)) \geq a$. Επομένως πρέπει να βγει από το U από την επιφάνεια της σφαίρας $\|x\| = r$. Αφού αυτό συμβαίνει για $\|x_0\|$ αυθαίρετα μικρό, το σημείο $x^* = 0$ είναι ασταθές. □

Παράδειγμα.

Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + g_1(x) \\ -x_2 + g_2(x) \end{bmatrix}$$

όπου g_1 και g_2 τοπικά Lipschitz που ικανοποιούν:

$$|g_1(x)| \leq k\|x\|_2^2, \quad |g_2(x)| \leq k\|x\|_2^2$$

σε κάποια περιοχή D του 0. Οι ανισότητες αυτές συνεπάγονται ότι $g_1(0) = g_2(0) = 0$ και επομένως $x^* = 0$ είναι σημείο ισορροπίας. Έστω:

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

Στόν άξονα x_1 $(x_2=0)$ $V(x)>0$ γιά σημεία αυθαίρετα κοντά στό $x^*=0$. Το σύνολο U είναι όπως απεικονίζεται στο προηγούμενο διάγραμμα. Η παράγωγος της $V(x)$ κατα μήκος της τροχιάς του συστήματος είναι:

$$V'(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$$

Ο όρος $x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$ φράσσεται ως:

$$|x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)| \leq |x_1|\,|g_1(x)| + |x_2|\cdot|g_2(x)|$$

$$\leq 2k\,\|x\|_2^3$$

Επομένως: $V'(x) \geq \|x\|_2^2 - 2k\,\|x\|_2^3 = \|x\|_2^2\left(1 - 2k\,\|x\|_2\right)$

Επιλέγοντας r τ.ω. $\overline{B}_r(0) \subseteq D$ μέ $r < \frac{1}{2k}$ η υπόθεση του προηγούμενου Θεωρήματος ικανοποιείται καί επομένως το σ.ι. $x^*=0$ είναι ασταθές.

Θεώρημα (LaSalle)

Εστω οτι $x^*=0$ είναι σ.ι. του συστήματος $x' = f(x)$ όπου $f: D \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz στό $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (ανοικτό, συνεκτικό). οπου $0 \in D$. Έστω συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη θετικά οριομένη στό D (δηλ. $V(x)>0$ γιά $x \neq 0$, $V(0)=0$) τέτοια ώστε $V'(x) \leq 0$ στό D. Ορίζουμε $S = \{x \in D : V'(x) = 0\}$ και έστω ότι αν $x(t)$ είναι τροχιά του συστήματος τότε $(x(t) \in S \;\; \forall t \geq 0) \Rightarrow x(t) \equiv 0$. Τότε τό $x^*=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Έχουμε επίσης την παραλλαγή του Θεωρήματος που εγγυάται ολική ασυμπτωτική ευστάθεια.

Θεώρημα (LaSalle)

Έστω $x^*=0$ σημείο ισορροπίας του συστήματος $x'=f(x)$ όπου $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz στο $\mathbb{R}^n$. Έστω συνάρτηση $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ θετικά ορισμένη ($V(x)>0$ για $x\neq 0$, $V(0)=0$) και "ακτινικά μη φραγμένη" ($\|x\|\to\infty \Rightarrow V(x)\to\infty$). Έστω ότι $V'(x)\leq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $S=\{x\in\mathbb{R}^n : V'(x)=0\}$ και έστω ότι αν $x(t)$ τροχιά του συστήματος, τότε:

$$x(t)\in S \quad \forall t\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x(t)\equiv 0$$

Τότε το $x^*=0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα.

Εξετάζουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -h_1(x_1)-h_2(x_2) \end{bmatrix}$$

όπου $h_1,h_2:(-a,a)\to\mathbb{R}$ τοπικά Lipschitz τέτοιες ώστε: $h_i(0)=0$, $y h_i(y)>0 \quad \forall y\neq 0$ και $y\in(-a,a)$.

Το σημείο $(x_1^*,x_2^*)=(0,0)$ είναι (μεμονωμένο) σ.ι. του συστήματος. Έστω (υποψήφια) συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x)=\int_0^{x_1} h_1(y)\,dy+\frac{1}{2}x_2^2$$

Έστω $D=\{x\in\mathbb{R}^2 : |x_i|<a,\ i=1,2\}$. Η V είναι θετικά

οριομένη στό D καί :

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2' = h_1(x_1) x_1' + x_2 x_2'$$

$$= \cancel{h_1(x_1) x_2} + x_2 \left[\cancel{-h_1(x_1)} - h_2(x_2) \right].$$

$$= -x_2 h_2(x_2) \leq 0$$

είναι αρνητικά ημιοριομένη. Επίσης

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x_2 h_2(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \quad , \quad |x_2| < a.$$

Επομένως: $S = \{ x \in D : x_2 = 0 \}$. Αν ~~x~~ $x(t) \in S$ γιά κάθε $t \geq 0$:

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2'(t) \equiv 0 \Rightarrow h_1(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

Επομένως η μόνη τροχιά που ανήκει ταυτοτικά στό S είναι η (τετριμένη) τροχιά $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$ και επομένως τό σ.ι. $x^* = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα

Εξετάζουμε τό προηγούμενο παράδειγμα μέ $a = \infty$ καί έστω ότι

$$\int_0^y h_1(z)\, dz \to \infty \quad \text{καθώς } |y| \to \infty$$

Τότε η συνάρτηση Lyapunov $V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y)\,dy + \frac{1}{2} x_2^2$ είναι "ακτινικά μή-φραγμένη" καί $S = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \}$. δεν περιέχει

τροχιές του συστήματος εκτός από την τετριμμένη τροχιά $x \equiv 0$.
Επομένως τό σ.ι. $x^* = 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

"Έμμεση" μέθοδος Lyapunov (/Γραμμικοποίηση)

Έστω $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Αν $Re[\lambda_i(A)] < 0$ γιά κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ τότε ο πίνακας A λέγεται πίνακας "Hurwitz". Ισχύει ότι

A Hurwitz $\Leftrightarrow$ Το (μοναδικό) σ.ι. $x^* = 0$ του $x' = Ax$ είναι (ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές.

Έστω A Hurwitz και (υποψήφια) συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x) = x^T P x \quad , \quad P = P^T > 0$$

Τότε: $V'(x) = x^T P x' + (x')^T P x = x^T (PA + A^T P) x$

Έστω: $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$PA + A^T P = -Q$$

Αν $Q > 0$ τότε $V'(x) = -x^T Q x < 0$ $\forall x \neq 0$ και $V(x)$ είναι συνάρτηση Lyapunov.

Παρατήρηση: Στην παραπάνω περίπτωση η $V(x)$ είναι ακτινικά μή φραγμένη (και επομένως $x^* = 0$ ολικά ασ. ευσταθές - όπως περιμέναμε?). Αυτό προκύπτει από την ανισότητα:

$$\lambda_{min}(P) \cdot \|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{max}(P) \cdot \|x\|^2$$

και $P = P^T > 0 \Leftrightarrow \lambda_{min}(P) > 0$.

(*) Ισχύει γενικά αν $P=P^T$

Λήμμα: Έστω $P=P^T>0$.(*) Τότε

$$\lambda_{min}(P)\cdot\|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{max}(P)\cdot\|x\|^2$$

Απόδειξη: Έστω $P=P^T>0$. Τότε $P=Q^T\Lambda Q$, $QQ^T=Q^TQ=I_n$, $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ όπου $\lambda_i>0$, $i=1,2,\dots,n$. Έστω $\|x\|_2=1$. Τότε $x^TPx = x^TQ^T\Lambda Qx := y^T\Lambda y$, όπου $y=Qx$ καί $\|y\|_2=\|x\|_2=1$. Επίσης $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $y=Qx$ είναι 1-1 καί επί. Επομένως:

$$\min_{\|x\|_2=1} x^TPx = \min_{\|y\|_2=1} y^T\Lambda y = \min\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 : \sum y_i^2=1\right\}$$

$$= \lambda_{min}(P)$$

καί αντίστοιχα $\max\{x^TPx : \|x\|_2=1\} = \lambda_{max}(P)$. □

Θεώρημα.

Τά εξής είναι ισοδύναμα
(α) $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ Hurwitz
(β) $\forall Q=Q^T>0$ $\exists P=P^T>0$ που είναι λύση της εξίσωσης (Lyapunov): $PA+A^TP+Q=0$.

Επιπλέον αν A Hurwitz ο πίνακας P είναι μοναδικός.

Απόδειξη:

($\Leftarrow$): Προκύπτει άμεσα από τό Θεώρημα Lyapunov μέ $V(x)=x^TPx$

($\Rightarrow$): Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ Hurwitz. Ορίζουμε:

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} \, dt \qquad (*)$$

Ο P είναι καλά ορισμένος (το ολοκλήρωμα συγκλίνει), είναι συμμετρικός ($P = P^T$) και θετικά ορισμένος ($P > 0$) (Αν όχι, τότε $\exists x \neq 0 : \; x^T P x = 0 \Rightarrow$

$$\int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{At} x \, dt = 0 \Rightarrow e^{At} x = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow x = 0$$

Εφόσον $\det(e^{At}) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.) Επομένως:

$$PA + A^T P = \int_0^\infty \left(e^{A^T t} Q e^{At} A + A^T e^{A^T t} Q e^{At} \right) dt$$
$$= \int_0^\infty \left(e^{A^T t} Q e^{At} \right)' dt$$
$$= \lim_{t \to \infty} \left(e^{A^T t} Q e^{At} \right) - e^{A^T t} Q e^{At} \Big|_{t=0}$$
$$= -Q$$

Και άρα ο P στην (*) είναι λύση της εξίσωσης.

Γιά νά δείξουμε ότι είναι μοναδική λύση έστω ότι υπάρχει δεύτερη λύση $\tilde{P} \neq P$. Τότε:

$$\left. \begin{array}{l} PA + A^T P = -Q \\ \tilde{P} A + A^T \tilde{P} = -Q \end{array} \right\} \Rightarrow (P - \tilde{P}) A + A^T (P - \tilde{P}) = 0$$

$$\Rightarrow e^{A^T t} \left[(P - \tilde{P}) A + A^T (P - \tilde{P}) \right] e^{At} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{At} \right) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{A^T t}(P-\tilde{P})e^{At} = C \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{A^T t}(P-\tilde{P})e^{At} \xrightarrow{t\to\infty} 0 = C$$

$$\Rightarrow P = \tilde{P} \qquad \square$$

Έστω $x' = f(x)$, $f: D \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη και $x^* = 0 \in D$ σημείο ισορροπίας, δηλ. $f(0)=0$. Τότε, γιά "αρκούντως μικρό" $\|x\|$

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)\,x \qquad i=1,2,\ldots,n$$

όπου $z=(z_1, z_2, \ldots z_n)$ σημείο στό ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ 0 και x. Εφόσον $f_i(0)=0$:

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)\,x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\cancel{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right]\underline{x}$$

Ισοδύναμα:

$$f(x) = Ax + g(x), \quad \text{όπου}$$

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right]_{i=1,2,\ldots,n}^{j=1,2,\ldots,n} \qquad \text{καί} \qquad g(x) = \left[g_i(x)\right]_{i=1,\ldots,n}$$

όπου $$g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right]x, \qquad i=1,2,\ldots,n$$

Ισχύει ότι:

$$|g_i(x)| \leq \left\|\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right\| \cdot \|x\|$$

καί λόγω συνέχειας της $\frac{\partial f}{\partial x}$?

$$\frac{|g_i(x)|}{\|x\|} \to 0 \iff \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \to 0$$

καθώς $\|x\| \to 0$. Γραμμικοποιούμε τό σύστημα (γύρω από το σ.ι. $x^*=0$) ως:

$$x' = Ax \quad , \quad \text{όπου} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

και όπου A ο πίνακας Jacobian της f στό σημείο $x^*=0$.

Θεώρημα.

Έστω $x^*=0$ σ.ι. του $x' = f(x)$ όπου $f: D \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη καί D περιοχή με κεντρο τό $x^*=0$.
Έστω

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}$$

Τότε:

(α) A Hurwitz $\Rightarrow$ $x^*=0$ ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι.

(β) $\exists \lambda_i(A) \in \sigma(A)$ τ.ω. $Re[\lambda_i(A)] > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^*$ ασταθές σ.ι.

Απόδειξη [(α) μόνο].

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz και $Q = Q^T > 0$. Τότε, αν P είναι η (μοναδική) λύση της εξίσωσης Lyapunov $PA + A^T P + Q = 0$, έχουμε $P = P^T > 0$. Έστω

$$V(x) = x^T P x$$

(υποψήφια) συνάρτηση Lyapunov γιά τό μη-γραμμικό σύστημα $x' = Ax + g(x)$, όπου

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \to 0 \quad \text{καθώς} \quad \|x\| \to 0$$

Τότε:

$$V'(x) = x^T P x' + (x')^T P x =$$

$$= x^T P [Ax + g(x)] + [x^T A^T + g^T(x)] P x$$

$$= x^T (PA + A^T P) x + 2 x^T P g(x)$$

Άρα: $V'(x) = -\underbrace{x^T Q x}_{>0,\ x \neq 0} + 2 \underbrace{x^T P g(x)}_{\frac{\|g\|}{\|x\|} \to 0}$

Εφόσον $\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \to 0$ καθώς $\|x\|_2 \to 0$:

$\forall \gamma > 0 \ \exists r = r(\gamma) > 0$:

$$\|x\|_2 < r \Rightarrow \frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} < \gamma$$

$$\Rightarrow \|g(x)\|_2 < \gamma \|x\|_2 \qquad \forall x : \|x\|_2 < r,$$

Άρα: $V'(x) < -x^T Q x + 2 \|x\|_2 \|P\| \cdot \underbrace{\|g(x)\|}_{< \gamma \|x\|_2,\ \|x\| < r}$

$$< -x^T Q x + 2\gamma \|x\|_2^2 \|P\| \quad , \ \|x\| < r$$

Όμως: $\lambda_{min}(Q) \|x\|_2^2 \leq x^T Q x \Rightarrow -x^T Q x \leq -\lambda_{min}(Q) \cdot \|x\|_2^2$

$\Rightarrow V'(x) < -(\lambda_{min}(Q) - 2\gamma \|P\|) \cdot \|x\|_2^2 < 0$ αν

$\gamma := \frac{\lambda_{min}(Q)}{2\|P\|}$ και $\|x\| \neq 0$. και $\|x\|_2 < r(\gamma)$

και άρα το $x^*=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. □

<u>Παράδειγμα</u> (επίλυση εξίσωσης Lyapunov)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = I_2, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = P^T$$

Έχουμε:

$$0 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2p_{12}+1 &= 0 \\ -p_{11}-p_{12}+p_{22} &= 0 \\ -2p_{12}-2p_{22}+1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} p_{12} &= -\tfrac{1}{2} \\ p_{11}-p_{22} &= \tfrac{1}{2} \\ p_{22} &= 1 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = P^T > 0$$

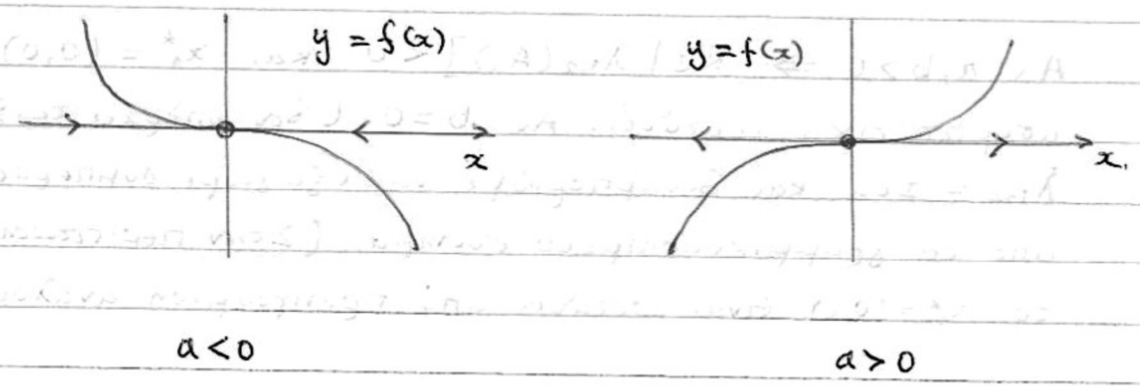
$$\left(\text{γιατί} \quad p_{11}>0 \quad \text{και} \quad p_{11}p_{22}-p_{12}^2 = \frac{3}{2}-\frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 0\right).$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $x' = ax^3$, $a\in\mathbb{R}$. Το (μοναδικό) σ.ι. είναι $x^*=0$. Γραμμικοποίηση γύρω από το σ.ι. είναι:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*=0} = \left.3ax^2\right|_{x^*=0} = 0$$

Η ιδιοτιμή του A κείται στον άξονα των φανταστικών και επομένως δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπέρασμα για την

ευστάθεια του συστήματος που εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου a: Αν $a<0$ το σ.ι. $x^*=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. ($V(x)=x^4 \Rightarrow V'(x)=4x^3 \cdot ax^3 = 4ax^6 < 0$ αν $x \neq 0$).
Αν $a=0$ το (γραμμικό) σύστημα είναι ευσταθές (αλλά όχι ασυμπτωτικά). Αν $a>0$, τότε $x^*=0$ είναι ασταθές (Θεώρημα αστάθειας με $V(x)=x^4 \Rightarrow V'(x)=4ax^6>0$ αν $x \neq 0$).



Παράδειγμα (μαθηματικό εκκρεμές με τριβή).

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a\sin x_1 - bx_2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε δύο σημεία ισορροπίας $x_1^*=(0,0)$ και $x_2^*=(\pi,0)$. Ο πίνακας Jacobian είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos x_1 & -b \end{bmatrix}$$

και $$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_1^*}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_2^*}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A_1

$$\varphi_1(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ a & \lambda+b \end{bmatrix} = \lambda^2 + b\lambda + a$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a}.$$

Αν $a, b > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}[\lambda_{1,2}(A_1)] < 0$ και $x_1^* = (0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν $b=0$ (δεν υπάρχει τριβή) $\lambda_{1,2} = \pm i a$ και δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα από το γραμμικοποιημένο σύστημα. (Στην περίπτωση αυτή το $x_1^* = (0,0)$ είναι ευσταθές από προηγούμενη ανάλυση).

Σημείο ισορροπίας $x_2^* = (\pi, 0)$:

$$\varphi_2(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -a & \lambda+b \end{bmatrix} = \lambda^2 + b\lambda - a$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4a}$$

Για κάθε $a > 0$, $b \geq 0$ έχουμε μία θετική ιδιοτιμή και το σ.ι. $x_2^* = (\pi, 0)$ είναι ασταθές.

Τοπολογική συζυγία και ισοδυναμία.

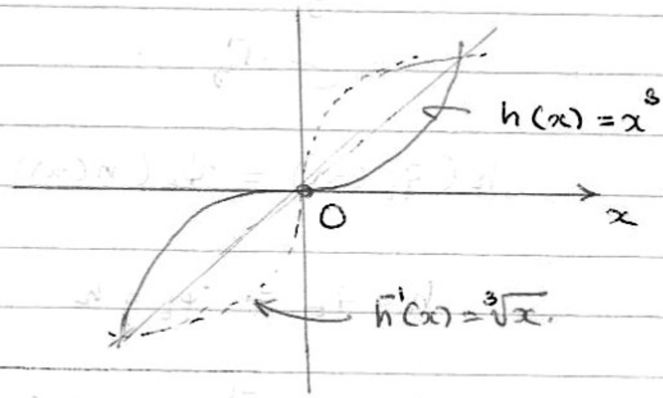
Ορισμός

(α) Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ("1-1" και επί) $h: A \to B$ λέγεται ομοιομορφισμός αν είναι συνεχής με συνεχή αντίστροφο. $h: A \to B$

(β) Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση λέγεται αμφιδιαφόριση (diffeomorphism) αν είναι συνεχώς διαφορίσιμη (C^1) με συνεχώς διαφορίσιμο αντίστροφο.

<u>Παράδειγμα.</u>

(α) Έστω $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$. Η h είναι ομοιομορφισμός ως γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Η h δεν είναι αμφιδιαφόριση (H $h^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ δεν είναι διαφορίσιμη στό $x=0$).



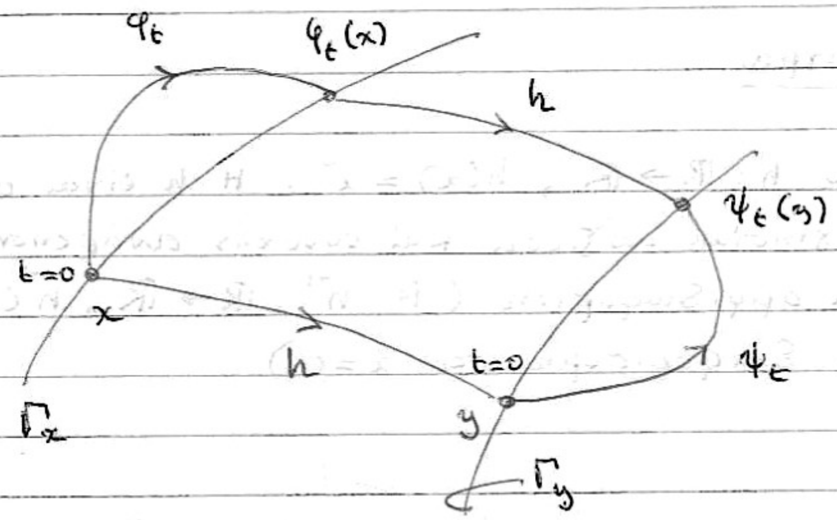
(β) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(\theta) = \theta - a\sin\theta$ $(a \geq 0)$. Γιά ποιές τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ η f είναι (i) ομοιομορφισμός, (ii) αμφιδιαφόριση; (Άσκηση).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\varphi_t: A \to A$ και $\psi_t: B \to B$ πλήρεις ροές δύο δυναμικών συστημάτων. Οι ροές είναι (τοπολογικά) συζυγείς αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h: A \to B$, τέτοιος ώστε $\forall x \in A$ και $t \in \mathbb{R}$

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)).$$

Διαγραμματικά:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\varphi_t} & \varphi_t(x) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ y & \xrightarrow[\psi_t]{} & \psi_t(y) \end{array}$$



Γράφουμε: $$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)) \quad \forall x \in \Gamma_x$$

$$h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$$

$$\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_t \circ h.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Εστω δυναμικό σύστημα $x' = -x$ μέ ροή $\varphi_t(x) = xe^{-t}$. Εστω ο ομοιομορφισμός

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y = h(x) = x^3$$

Τότε:

$$\psi_t(y) = h(\varphi_t(x)) = (xe^{-t})^3 = x^3 e^{-3t} = ye^{-3t}$$

Που είναι η ροή του συστήματος $y' = -3y$. Αρα τα δύο συστήματα είναι συζυγή.

<u>Λήμμα</u>: Εστω $\varphi_t : A \to A$ καί $\psi_t : B \to B$ συζυγείς ροές και $h: A \to B$ ομοιομορφισμός με $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$. Τότε:

① Αν x^* σημείο ισορροπίας γιά τήν ροή φ_t (δηλ. $\varphi_t(x^*) = x^*$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$), τότε $y^* = h(x^*)$ είναι σημείο ισορροπίας της ροής ψ_t (δηλ. $\psi_t(y^*) = y^*$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$).

② Αν $\Gamma_\varphi = \{\varphi_t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ είναι περιοδική τροχιά μέ περίοδο T, τότε $\Gamma_\psi = \{\psi_t(y_0) : t \in \mathbb{R}\}$ όπου $y_0 = h(x_0)$ είναι περιοδική τροχιά μέ την ίδια περίοδο (T).

Απόδειξη.

① Έστω x^* σ.ι. της φ_t, ώστε $\varphi_t(x^*) = x^*$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω $y^* = h(x^*)$. Τότε, εφόσον φ_t καί ψ_t συζυγείς

$$\forall t \in \mathbb{R} : \psi_t(y^*) = \psi_t(h(x^*)) = h(\varphi_t(x^*))$$

$$= h(x^*) = y^*$$

και άρα y^* σ.ι. της ψ_t.

② Έστω ότι $\{\varphi_t(x_0) : t \in \mathbb{R}\}$ περιοδική τροχιά με περίοδο T, δηλ. $\varphi_{t+T}(x_0) = \varphi_t(x_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Έστω ότι $y_0 = h(x_0)$. Τότε:

$$\psi_{t+T}(y_0) = \psi_{t+T}(h(x_0)) = h(\varphi_{t+T}(x_0))$$

$$= h(\varphi_t(x_0)) = \psi_t(h(x_0))$$

$$= \psi_t(y_0)$$

και επομένως η τροχιά $\{\psi_t(y_0) : t \in \mathbb{R}\}$ είναι επίσης περιοδική με περίοδο T.

<u>Παράδειγμα</u>: Δείξτε ότι η ροή του δυναμικού συστήματος $x' = -x$ είναι συζυγής με την ροή του $y' = -2y$.

$$x' = -x \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-t} \Rightarrow \varphi_t(x) = x e^{-t}$$

$$y' = -2y \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-2t} \Rightarrow \psi_t(y) = y e^{-2t}$$

Επιζητούμε ισομορφισμό: $h(xe^{-t}) = h(x) e^{-2t}$

$$\left(h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)) \right).$$

Για $x \geq 0$, $h(x) = x^2$ δίνει:

$$h(xe^{-t}) = (xe^{-t})^2 = x^2 e^{-2t} = h(x) e^{-2t}$$

Για $x < 0$, $h(x) = -x^2$ δίνει:

$$h(xe^{-t}) = -(xe^{-t})^2 = -x^2 e^{-2t} = h(x) e^{-2t}$$

Άρα:
$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Είναι ο ισομορφισμός που επιζητούμε και επομένως πράγματι οι δύο ροές είναι συζυγείς.

$$\begin{tikzcd}
\varphi_t(x) = x e^{-t} \arrow[r] & \psi_t(y) = y e^{-2t} \\
x \arrow[u, bend left, "\varphi_t"] \arrow[r, "h"] & y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \arrow[u, bend right, "\psi_t"']
\end{tikzcd}$$

Ορισμός: Δύο ροές $\varphi_t : A \to A$ και $\psi_t : B \to B$ είναι (τοπολογικά) ισοδύναμες αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : A \to B$ που απεικονίζει τις τροχιές $\Gamma_{\varphi_t(x)} \to \Gamma_{\psi_t(x)}$ και διατηρεί την διεύθυνση του χρόνου, δηλ. αν υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\tau : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$h\left(\varphi_{\tau(x,t)}(x)\right) = \psi_t(h(x)).$$

Παράδειγμα: Η ροή του δυναμικού συστήματος $x' = -x$ είναι ισοδύναμη με την ροή του $y' = -y^2$ (για $y_0 > 0$). Η ροή του πρώτου συστήματος είναι: $\varphi_t(x) = x e^{-t}$. Λύνουμε την εξίσωση για το δεύτερο ΠΑΤ:

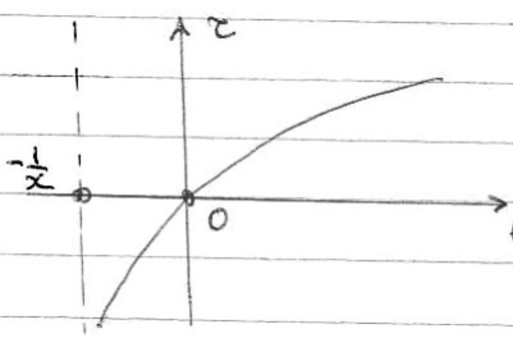
$$\frac{dy}{dt} = -y^2, \quad y(0) = y_0 > 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\int dt + c'$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = -t + c' \Rightarrow \frac{1}{y} = t + \frac{1}{y_0} \Rightarrow y = \frac{1}{t + \frac{1}{y_0}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{1 + t y_0} \qquad \left(t > -\frac{1}{y_0}\right).$$

Άρα $\psi_t(y) = \dfrac{y}{1+ty}$ και $h(\varphi_\tau(x)) = h(xe^{-\tau}) = \underbrace{\dfrac{h(x)}{1+t\,h(x)}}_{\psi_t(h(x))}$.

Αν $h(x) = x$: $\cancel{x} e^{-\tau} = \dfrac{\cancel{x}}{1+tx} \Rightarrow \tau = \ln(1+tx)$.



$$\left(h(\varphi_t(x)) = \varphi_\tau(x) = x e^{-\tau} = \right.$$

$$= x e^{-\ln(1+tx)} = \frac{x}{1+tx} = \psi_t(h(x))$$

$$\left. = \psi_t(x). \right)$$

(γνησίως αύξουσα και "1-1")

Παρατηρούμε ότι οι δύο τροχιές:

$$x(t) = x_0 e^{-t} \quad (t \geq 0) \quad \text{καί} \quad y(t) = \frac{y_0}{1 + t y_0} \quad (t \geq 0)$$

έχουν "παρόμοια" χαρακτηριστικά αν $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ (γνησίως φθίνουσες, τείνουν στο 0 καθώς $t \to +\infty$).