Προκαταρκτικά

Ορισμός: Νόρμα σε διανυσματικό χώρο $(V, \mathbb{R})$ είναι συνάρτηση $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες.

(i) $\forall \underline{v} \in V$, $\|\underline{v}\| \geq 0$ και $\|\underline{v}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$

(ii) $\forall \underline{v} \in V$, $a \in \mathbb{R}$: $\|a\underline{v}\| = |a| \cdot \|\underline{v}\|$

(iii) $\forall \underline{v}_1 \in V$, $\underline{v}_2 \in V$: $\|\underline{v}_1 + \underline{v}_2\| \leq \|\underline{v}_1\| + \|\underline{v}_2\|$
(τριγωνική ανισότητα)

Παράδειγμα: Χρήσιμες νόρμες στον $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

(i) $\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (νόρμα-1)

(ii) $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (Ευκλείδεια νόρμα, νόρμα 2)

(iii) $\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$, $p \geq 1$ (νόρμα-p)

(iv) $\|\underline{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$ (νόρμα ∞).

Οι ιδιότητες (i) και (ii) στον ορισμό προκύπτουν εύκολα. Θα δείξουμε την τριγωνική ανισότητα για τις νόρμες (i)-(iv) στο Παράδειγμα. Παρόλο που η νόρμα 1 και νόρμα 2 είναι ειδικές περιπτώσεις της νόρμας p (και $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ καθώς $p \to \infty$ τις εξετάζουμε ξεχωριστά)

(α) Νόρμα-1 (ℓ_1)

Έστω $\underline{x} = [x_1\ x_2, \dots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} = [y_1, y_2, \dots y_n]^T \in \mathbb{R}^n$
Τότε:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + |y_i| \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|\underline{x}\|_1 + \|\underline{y}\|_1$$

(β) Ευκλείδια νόρμα (ℓ_2-νόρμα)

Ανισότητα Cauchy – Schwarz : $|\underline{x}^T\underline{y}| \leq \|\underline{x}\|_2 \cdot \|\underline{y}\|_2$:
Έχουμε γιά $\lambda \in \mathbb{R}$ (με την υπόθεση ότι $\underline{x} \neq 0$, $\underline{y} \neq \underline{0}$ διαφορετικά ανισότητα είναι προφανής)

$$0 \leq \|\underline{x} - \lambda \underline{y}\|^2 = (\underline{x}^T - \lambda \underline{y}^T)(\underline{x} - \lambda \underline{y}) = \|x\|^2 - 2\lambda \underline{x}^T\underline{y} + \|\underline{y}\|^2 \lambda^2$$

Ο όρος δεξιά ελαχιστοποιείται όταν

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\|\underline{x}\|_2^2 - 2\lambda\, \underline{x}^T\underline{y} + \lambda^2\|\underline{y}\|_2^2\right) = 0 \Rightarrow -2\,\underline{x}^T\underline{y} + 2\lambda\, \|\underline{y}\|_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda^* = \frac{\underline{x}^T\underline{y}}{\|\underline{y}\|_2^2}$$

Άρα : $0 \leq \|\underline{x}\|_2^2 - 2\,\dfrac{\underline{x}^T\underline{y}}{\|\underline{y}\|^2}(\underline{x}^T\underline{y}) + \dfrac{(\underline{x}^T\underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^4}\|\underline{y}\|_2^2$

$$= \|\underline{x}\|_2^2 - \frac{(\underline{x}^T\underline{y})^2}{\|\underline{y}\|_2^2} \Rightarrow |\underline{x}^T\underline{y}| \leq \|x\|_2 \cdot \|\underline{y}\|_2$$

Η τριγωνική ανισότητα προκύπτει άμεσα:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|_2^2 = (\underline{x}^T + \underline{y}^T)(\underline{x} + \underline{y}) = \underline{x}^T\underline{x} + 2\underline{x}^T\underline{y} + \underline{y}^T\underline{y}$$

$$= \|\underline{x}\|_2^2 + 2\,\underline{x}^T\underline{y} + \|y\|_2^2 \leq$$

$$\leq \|\underline{x}\|_2^2 + 2|\underline{x}^T\underline{y}| + \|\underline{y}\|_2^2 \leq$$

$$\leq \|\underline{x}\|_2^2 + 2\|x\|_2 \cdot \|y\|_2 + \|\underline{y}\|_2^2$$

$$= \left(\|\underline{x}\|_2 + \|y\|_2\right)^2$$

$$\Rightarrow \|\underline{x} + y\|_2 \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$$

(γ) Νόρμα μεγίστου (ℓ_∞-νόρμα)

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} (|x_i+y_i|) \leq \max_{i=1,2,\dots,n} (|x_i|+|y_i|)$$

$$\leq \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i| + \max_{i=1,2,\dots,n} |y_i| = \|\underline{x}\|_\infty + \|\underline{y}\|_\infty$$

(δ) p-νόρμα ($p \geq 1$)

Λήμμα (Ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου). Αν $\alpha,\beta \geq 0$ και $0<t<1$, τότε $\alpha^t \beta^{1-t} \leq t\alpha+(1-t)\beta$.

Απόδειξη: Η ανισότητα είναι προφανής αν $\alpha=0$ ή $\beta=0$ οπότε υποθέτουμε ότι $\alpha>0$ και $\beta>0$. Η συνάρτηση $f(t) = \ln(t)$, $t>0$, είναι κοίλη ($f''=-1/t^2<0$) και επομένως:

$$f(tx+(1-t)y) \geq \cancel{tf(x)} \; tf(x)+(1-t)f(y)$$

για κάθε $x,y \geq 0$, $0<t<1$. Άρα

$$\ln(t\alpha+(1-t)\beta) \geq t\ln(\alpha)+(1-t)\ln(\beta)$$

$$\Rightarrow \quad t\alpha+(1-t)\beta \geq e^{t\ln(\alpha)+(1-t)\ln(\beta)}$$

$$= e^{t\ln\alpha} \cdot e^{(1-t)\ln\beta} = \alpha^t \beta^{1-t}$$

Πρόταση (Ανισότητα Hölder). Έστω $1 \leq p,q \leq \infty$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (όπου συμβατικά $1/\infty=0$). Τότε για $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle \underline{x},\underline{y}\rangle| = |\underline{x}^T\underline{y}| \leq \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εύκολη για $(p,q)=(1,\infty)$

και παραλείπεται, οπότε θεωρούμε $1<p,q<\infty$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\underline{x}, \underline{y} \neq \underline{0}$ οπότε $\|\underline{x}\|_p > 0$ και $\|\underline{y}\|_q > 0$.
Έστω,

$$\alpha_j = \frac{|x_j|^p}{\|\underline{x}\|_p^p} \quad \text{και} \quad b_j = \frac{|y_j|^q}{\|\underline{y}\|_q^q} \qquad j=1,2,\dots,n$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου:

$$|x_j y_j| = |x_j| \cdot |y_j| = \alpha_j^{1/p} \|\underline{x}\|_p \cdot b_j^{1/q} \|\underline{y}\|_q$$

$$= \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q \, \alpha_j^t \, b_j^{1-t}, \quad t = \frac{1}{p}, \; 1-t = \frac{1}{q}$$

Επομένως: $|x_j y_j| \leq \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q \left(t\alpha_j + (1-t) b_j\right)$

$$\Rightarrow |\underline{x}^T \underline{y}| = \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j y_j|$$

$$\leq \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q \left(t \sum_{j=1}^n \alpha_j + (1-t) \sum_{j=1}^n b_j \right)$$

$$= \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q \left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^n \alpha_j + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^n b_j \right]$$

$$= \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q \cdot \left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j|^p}{\|\underline{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^n \frac{|y_j|^q}{\|\underline{y}\|_q^q} \right].$$

$$= \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q \left[\frac{1}{p} \frac{\sum |x_j|^p}{\|\underline{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum |y_j|^q}{\|\underline{y}\|_q^q} \right].$$

$$= \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q.$$

Τριγωνική ανισότητα (p-νόρμα) - Ανισότητα Minkowski:

Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Αν ~~$1 \leq p \leq \infty$~~ $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε:
$\|\underline{x} + \underline{y}\|_p \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_q$.

Απόδειξη: Η απόδειξη έχει ήδη γίνει γιά $p=1$ καί $p=\infty$ οπότε υποθέτουμε ότι $1<p<\infty$ και θέτουμε $q=\frac{p}{p-1}$ (οπότε $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$).

Γιά κάθε $j=1,2,\dots,n$

$$|x_j+y_j|^p = |x_j+y_j|\cdot|x_j+y_j|^{p-1} \le (|x_j|+|y_j|)\,|x_j+y_j|^{p-1}$$

Από την ανισότητα Hölder:

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|_p^p = \sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^p \le \sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)\,|x_j+y_j|^{p-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}|x_j|\cdot|x_j+y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n}|y_j|\cdot|x_j+y_j|^{p-1}$$

Έστω $\underline{x}=[|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|]^T$, $\underline{w}=[|x_1+y_1|^{p-1}\dots|x_n+y_n|^{p-1}]^T$
Τότε

$$|\underline{x}^T\underline{w}| \le \|\underline{x}\|_p\cdot\|\underline{w}\|_q$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}|x_j|\cdot|x_j+y_j|^{p-1} \le \|\underline{x}\|_p\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}|y_j|\cdot|x_j+y_j|^{p-1} \le \|\underline{y}\|_p\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.$$

Άρα: $\|\underline{x}+\underline{y}\|_p^p \le (\|\underline{x}\|_p+\|\underline{y}\|_p)\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.$

Όμως $(p-1)q=(p-1)\frac{p}{p-1}=p$, οπότε

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|_p^p \le (\|\underline{x}\|_p+\|\underline{y}\|_p)\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^p\Big)^{1/q}.$$

$$= (\|\underline{x}\|_p+\|\underline{y}\|_p)\Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}}$$

$$= (\|\underline{x}\|_p+\|\underline{y}\|_p)\,\|\underline{x}+\underline{y}\|_p^{\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}+\underline{y}\|_p^{\,p-\frac{p}{q}} \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p.$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}+\underline{y}\|_p^{\,p(1-\frac{1}{q})} \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}+\underline{y}\|_p^{\,p\frac{1}{p}} \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p$$

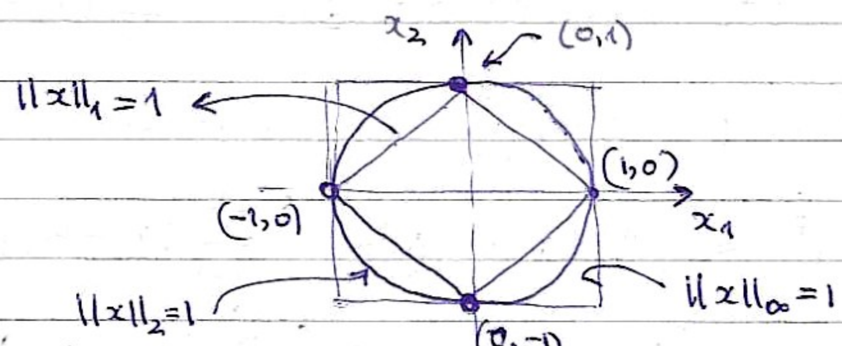
$$\Rightarrow \|\underline{x}+\underline{y}\|_p \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p . \qquad \square$$

<u>Ορισμός.</u> : Διανυσματικός χώρος $(V,\mathbb{R})$ εφοδιασμένος μέ νόρμα $\|\cdot\|$ συμβολίζεται ως $(V,\mathbb{R},\|\cdot\|)$ (χώρος μέ νόρμα $\|\cdot\|$). Η (ανοικτή) σφαίρα στόν $(V,\mathbb{R},\|\cdot\|)$ μέ κέντρο $v\in V$ καί ακτίνα $r>0$ είναι τό σύνολο

$$B(\underline{v},r) = \{\underline{x}\in V : \|\underline{x}-\underline{v}\| < r\}$$

$B(\underline{0},1) = \{\underline{x}\in V : \|x\|<1\}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα στον $(V,\mathbb{R},\|\cdot\|)$. Ένα σύνολο $S\subseteq V$ είναι φραγμένο αν $S\subseteq B(0,r)$ γιά κάποιο $r\geq 0$. Γενικά κάθε σφαίρα $B(v,r)$ είναι φραγμένη αφού $B(v,r)\subseteq B(\underline{0},\|v\|+r+1)$.

<u>Παράδειγμα.</u> : Σχήμα μοναδιαίας σφαίρας στόν $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R},\|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R},\|\cdot\|_2)$ καί $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty)$.



<u>Ορισμός</u> : Η ακολουθία $(\underline{v}_i)$ στόν $(V,\mathbb{R},\|\cdot\|)$ συγκλίνει

στό $\underline{v}$ αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \ \| \underline{v}_i - \underline{v} \| < \varepsilon$.
Γράφουμε $\underline{v}_i \to \underline{v}$ η $\lim(\underline{v}_i) = \underline{v}$.

<u>Ορισμός</u>: Εστω $(V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Τό σύνολο $K \subseteq V$ είναι κλειστό αν περιέχει όλα τά οριακά του σημεία, δηλαδή αν γιά κάθε $(\underline{v}_i) \subseteq K$, $\underline{v}_i \to \underline{v} \in V$ συνεπάγεται οτι $\underline{v} \in K$. Το K είναι ανοικτό αν $V \setminus K$ κλειστό. Σέ χώρους πεπερασμένης διάστασης αν K είναι κλειστό καί φραγμένο τότε είναι συμπαγές.

Εξετάζουμε συναρτήσεις χώρων μέ νόρμα, δηλ.

$$f : (\mathcal{U}, \mathbb{R}, \|\cdot\|_u) \to (V, \mathbb{R}, \|\cdot\|_v)$$

<u>Ορισμός</u>: Η f είναι συνεχής στό $u \in \mathcal{U}$ αν καί μόνο αν:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, u) : \|\underline{u} - \underline{x}\|_u < \delta \Rightarrow \|f(\underline{u}) - f(\underline{x})\|_v < \varepsilon$$

Η f είναι συνεχής στό $\mathcal{U}$ αν είναι συνεχής σέ κάθε $\underline{u} \in \mathcal{U}$.

<u>Λήμμα</u>: Η νόρμα $\|\cdot\|$ ως συνάρτηση μεταξύ τών χώρων $(V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ καί $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεχής στόν V.

<u>Απόδειξη</u>: Από τόν ορισμό συνέχειας στό $\underline{x}_0 \in V$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \big| \|\underline{x}\| - \|\underline{x}_0\| \big| < \varepsilon$$

Από τήν τριγωνική ανισότητα:

$$\|\underline{x}\| = \|\underline{x} - \underline{x}_0 + \underline{x}_0\| \leq \|\underline{x} - \underline{x}_0\| + \|\underline{x}_0\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}\| - \|\underline{x}_0\| \leq \|\underline{x} - \underline{x}_0\|$$

Παρόμοια:

$$\|\underline{x}_0\| = \|\underline{x}_0 - \underline{x} + \underline{x}\| \leq \|\underline{x} - \underline{x}_0\| + \|\underline{x}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}_0\| - \|\underline{x}\| \leq \|\underline{x} - \underline{x}_0\|.$$

Άρα: $\big| \|\underline{x}\| - \|\underline{x}_0\| \big| \leq \|\underline{x} - \underline{x}_0\|$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγοντας $\delta = \varepsilon$ έχουμε:

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \big| \|\underline{x}\| - \|\underline{x}_0\| \big| < \delta = \varepsilon$$

και επομένως η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι συνεχής συνάρτηση. $\blacksquare$

<u>Ορισμός</u> (Ισοδύναμες νόρμες). Έστω χώρος $(V, \mathbb{R})$ με δύο νόρμες $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$. Λέμε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν $\exists m, M > 0$, έτσι ώστε

$$m \|\underline{v}\|_\alpha \leq \|\underline{v}\|_\beta \leq M \|\underline{v}\|_\alpha$$

για κάθε $\underline{v} \in V$.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και οι νόρμες $\|\underline{x}\|_1$ και $\|\underline{x}\|_\infty$ όπως ορίστηκαν παραπάνω. Τότε:

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\underline{x}\|_1$$

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{j=1,2,\dots,n} |x_j| \right) =$$

$$= n \max_{j=1,2,\dots,n} |x_j| = n \|\underline{x}\|_\infty.$$

Επομένως: $\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_1 \leq n\|\underline{x}\|_\infty$

Επίσης: $\|\underline{x}\|_1 \leq n\|\underline{x}\|_\infty \leq n\|\underline{x}\|_1$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\|\underline{x}\|_1 \leq \|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_1$$

Και επομένως $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty \Leftrightarrow \|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$ δύο νόρμες στον $(V, \mathbb{R})$. Δείξτε ότι: (i) $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta \Leftrightarrow \|\cdot\|_\beta \sim \|\cdot\|_\alpha$ όπου "$\sim$" είναι η σχέση ισοδυναμίας. (ii) Δείξτε επίσης ότι αν $\|\cdot\|_\gamma$ είναι επίσης νόρμα στον $(V, \mathbb{R})$, τότε αν $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$ και $\|\cdot\|_\beta \sim \|\cdot\|_\gamma \Rightarrow \|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\gamma$.

<u>Λήμμα</u>: Έστω $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$ στον χώρο $(V, \mathbb{R})$. Τότε μία ακολουθία $(v_i) \subseteq V$ συγκλίνει στο $\underline{v} \in V$ στον χώρο $(V, \mathbb{R}, \|\cdot\|_\alpha)$ αν και μόνο αν συγκλίνει στο $v \in V$ στον χώρο $(V, \mathbb{R}, \|\cdot\|_\beta)$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι $\underline{v}_i \to \underline{v} \in V$ ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\alpha$. Τότε:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \|\underline{v}_i - \underline{v}\|_\alpha < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Από την ισοδυναμία $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$ υπάρχουν m και $M > 0$ τέτοια ώστε

$$m\|\underline{v}\|_\alpha \leq \|\underline{v}\|_\beta \leq M\|\underline{v}\|_\alpha$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \|\underline{v}_n - \underline{v}\|_\alpha < \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall n \geq N_1$. Τότε για το ίδιο N_1: $\|\underline{v}_n - \underline{v}\|_\beta \leq M\|\underline{v}_n - \underline{v}\|_\alpha < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$. Και επομένως $\underline{v}_i \to \underline{v}$ ως προς $\|\cdot\|_\beta$. Το αντίστροφο αποδεικν.

<u>Θεώρημα</u>

Κάθε δύο νόρμες σε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$ δύο νόρμες που ορίζονται στον $(V, \mathbb{R})$. Και έστω $\{\underline{v}_i\}_{i=1}^n$ βάση του V. Γιά αυθαίρετο $\underline{x} \in V$ έχουμε $\underline{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \underline{v}_i$ γιά κάποια $\xi_i \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$\|\underline{x}\|_\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \, .$$

Μπορούμε εύκολα νά δείξουμε ότι $\|\cdot\|_\alpha : V \to \mathbb{R}_+$ είναι νόρμα στόν $(V, \mathbb{R})$. Άρα, αρκεί νά δείξουμε ότι γιά κάθε νόρμα $\|\cdot\|_\beta$ στόν $(V, \mathbb{R})$ ισχύει ότι $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$, δηλαδή ότι υπάρχουν $m, M > 0$ τέτοια ώστε $m\|\underline{x}\|_\alpha \leq \|\underline{x}\|_\beta \leq M\|\underline{x}\|_\alpha$ γιά κάθε $\underline{x} \in V$. Από τις ιδιότητες ορισμού νόρμας:

$$\|\underline{x}\|_\beta = \Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i \underline{v}_i\Big\|_\beta \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \cdot \|\underline{v}_i\|_\beta$$

$$\overset{(*)}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n \|\underline{v}_i\|_\beta^2}}_{M} := M\|\underline{x}\|_\alpha$$

(*) ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Έστω η συνάρτηση $f(\underline{\alpha}) = \big\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\big\|_\beta$. Η f είναι συνεχής ως συνάρτηση $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, |\cdot|)$: Πράγματι, αν $\underline{\alpha}, \underline{\alpha}' \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(\underline{\alpha}) - f(\underline{\alpha}')| = \Big| \Big\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\Big\|_\beta - \Big\|\sum_{i=1}^n \alpha_i' \underline{v}_i\Big\|_\beta \Big|$$

$$\leq \Big\|\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i')\underline{v}_i\Big\|_\beta \leq \Big\|\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \alpha_i'| \cdot \|\underline{v}_i\|_\beta$$

$$\overset{(*)}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i')^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\underline{v}_i\|_\beta^2} := m\|\underline{\alpha} - \underline{\alpha}'\|_2$$

Επομένως γιά κάθε $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ καί $\varepsilon > 0$, αν επιλέξουμε $\delta = \varepsilon/m$, τότε:

$$\|\underline{\alpha} - \underline{\alpha}'\|_2 < \delta \Rightarrow |f(\underline{\alpha}) - f(\underline{\alpha}')| < m\delta = m\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$$

καί η f είναι συνεχής.

Εστω $S = \{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Το σύνολο S είναι κλειστό καί φραγμένο, άρα συμπαγές στόν $\mathbb{R}^n$, καί επομένως η f έχει ελάχιστο στοιχείο γιά κάποιο $\underline{\alpha}^* \in S$. ~~Τότε~~ [Θεώρημα Bolzano Weierstrass]. Τότε, γιά κάθε $\underline{x} \in V$, $\underline{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \underline{v}_i$, έχουμε:

$$\|\underline{x}\|_\beta = \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i \underline{v}_i\right\|_\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \cdot \left\|\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{\sqrt{\sum \xi_i^2}} \underline{v}_i\right\|_\beta$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \cdot \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i\right\|$$

όπου $\alpha_i := \frac{\xi_i}{\sqrt{\sum \xi_i^2}}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Επομένως

$$\|\underline{x}\|_\beta = \|\underline{x}\|_\alpha \cdot f(\underline{\alpha}) \geq \|\underline{x}\|_\alpha \min_{\underline{\alpha} \in S} f(\underline{\alpha})$$

$$= \|\underline{x}\|_\alpha \cdot f(\underline{\alpha}^*) = m\|\underline{x}\|_\alpha$$

Επομένως έχουμε γιά κάθε $\underline{x} \in V$:

$$m\|\underline{x}\|_\alpha \leq \|\underline{x}\|_\beta \leq M\|\underline{x}\|_\alpha$$

καί άρα $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$. $\square$

Παρεμφερές μέ τό Θεώρημα Bolzano–Weierstrass είναι καί τό παρακάτω:

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $(\underline{x}_n)$ ακολουθία που περιέχεται σέ συμπαγές υποσύνολο χώρου $(V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Τότε η ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης (σ.σ).

(Υπενθύμιση: $\underline{x}_0$ είναι σ.σ. της (x_n) αν $x_{n_k} \to x_0$ γιά κάποια υπακολουθία (x_{n_k})).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\mathfrak{X} = (V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Τότε τό σύνολο $S \subseteq \mathfrak{X}$ είναι κλειστό αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία πού περιέχεται στό S έχει τό όριο της στό S.

<u>Ορισμός</u>: Η ακολουθία $(\underline{x}_k) \in \mathfrak{X}$ λέγεται ακολουθία Cauchy αν $\|\underline{x}_k - \underline{x}_m\| \to 0$ καθώς $k, m \to \infty$. (δηλ. γιά κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$: $\|\underline{x}_k - \underline{x}_m\| < \varepsilon$ $\forall k, m \geq N$).

<u>Ορισμός</u>: Ο χώρος $\mathfrak{X}$ λέγεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy πού περιέχεται στόν $\mathfrak{X}$ συγκλίνει σέ κάποιο (διάνυσμα) του $\mathfrak{X}$. Πλήρης διανυσματικός χώρος μέ νόρμα λέγεται χώρος Banach.

<u>Παράδειγμα</u>: Ορίζουμε τό σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, το οποίο συμβολίζεται ως $C[a,b]$ (η $C^0[a,b]$). Το σύνολο είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. (μέ πράξεις $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$, $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$, $\underline{0}$ η συνάρτηση ταυτοτικά ίση μέ 0 στό $[a,b]$, κλπ). Ορίζουμε την νόρμα

$$\|x\|_c = \max_{t \in [a,b]} \|x(t)\|$$

όπου $\|\cdot\|$ δεξιά είναι οποιαδήποτε p-νόρμα στόν $\mathbb{R}^n$ ($\|\cdot\|_2$ γιά ευκολία). Άμεσα προκύπτει ότι

$\|x\|_c \geqslant 0$ καί $\|x\|_c = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Η τριγωνική ανισότητα ισχύει επίσης:

$$\max \|x(t)+y(t)\| \leq \max\left(\|x(t)\| + \|y(t)\|\right)$$

$$\leqslant \max\|x(t)\| + \max\|y(t)\|$$

$$= \|x\|_c + \|y\|_c$$

Επίσης: $\max\|\lambda x(t)\| = |\lambda|\cdot\max\|x(t)\| = |\lambda|\cdot\|x\|_c$ γιά $\lambda\in\mathbb{R}$ καί επομένως ο $(C[\alpha,\beta], \mathbb{R}, \|\cdot\|_c)$ είναι χώρος μέ νόρμα. Επιπλέον είναι πλήρης (χώρος Banach). Θά το δείξουμε μέ τά παρακάτω βήματα:

(α) Σύγκλιση κατά σημείο: Εστω (x_k) ακολουθία Cauchy με όρους στόν $C[\alpha,\beta]$. Γιά κάθε $t\in[\alpha,\beta]$:

$$\|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \|x_k - x_m\|_c \to 0 \quad \text{καθώς } k,m\to\infty$$

καί αρα η ακολουθία $(x_k(t))$ είναι ακολουθία Cauchy στόν $\mathbb{R}^n$. Αλλά στόν $\mathbb{R}^n$ κάθε ~~p~~-νόρμα είναι πλήρης αφού σύγκλιση σέ νόρμα συνεπάγεται σύγκλιση κάθε στοιχείο καί αφού ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης. Αρα γιά κάθε $t\in[\alpha,\beta]$ υπάρχει $x(t)\in\mathbb{R}^n$ τέτοιο ωστε $x_k(t)\to x(t)$ πού υποδεικνύει σύγκλιση (κατά σημείο). Ορίζουμε ως $x(t)$ την συνάρτηση πο αντιστοιχεί σέ κάθε t τό όριο της ακολουθίας $(x_k(t))$.

(β) Ομοιόμορφη σύγκλιση $x_k\to x$ στό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Θά δείξουμε οτι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, δηλ. οτι γιά κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $\|x_k(t)-x(t)\|<\varepsilon$ γιά κάθε $k \geq N$ (τό N ανεξάρτητο από $t \in [\alpha,\beta]$):

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\|x_k - x_m\|_c < \frac{\varepsilon}{2}$ γιά $k, m > N$. Τότε γιά $k > N$:

$$\|x_k(t) - x(t)\| = \|x_k(t) - x_m(t) + x_m(t) - x(t)\|$$

$$\leq \|x_k(t) - x_m(t)\| + \|x_m(t) - x(t)\|$$

$$\leq \|x_k - x_m\|_c + \|x_m(t) - x(t)\|$$

Ο πρώτος όρος είναι μικρότερος από $\frac{\varepsilon}{2}$ γιά κάθε $k, m > N$. Επιλέγοντας $m = \overset{\varepsilon}{m}(t)$ αρκούντως μεγάλο, ο δεύτερος όρος είναι επίσης μικρότερος από $\varepsilon/2$. Επομένως υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ (πού εξαρτάται μόνο από τό ε) τέτοιος ώστε $\|x_k(t) - x(t)\| < \varepsilon$ γιά κάθε $k > N$ και $t \in [\alpha,\beta]$ (τό t ήταν αυθαίρετο, άρα η επιλογή του N είναι ανεξάρτητη του $t \in [\alpha,\beta]$). Άρα έχουμε $x_k \to x$ ομοιόμορφα στό $[\alpha,\beta]$.

(γ) Η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής στό $[\alpha,\beta]$: Έστω $t_0 \in [\alpha,\beta]$. Θά δείξουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $|t - t_0| < \delta$ και $t \in [\alpha,\beta]$ συνεπάγεται ότι $\|x(t) - x(t_0)\| < \varepsilon$. Έχουμε:

$\pm x_k(t)$
$\pm x_k(t_0)$

$$\|x(t) - x(t_0)\| \leq \|x(t) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x_k(t_0)\| + \|x_k(t_0) - x(t_0)\|$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $x_k \to x$ ομοιόμορφα μπορούμε νά επιλέξουμε $N_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|x(t) - x_k(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και} \quad \|x(t_0) - x_k(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{γιά } k > N_1.$$

Επι[illegible] $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$\| x_k(t) - x_k(t_0) \| < \frac{\varepsilon}{3}$ αν $|t-t_0| < \delta$ και $t \in [\alpha,\beta]$. Άρα,

$$t \in B_\delta(t_0) \cap [\alpha,\beta] \Rightarrow \| x(t) - x(t_0) \| < \varepsilon$$

Και εφόσον $\varepsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο η x είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, δηλ. $x \in C^0[\alpha,\beta]$.

(δ) $x_k \to x$ ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_c$: Προκύπτει άμεσα λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης. Για κάθε $t \in [\alpha,\beta]$ και $\varepsilon > 0$

$$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \| x_k(t) - x(t) \| < \varepsilon \quad \forall k \geq N, \ t \in [\alpha,\beta]$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \max_{t\in[\alpha,\beta]} \| x_k(t) - x(t) \| < \varepsilon \quad \text{"}$$

$$\Leftrightarrow \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \| x_k - x \|_c < \varepsilon$$

και επομένως $x_k \to x$ ως πρός την νόρμα $\|\cdot\|_c$.

Επομένως πράγματι ο $(C[\alpha,\beta], \mathbb{R}, \|\cdot\|_c)$ είναι χώρος Banach.

Παράδειγμα: Έστω η ακολουθία $f_n(t) = \sin(nt)/n \in C[0,\pi]$. Η ακολουθία είναι Cauchy (ως πρός την νόρμα $\|\cdot\|_c$):

$$\| f_m - f_n \|_c \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \frac{3}{N} \quad \text{αν } m,n \geq N$$

Άρα γιά κάθε $\varepsilon > 0$ επιλέγοντας $N = N(\varepsilon) = \lfloor \frac{3}{\varepsilon} \rfloor + 1$ έχουμε $\| f_m - f_n \| < \varepsilon$. Η ακολουθία συγκλίνει στην (συνεχή) συνάρτηση $f^* = 0$:

$$\| f_n - 0 \|_c = \frac{1}{n} \to 0 \qquad (\|\cdot\|_c \text{ η sup-νόρμα}).$$

Παρατήρηση: Η πληρότητα του χώρου εξαρτάται από την επιλογή νορμας:

Παράδειγμα: Η νόρμα ℓ_2 γιά συναρτήσεις στόν χώρο $C[\alpha,\beta]$ ορίζεται ως:

$$\|f\|_{\ell_2} = \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

Εστω η ακολουθία (f_n), $f_n \in C[-1,1]$:

$$f_n = 1 \quad (x\in[-1,0]),\quad f_n = \frac{1}{1+nx} \quad (x\in(0,1])$$

Η ακολουθία συγκλίνει ως πρός την ℓ_2-νόρμα στήν συνάρτηση: $f^*=1$ $(-1\leq x\leq 0)$, $f^*=0$ $(0<x\leq 1)$ πού προφανώς δέν είναι συνεχής. Το όριο προκύπτει από τόν υπολογισμό:

$$\|f_n-f^*\|_{\ell_2} = \left(\int_0^1 \frac{dx}{(1+nx)^2}\right)^{1/2} = \left(\left[-\frac{1}{n(1+nx}\right]_0^1\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

καθώς $n\to\infty$. Η ακολουθία (f_n) είναι Cauchy ως πρός την ℓ_2-νόρμα:

$$\|f_n-f_m\|_{\ell_2}^2 = \int_0^1\left(\frac{1}{1+nx}-\frac{1}{1+mx}\right)^2 dx$$

$$\leq \int_0^1\left[\frac{1}{(1+nx)^2}+\frac{1}{(1+mx)^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{1+n}+\frac{1}{1+m} \leq \frac{2}{N} \quad (\text{γιά κάθε } N\in\mathbb{N})$$

Θέτοντας $\varepsilon = \left\lfloor\left(\frac{2}{N}\right)^{1/2}\right\rfloor+1$ έχουμε $\|f_n-f_m\|_{\ell_2}<\varepsilon$. Αρα η ακολουθία

Μια γενίκευση του αποτελέσματος προηγούμενου παραδείγματος είναι τό Θεώρημα που ακολουθεί:

<u>Θεώρημα</u> : Ο χώρος $(C(E), \mathbb{R}, \|\cdot\|_c)$ των συνεχών συναρτήσεων $f: E \to \mathbb{R}^n$ όπου $\|\cdot\|_c$ είναι η sup-νόρμα (l_∞ νόρμα) και E συμπαγές σύνολο είναι πλήρες.

<u>Απόδειξη.</u> :

Έστω (f_n) ακολουθία Cauchy συναρτήσεων στόν χώρο $(C(E), \mathbb{R}, \|\cdot\|_c)$. Πρέπει νά δείξουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει σέ συνεχή συνάρτηση $f^* \in (C(E), \mathbb{R}, \|\cdot\|_c)$. Έστω $x_0 \in E$. Θά δείξουμε αρχικά ότι η ακολουθία $(f_n(x_0))$ συγκλίνει (ως ακολουθία στόν $\mathbb{R}^n$). Εφόσον εξ' υποθέσεως η ακολουθία (f_n) είναι Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow \| f_n(x_0) - f_m(x_0) \| \leq$$
$$\leq \| f_n - f_m \|_c < \varepsilon$$

καί επομένως $(f_n(x_0))$ είναι ακολουθία Cauchy στόν $\mathbb{R}^n$. Κάθε ακολουθία Cauchy στόν $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη καί επομένως περιέχεται σέ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επομένως από τό Θεώρημα Bolzano-Weierstrass η ακολουθία έχει σημείο συσσώρευσης, δηλ. υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $f_{n_k}(x_0) \to$ $\to f^*(x_0)$ καθώς $n_k \to \infty$. Ειδικότερα, η ακολουθία η ίδια συγκλίνει σε αυτό τό όριο γιατί αν $n \geq N(\varepsilon)$

$$\| f_n(x_0) - f^*(x_0) \| \leq \| f_n(x_0) - f_{n_k}(x_0) \| + \| f_{n_k}(x_0) - f^*(x_0) \| < 2\varepsilon$$

εφόσον $n_k \geq n$ γιά υπακολουθία. Επιπλέον, αφού ο N εξαρτάται μόνο από τό ε, έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.

Ορίζουμε συνάρτηση $f^*: E \to \mathbb{R}^n$ ως τό όριο πού ορίσαμε παραπάνω γιά κάθε $x \in E$. Θα δείξουμε οτι η f^* είναι συνεχής. Εφόσον το E είναι συμπαγές κάθε συνάρτηση f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής (Ασκηση: Αν $f: E \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής καί E συμπαγές τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής). Επομένως γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπαρχει $\delta(\varepsilon)$ ετσι ώστε $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$ γιά κάθε $x, y \in E$ μέ $\|x-y\| < \delta$. Επιλέγοντας $N(\varepsilon)$ οπως προηγουμένως, έχουμε γιά $n \geq N$:

$$\|f^*(x) - f^*(y)\| \leq \|f^*(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f^*(y)\| < 5\varepsilon$$

Εφόσον η ανισότητα ισχύει γιά κάθε $\hat{\varepsilon} = 5\varepsilon > 0$ η f^* είναι (ομοιόμορφα) συνεχής. $\square$

Πόρισμα: Ενα κλειστό υποσύνολο πλήρους χώρου μέ νόρμα είναι πλήρες.

Απόδειξη: Εστω (f_n) ακολουθία Cauchy συναρτήσεων $f_n \in Y \subseteq X$ όπου X πλήρης χώρος μέ νόρμα. Τότε, $f_n \to f^* \in X$. Εφόσον η f είναι τό οριο της ακολουθίας (f_n) καί τό κλειστό σύνολο Y εξ' ορισμού περιέχει όλα τά σημεία συσσώρευσης του εχουμε οτι $f^* \in Y$ καί τό Y είναι πλήρες ως πρός την νόρμα του χώρου. $\square$

Θεώρημα (συστολής)

Εστω S κλειστό υποσύνολο χώρου Banach $\mathcal{X} = (V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ καί εστω $T: S \to S$. 'Εστω οτι

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x-y\| \quad \forall x, y \in S, 0 \leq \rho < 1.$$

Τότε:

(α) Υπάρχει μοναδικό $x^* \in S$ τέτοιο ώστε $x^* = T(x^*)$ (σταθερό σημείο του T).

(β) Η ακολουθία πού ορίζεται από την εξίσωση $x_{k+1} = T(x_k)$, όπου x_1 αυθαίρετο στοιχείο του S) συγκλίνει στό x^*, δηλ $\|x_k - x^*\| \to 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Επιλέγουμε αυθαίρετο $x_1 \in S$ καί ορίζουμε την ακολουθία (x_k) από την αναδρομική σχέση $x_{k+1} = T(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Εφόσον $T: S \to S$, $x_k \in S$ γιά κάθε $k \geq 1$. Θά δείξουμε αρχικά ότι (x_k) είναι ακολουθία Cauchy. Έχουμε:

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T(x_k) - T(x_{k-1})\|$$

$$\leq \varrho \|x_k - x_{k-1}\| \leq \varrho^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \cdots$$

$$\leq \varrho^{k-1} \|x_2 - x_1\|$$

$k \to k+r-1$

Επομένως:

$$\|x_{k+r} - x_k\| \leq \|x_{k+r} - x_{k+r-1}\| + \|x_{k+r-1} - x_{k+r-2}\| + \cdots +$$

$$+ \|x_{k+1} - x_k\|$$

$$\leq \left(\varrho^{k+r-2} + \varrho^{k+\varrho-3} + \cdots + \varrho^{k-1}\right) \|x_2 - x_1\|$$

$$= \varrho^{k-1} \|x_2 - x_1\| \left(1 + \varrho + \cdots + \varrho^{r-1}\right)$$

$$\leq \varrho^{k-1} \|x_2-x_1\| \sum_{i=0}^{\infty} \varrho^{i} = \frac{\varrho^{k-1}}{1-\varrho} \|x_2-x_1\|$$

Ο όρος δεξιά τείνει στό 0 καθώς $k\to\infty$ καί επομένως η ακολουθία (x_k) είναι Cauchy. Εφόσον ο $\mathcal{X}$ είναι χώρος Banach,

$$x_k \to x^* \in \mathcal{X} \quad \text{καθώς } k\to\infty.$$

Επιπλέον, αφού το S είναι κλειστό, $x^*\in S$. Στην συνέχεια θά δείξουμε ότι $x^*=T(x^*)$. Εχουμε:

$\pm x_k$

$$\|x^*-T(x^*)\| \leq \|x^*-x_k\| + \|x_k-T(x^*)\|$$

$$\leq \|x^*-x_k\| + \|T(x_{k-1})-T(x^*)\|$$

$$\leq \|x^*-x_k\| + \varrho\, \|x_{k-1}-x^*\|$$

~~Επ~~ Στό όριο $k\to\infty$ ο όρος δεξιά γίνεται αυθαίρετα μικρός. Αρα $\|x^*-T(x^*)\|=0 \Leftrightarrow x^*=T(x^*)$, καί x^* είναι σταθερό σημείο του T.

Θά δείξουμε ότι x^* είναι τό μοναδικό σταθερό σημείο του T. Εστω ότι x^* καί y^* είναι δύο σταθερά σημεία του T. Τότε

$$\|x^*-y^*\| = \|T(x^*)-T(y^*)\| \leq \varrho\, \|x^*-y^*\|$$

$$\Rightarrow (1-\varrho)\, \|x^*-y^*\| \leq 0 \Rightarrow \|x^*-y^*\|=0 \Rightarrow x^*=y^*$$

καί τό σταθερό σημείο του T είναι μοναδικό. $\square$

Παράδειγμα: Έστω $a>0$ και $f=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$, όπου $x \geq \sqrt{a}$. Έστω $\bar{x}_1 > \sqrt{a}$ και $S=[\sqrt{a}, \bar{x}_1]$ το πεδίο ορισμού της f. Έχουμε

$$f(x)-\sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)-\sqrt{a} = \frac{x^2-2\sqrt{a}x+a}{2x} = \frac{(x-\sqrt{a})^2}{2x} \geq 0$$

αν $x \geq \sqrt{a}$. Έχουμε ότι $f: S \to S$. Επιπλέον η f είναι συνάρτηση συστολής στο S. Έστω $x_1, x_2 \in S$. Τότε:

$$f(x_1)-f(x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right) =$$

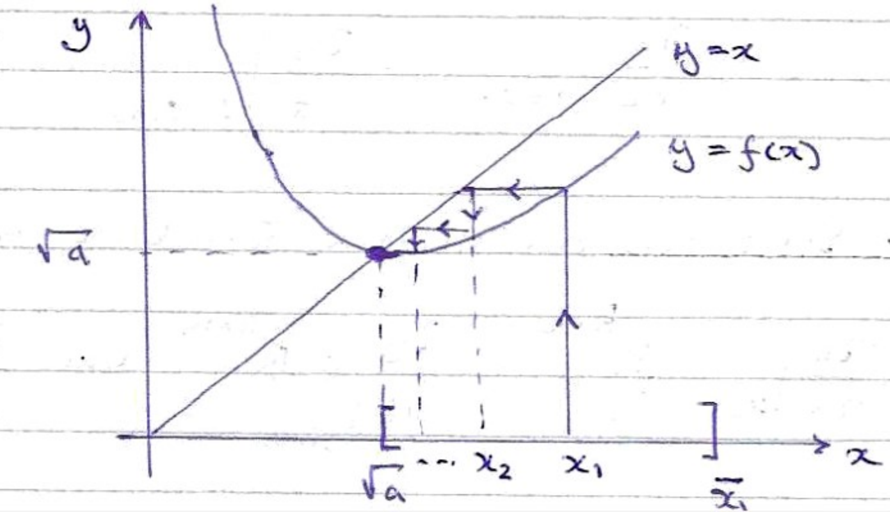
$$= \frac{1}{2}(x_1-x_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_2}-\frac{a}{x_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1-x_2) - \frac{a}{2}\,\frac{x_1-x_2}{x_1x_2} = \frac{1}{2}(x_1-x_2)\underbrace{\left(1-\frac{a}{x_1x_2}\right)}_{\gamma}$$

$$\gamma(x_1,x_2) = \frac{x_1x_2-a}{x_1x_2} \quad \text{και άρα} \quad 0 \leq \gamma(x_1,x_2) < 1 \text{ στο } S.$$

Άρα: $|f(x_1)-f(x_2)| < \frac{1}{2}|x_1-x_2|$ και η f είναι συνάρτηση συστολής στο S. Συνεπώς, η ακολουθία $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της f στο $S=[\sqrt{a}, \bar{x}_1]$:

$$x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right) \Rightarrow 2x = \frac{x^2+a}{x} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x=\sqrt{a}.$$



Διαφορίσιμες συναρτήσεις

Έστω S ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $f: S \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε σημείο $x_0 \in S$ αν οι μερικές παράγωγοι $\partial f_i / \partial x_j$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο x_0, $i=1,2,..m$, $j=1,2,\dots,n$. Η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο S αν είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του S ($f \in C^1(S, \mathbb{R}^n)$).
Αν $f: S \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη στο S η παράγωγος της f:

$$Df(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] = (\nabla f)^T$$

ονομάζεται και ως τι "διάνυσμα κλίσης" της f. Αν η $f: S \to \mathbb{R}^m$ ($S \subseteq \mathbb{R}^n$) η παράγωγος είναι ο πίνακας Jacobian

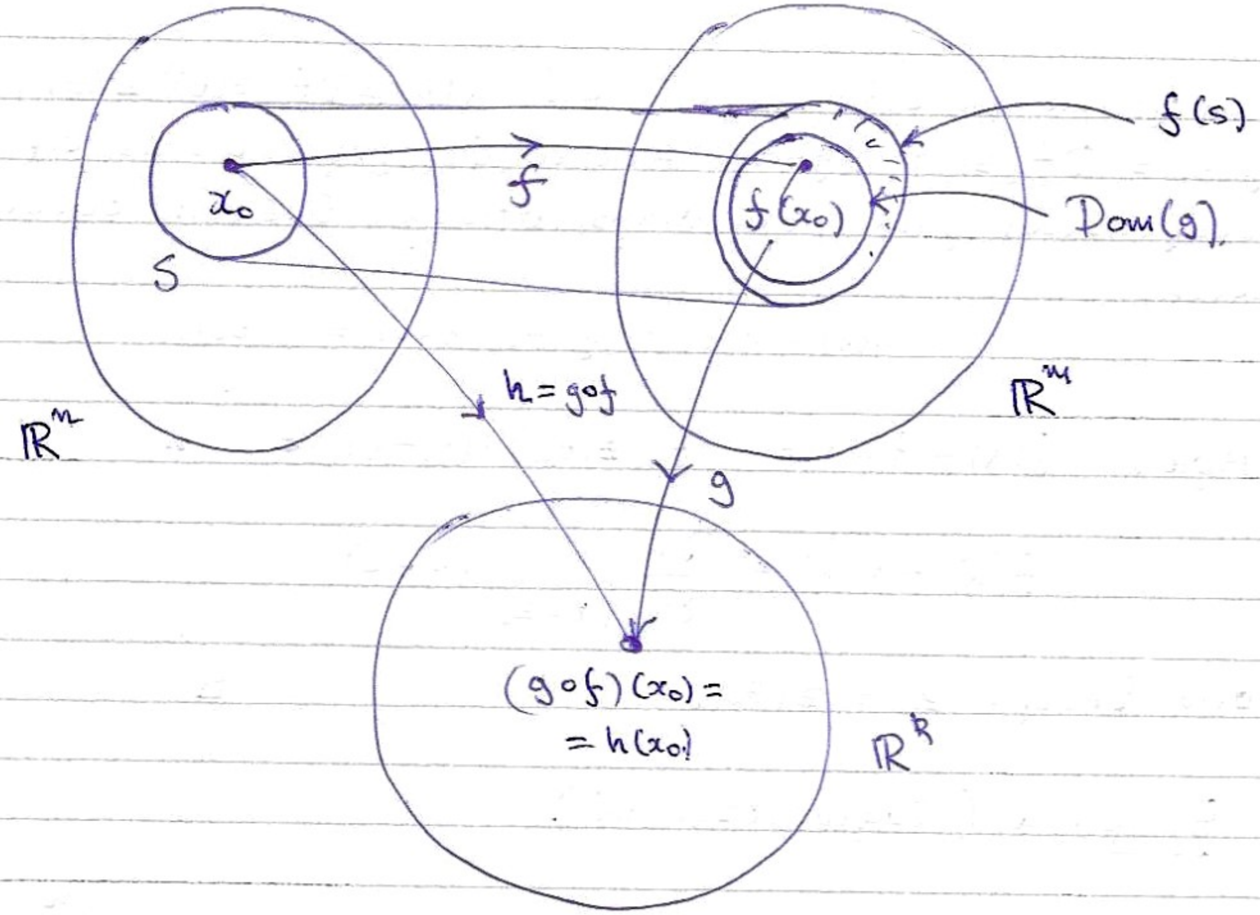
$$Df(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i=1,\dots,m}^{j=1,2,..n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Έστω ότι $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: S \to \mathbb{R}^m$, f συνεχώς διαφορίσιμη στο $x_0 \in S$, $g: A \to \mathbb{R}^k$ όπου A ανοικτό σύνολο που περιέχει $f(S)$ και g συνεχώς διαφορίσιμη στο σημείο $f(x_0)$. Τότε $h: S \to \mathbb{R}^k$, $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο x_0 και

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{f=f(x_0)} \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$

(Οι διαστάσεις των πινάκων Jacobian είναι:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x_0} \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{f(x_0)} \in \mathbb{R}^{k \times m} \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \in \mathbb{R}^{m \times n}).$$



<u>Θεώρημα</u> (μέσης τιμής στον $\mathbb{R}^n$)

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $x \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, S ανοικτό. Έστω x, y δύο σημεία στο S, έτσι ώστε

$$L(x,y) = \{ z : z = \theta x + (1-\theta) y ,\ 0 < \theta < 1 \} \subseteq S$$

Τότε υπάρχει σημείο $z_0 \in L(x,y)$, τ.ω.

$$f(y) - f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = z_0} (y - x)$$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $z(\theta) = (1-\theta) x + \theta y$ και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(\theta) = f(z(\theta))$, $\theta \in [0,1]$. Τότε $g(0) = f(x)$ και $g(1) = f(y)$. Εφόσον η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε κάθε σημείο, η g είναι συνεχώς

διαφορίσιμη γιά κάθε $\theta \in [0,1]$ καί $g'(\theta) = Df(z(\theta))\, z'(\theta)$, δηλ.
$g'(\theta) = Df(z(\theta)) \cdot (y-x)$. Από τό Θεώρημα μέσης τιμής συναρτήσεων μιας μεταβλητής, υπάρχει $\theta_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$g(1) - g(0) = g'(\theta_0)(1-0) = g'(\theta_0)$$

Άρα: $f(y) - f(x) = Df(z(\theta_0)) \cdot (y-x)$ ή

$$f(y) - f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=z_0} (y-x)$$

όπου θέσαμε $z_0 = z(\theta_0)$. $\square$

<u>Θεώρημα</u> (Taylor στόν $\mathbb{R}^n$)

Έστω $f : D \to \mathbb{R}$, όπου D ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν η f είναι $C^1(D,\mathbb{R})$, τότε γιά κάθε $x, y \in D$

$$f(y) = f(x) + Df(x) \cdot (y-x) + R_1(x,y)$$

όπου:

$$\lim_{y\to x} \left(\frac{R_1(x,y)}{\|x-y\|} \right) = 0$$

Επιπλέον, αν $f \in C^2(D,\mathbb{R})$, τότε

$$f(y) = f(x) + Df(x)\cdot(y-x) + \tfrac{1}{2}(y-x)^T D^2 f(x)\cdot(y-x) + R_2(x,y)$$

όπου:

$$\lim_{y\to x} \left(\frac{R_2(x,y)}{\|x-y\|^2} \right) = 0$$

Συναρτήσεις Lipschitz

Έστω $f: X \to Y$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $Y \subseteq \mathbb{R}^m$.

Ορισμός: Η f λέγεται Lipschitz αν γιά κάθε $x_1, x_2 \in X$ υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$. Η L λέγεται σταθερά Lipschitz.

Ορισμός: Η συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται "τοπικά Lipschitz" αν γιά κάθε $x \in X$ υπάρχει $r = r(x) > 0$ τέτοιο ώστε η f νά είναι Lipschitz στην περιοχή $B_r(x)$. (Η σταθερά Lipschitz σέ κάθε περιοχή δέν είναι απαραίτητα η ίδια).

Ορισμός: Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to Y$ λέγεται "ολικά Lipschitz" αν είναι Lipschitz στό $\mathbb{R}^n$.

Ο ορισμός επεκτείνεται σέ συναρτήσεις της μορφής $f(t,x): [t_0, t_1] \times X \to Y$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ καί $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, αν προσθέσουμε τόν προσδιορισμό "ομοιόμορφα ως προς t". Γιά παράδειγμα:

- Η $f(t,x)$ είναι Lipschitz "ως προς x" στό $[t_0, t_1] \times X$ αν ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \qquad (*)$$

γιά κάθε $t \in [t_0, t_1]$ και κάθε $x_1, x_2 \in X$ (με την ίδια σταθερά Lipschitz L).

- Η $f(t,x)$ είναι τοπικά Lipschitz "ως προς x" στό $[t_0, t_1] \times X \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ αν γιά κάθε $x \in X$ υπάρχει $r = r(x)$ έτσι ώστε η ανισότητα $(*)$ νά ικανοποιείται γιά κάθε

$(t,x) \in [t_0,t_1] \times B_r(x)$ με σταθερά Lipschitz $L = L(x)$.
Η $f(t,x)$ είναι τοπικά Lipschitz "ως προς x" στο $[t_0,\infty) \times X$ αν είναι τοπικά Lipschitz ως προς x στο $[t_0,t_1] \times X$ για κάθε (συμπαγές) διάστημα $[t_0,t_1] \subseteq [t_0,\infty)$.

Λήμμα 1: Έστω $f: X \to Y$ συνάρτηση Lipschitz. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και L η σταθερά Lipschitz της f. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon / L$. Τότε:

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < L\|x_1 - x_2\| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

και εφόσον δ δεν εξαρτάται από $x \in X$ η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λήμμα 2: Έστω οτι $f: X \to Y$ είναι τοπικά Lipschitz και $A \subseteq X$ συμπαγές. Τότε η f είναι Lipschitz στο A.

Απόδειξη: Άσκηση!

Λήμμα 3: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και κυρτό σύνολο και $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Τότε η f είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $L = \max\limits_{x \in A} \|Df(x)\|$.

Απόδειξη: Εφόσον A κυρτό, κάθε σημείο της ευθείας

$$L(x,y) = \{ \xi(s) : \xi(s) = (1-s)x + sy, \ 0 \leq s \leq 1 \}$$

ανήκει στο A. Επομένως:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(f(\xi(s)) \right) ds = \int_0^1 Df(\xi(s))\, \xi'(s)\, ds$$

$$= \int_0^1 Df(\xi(s)) \cdot (y-x)\, ds$$

Εφόσον το A είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ καί η νόρμα του πίνακα Jacobian είναι συνεχής συνάρτηση, τότε έχει μέγιστη τιμή στό A, δηλ.

$$K = \max\{ \|Df(x)\| : x \in A \}$$

Επομένως:

$$\|f(x) - f(y)\| = \left\| \int_0^1 Df(\xi(s)) \cdot (y-x)\, ds \right\|$$

$$\leq \int_0^1 \|Df(\xi(s))\| \cdot \|y-x\|\, ds$$

$$\leq K \|y-x\|$$

καί η f είναι Lipschitz μέ σταθερά Lipschitz $L = K$.

<u>Πόρισμα:</u>

Αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο καί $f \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$, τότε η f είναι τοπικά Lipschitz.

<u>Απόδειξη</u>

Γιά κάθε $x \in E$ υπάρχει $r = r(x) > 0$ τέτοιο ωστε $\overline{B}_r(x) \subseteq E$. Εφόσον $\overline{B}_r(x)$ συμπαγές καί κυρτό σύνολο η f είναι Lipschitz στό $\overline{B}_r(x)$ από τό προηγούμενο αποτέλεσμα. Από τόν ορισμό η

... E.

Υπαρξη καί μοναδικότητα λύσης Π.Α.Τ.

Εστω τό πρόβλημα αρχικών τιμων (Π.Α.Τ.):

$$x' = f(x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \qquad (*)$$

οπου $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ καί $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ολοκληρώνοντας η εξίσωση μετασχηματίζεται σέ εξίσωση ολοκληρώματος:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau))\, d\tau \qquad (**)$$

Εστω οτι η εξίσωση αυτή μπορεί νά λυθεί ως πρός τήν συνάρτηση $x: J \to \mathbb{R}^n$ σέ διάστημα $J = [t_0 - a, t_0 + a]$. Το ολοκλήρωμα δεν απαιτεί η $x(\tau)$ νά είναι διαφορίσιμη, οπότε υποθέτουμε οτι είναι απλά συνεχής. Ομως, αν υπάρχει λύση $x(t)$ στήν (**) τότε είναι λύση του ΠΑΤ (*)

Λήμμα: Εστω $f \in C^0(E, \mathbb{R}^n)$ καί $x \in C^0(J, E)$ είναι λύση της (**). Τότε $x \in C^1(J, E)$ καί είναι λύση του (*).

Απόδειξη: Παρατηρούμε οτι αν η x είναι λύση της (**) τότε $x(t_0) = x_0$. Εφόσον $x \in C^0(J)$, η συνάρτηση $f(x(\tau))$ πού ολοκληρώνεται στήν (**) είναι επίσης συνεχής καί επομένως η συνάρτηση στό δεξιό μέλος της (**) είναι C^1 ως ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης. Από τό θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού η παράγωγος του δεξιού μέλους της (**) είναι ακριβώς $f(x(t))$, δηλαδή $x' = f(x)$.

Τό επόμενο θεώρημα (Picard-Lindelöf) αποδεικνύει τοπική υπαρξη καί μοναδικότητα λύσης μέ χρήση του θεωρήματος συστολής.

Θεώρημα

Έστω ότι γιά $x_0 \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $b>0$ τ.ω. η $f: \overline{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερή $K>0$. Τότε τό ΠΑΤ (*) έχει μοναδική λύση $x(t)$ γιά $t \in \mathcal{J} = [t_0-a, t_0+a]$ αν $a \leq \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right)$ όπου $M = \max\{\|f(x)\| : x \in \overline{B}_b(x_0)\}$.

Απόδειξη

Ορίζουμε αρχικά εναν (πλήρη) χώρο με νόρμα στόν οποίο εφαρμόζουμε τό Θεώρημα συστολής:

$$\mathcal{X} = \left(C^0(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|_c \right)$$

$$\text{όπου } \|x\|_c = \max_{t \in \mathcal{J}} \|x(t)\| \quad (\text{και } \|\cdot\| \text{ αυθαίρετη νόρμα στόν } \mathbb{R}^n).$$

Ορίζουμε υποσύνολο του $\mathcal{X}$ από όλες τις συναρτήσεις $x(t)$ που περιέχονται στή σφαίρα $\overline{B}_b(x_0)$ γιά όλο τό διάστημα $t \in \mathcal{J}$, δηλ. $x \in C^0(\mathcal{J}, \overline{B}_b(x_0))$ (x συνεχές $x: \mathcal{J} \to \overline{B}_b(x_0)$). Τό σύνολο $V := C^0(\mathcal{J}, \overline{B}_b(x_0))$ είναι κλειστό υποσύνολο του (πλήρους) χώρου $\mathcal{X}$ και επομένως πλήρες (από προηγούμενο αποτέλεσμα).

Εφόσον η f είναι Lipschitz στό $\overline{B}_b(x_0)$ είναι συνεχής και επομένως τό ολοκλήρωμα $\int_{t_0}^{t} f(x(\tau))\,d\tau$ είναι συνεχής συνάρτηση του t γιά κάθε $x(t) \in V$ (και μάλιστα παραγωγίσιμη C^1). Θά δείξουμε ότι ο τελεστής

$$T(u) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau))\,d\tau$$

απεικονίζει τό V στόν εαυτό του, δηλ. $T: V \to V$, και ότι θά συμπεράνουμε ότι ο T έχει μοναδικό σταθερό σημείο $x^* = T(x^*)$ τό οποίο από τό προηγούμενο Λήμμα είναι λύση του ΠΑΤ καί αντίστροφα, κάθε λύση του ΠΑΤ είναι σταθερό σημείο του T.

Αν $x \in V$, η $T(x)$ είναι συνεχής (αφού f συνεχής) αλλά πρέπει νά δείξουμε ότι $T(x) \in V$. Εφόσον $f \in \underbrace{C^0(\overline{B}_b(x_0), \mathbb{R}^n)}_{\text{συνεχής}}$ καί $\overline{B}_b(x_0)$ συμπαγές, η f είναι φραγμένη στό $\overline{B}_b(x_0)$ οπότε:

$$M = \max\{\|f(x)\| : x \in \overline{B}_b(x_0)\}$$

είναι καλά ορισμένο. Αν $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$:

$$\|T(x)(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(x(\tau))\|\, d\tau \right| \leq M|t - t_0| \leq Ma$$

καί εφόσον ο τελευταίος όρος δέν υπερβαίνει τό b, $a \leq \frac{b}{M}$. Στήν περίπτωση αυτή έχουμε $T(x)(t) \in \overline{B}_b(x_0)$ γιά κάθε $t \in J$, άρα $T(x) \in V$.

Γιά νά δείξουμε ότι T είναι συνάρτηση συστολής, έστω $x, y \in V$. Εφόσον η f είναι Lipschitz:

$$\|T(x)(t) - T(y)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(x(\tau)) - f(y(\tau))\|\, d\tau \right|$$

$$\leq K \left| \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - y(\tau)\|\, d\tau \right|$$

$$\leq Ka \|x - y\|_c$$

όταν $t \in J$. Επομένως $\|T(x) - T(y)\|_c \leq c\|x - y\|_c$ όπου $c = Ka < 1 \Leftarrow a < 1/K$. Επομένως ο T είναι τελεστής συστολής αν $a < \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right)$ καί από τό προηγούμενο Λήμμα τό (μοναδικό) σταθερό σημείο του T είναι η (μοναδική) λύση του ΠΑΤ. □

Παρατήρηση: Ο περιορισμός $a < \frac{1}{K}$ δεν είναι απαραίτητος και μία άλλη απόδειξη (Bielecki) δίνει την συνθήκη ύπαρξης και μοναδικότητας ως $a \le \frac{b}{M}$. (άσκηση!). Ο χώρος $\mathcal{X}$ τώρα ορίζεται ως $\mathcal{X} = \left(C^0(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|_L\right)$ όπου L η "νόρμα Bieleki":

$$\|f\|_L = \sup_{t \in \mathcal{J}} \left(e^{-L|t-t_0|} \, \|f(t)\| \right)$$

όπου $L \geq K$. Ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι ισοδύναμος με τον $\left(C^0(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|_c\right)$ και άρα πλήρης. Η απόδειξη είναι επίσης εφαρμογή του Θεωρήματος συστολής (με χρήση της νέας νόρμας).

Παράδειγμα:

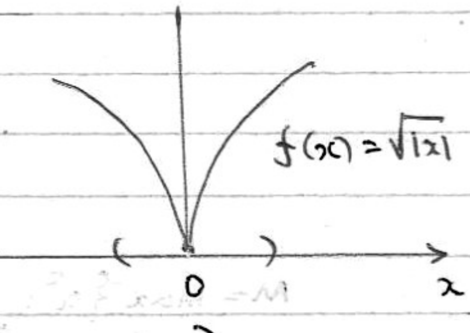
Έστω το Π.Α.Τ. $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$. Η συνάρτηση $f = \sqrt{|x|}$, $I \to \mathbb{R}_+$ δεν είναι Lipschitz αν $0 \in I$ (ούτε τοπικά): Έστω $x_1 = 0$, $x_2 = \varepsilon > 0$. Τότε

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,|x_2 - x_1|$$

Επομένως όταν $\varepsilon \to 0$ θα χρειαζόμασταν $L \to \infty$.

Οι συνθήκες του Θεωρήματος δεν ισχύουν και άρα δεν ξέρουμε αν υπάρχει μοναδική λύση. Στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν έχουμε μοναδικότητα. Δύο διακεκριμένες λύσεις είναι:

(i) $x_1(t) = \frac{1}{4} t^2$ $(t \geq 0)$, $x_1(t) = 0$ $(t < 0)$
και
(ii) $x_2(t) = 0$ $(t \in \mathbb{R})$



Παρατηρούμε ότι $x_1 \in C^1(\mathbb{R})$
(συνεχώς παραγωγίσιμη και στο σημείο $x = 0$).

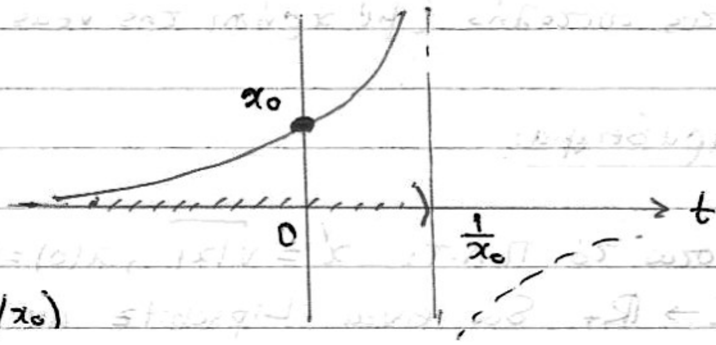
Παράδειγμα (Εκτίμηση μέγιστου διαστήματος ύπαρξης μέσω Θεωρήματος PL)

Έστω το ΠΑΤ: $x' = x^2$; $x(0) = x_0$ (Έστω ότι $x_0 > 0$).
Η εξίσωση λύνεται αναλυτικά: Αν $x \neq 0$,

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt + c' \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c' \Rightarrow \frac{1}{x} = c - t \Rightarrow$$

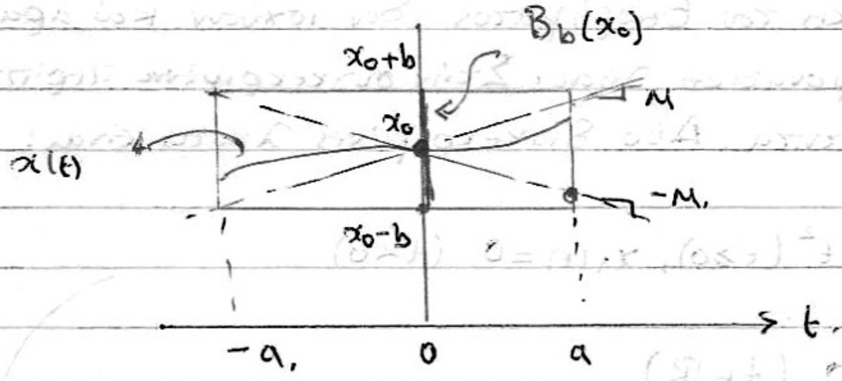
$$x(t) = \frac{1}{c-t}, \quad x(0) = x_0 \Rightarrow c = \frac{1}{x_0}, \text{ δηλαδή}$$

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}.$$

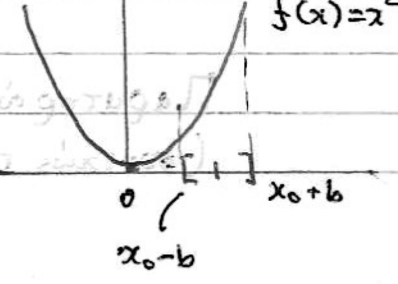


Η λύση "εκρήγνυται" σε πεπερασμένο χρόνο ($t = 1/x_0$)
Μέγιστο διάστημα ύπαρξης
$(-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Από το Θεώρημα PL έχουμε "εγγύηση" λύσης σε διάστημα $J = [-a, a]$ όπου $a = b/M$, $M = \max\{|f(x)| : x \in B_b(x_0)\}$. Η $f(x) = x^2$ είναι Lipschitz σε κάθε συμπαγές διάστημα του $\mathbb{R}$, $[x_0 - b, x_0 + b]$.



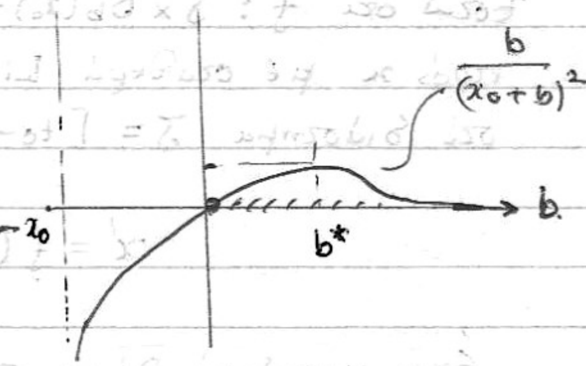
$M = \max\{x^2 : x \in [x_0 - b, x_0 + b]\}$
$= (x_0 + b)^2$



Άρα $\alpha = \frac{b}{M} = \frac{b}{(x_0+b)^2}$ καί $\max \alpha = a^* = \max\limits_{b\geq 0} \frac{b}{(x_0+b)^2}$

Έστω $g(b) = \frac{b}{(x_0+b)^2}$.

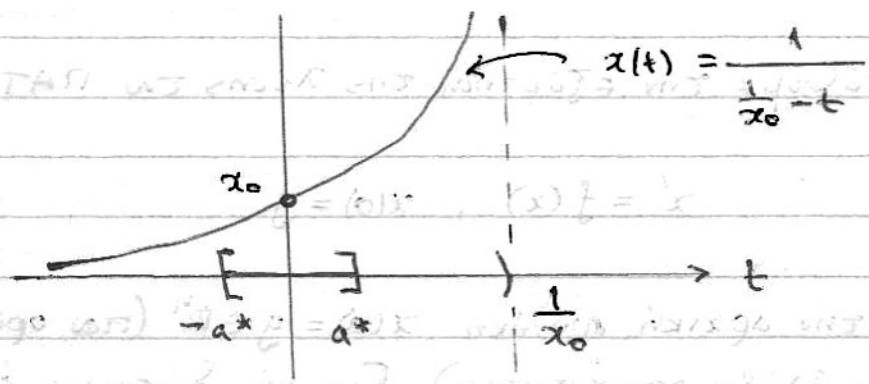
Μέγιστη τιμή στό $b \in [0, \infty)$ όταν



$$g'(b) = 0 \Rightarrow \frac{1\cdot(x_0+b)^2 - b\cdot 2(x_0+b)}{(x_0+b)^4}$$

$$\Rightarrow (x_0+b)(x_0+b-2b) = 0 \Rightarrow b = b^* = x_0$$

καί $a^* = \frac{x_0}{4x_0^2} = \frac{1}{4x_0}$.



<u>Ύπαρξη καί μοναδικότητα γιά μή-αυτόνομα συστήματα.</u>

Έστω τό μή αυτόνομο σύστημα: $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Τό σύστημα ισοδύναμό μέ ομογενές αν ορίσουμε τήν επιπλέον μεταβλητή $x_{n+1} = t$. Τότε $x_{n+1}' = 1$ καί επομένως αν ορίσουμε ως $y = (x, x_{n+1})$ καί $\hat{f} = (f, 1)$ η εξίσωση γράφεται ως $y' = (x', x_{n+1}') =$ $= (f(x_{n+1}, x), 1)$, $(x(t_0), x_{n+1}(t_0)) = (x_0, t_0)$. Επομένως τό προηγούμενο Θεώρημα εφαρμόζεται αν η f είναι Lipschitz καί ως προς t. Η υπόθεση αυτή είναι πολλά φορά περιοριστική.

Θεώρημα (Ύπαρξη καί μοναδικότητα γιά μη-αυτόνομα συστήματα)

Έστω ότι $f : J \times \overline{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz ως πρός x μέ σταθερά Lipschitz K καί συνεχής ως πρός t στό διάστημα $J = [t_0 - c, t_0 + c]$. Τότε, τό Π.Α.Τ

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

έχει μοναδική λύση στό διάστημα $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$, όπου $a = \min(c, \frac{b}{M})$ καί $M = \max\{\|f(t,x)\| : x \in \overline{B}_b(x_0), t \in J\}$.

Απόδειξη: Άσκηση!

Εξάρτηση από αρχικές συνθήκες.

Εξετάζουμε την εξάρτηση της λύσης του ΠΑΤ

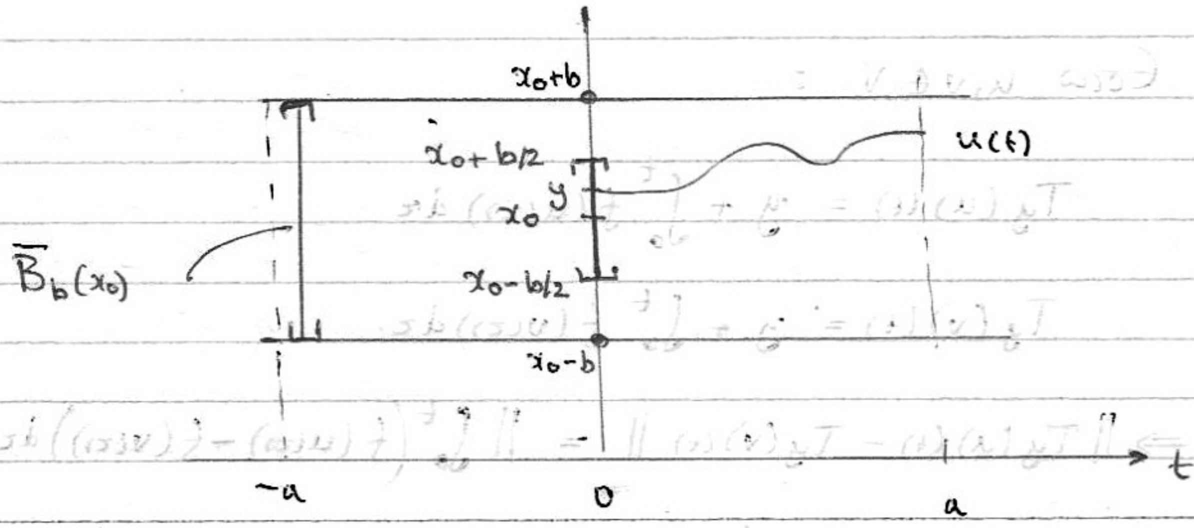
$$x' = f(x), \quad x(0) = y$$

από τήν αρχική συνθήκη $x(0) = y \in \mathbb{R}^n$ (που ορίζεται στό $t = 0$ χωρίς βλάβη γενικότητας). Γιά νά δώσουμε έμφαση στην εξάρτηση της λύσης από τό y, συμβολίζουμε τη λύση ως $u(t; y)$ όπου $u(0; y) = y$.

Λήμμα (Ύπαρξη γειτονικών λύσεων)

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ γιά τό οποίο υπάρχει $b > 0$ τ.ω η $f : \overline{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz μέ σταθερά K. Έστω $M = \max\{\|f(x)\| : x \in \overline{B}_b(x_0)\}$. Τότε η οικογένεια λύσεων $u(t, y)$ του ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(0) = y$ υπάρχει καί είναι μοναδική γιά κάθε $y \in B_{b/2}(x_0)$ καί $t \in [-a, a]$, όπου $a < \min(\frac{1}{K}, \frac{b}{2M})$.

<u>Απόδειξη</u>



Ορίζουμε $V = C^0(J, \overline{B}_b(x_0))$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $x: J \to \overline{B}_b(x_0)$

Το V είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου $(C^0(J,\mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|_c)$ και άρα πλήρες.

Ορίζουμε τελεστή T_y : $T_y(u) = y + \int_0^t f(u(\tau))d\tau$. Έχουμε

(α) $T_y : V \to V$

Αν u συνεχής συνάρτηση $\int_0^t f(u(\tau))d\tau$ συνεχής (και μάλιστα συνεχώς παραγωγίσιμη), άρα $T_y(u)$ συνεχής. Επίσης:

$$\|T_y(u) - x_0\| = \left\| y + \int_0^t f(u(\tau))\,d\tau - x_0 \right\|$$

$$\leq \underbrace{\|y - x_0\|}_{\leq b/2} + \left| \int_0^t \underbrace{\|f(u(\tau))\|}_{\leq M} d\tau \right|$$

$$\leq \frac{b}{2} + Ma. \leq b \Leftarrow a \leq \frac{b}{2M}.$$

(β) T_y συνάρτηση συστολής.

Έστω $u, v \in V$:

$$T_y(u)(t) = y + \int_0^t f(u(\tau))\,d\tau$$

$$T_y(v)(t) = y + \int_0^t f(v(\tau))\,d\tau$$

$$\Rightarrow \| T_y(u)(t) - T_y(v)(t) \| = \left\| \int_0^t \big(f(u(\tau)) - f(v(\tau))\big)\,d\tau \right\|$$

$$\leq \left| \int_0^t \underbrace{\| f(u(\tau)) - f(v(\tau)) \|}_{\leq K \| u(\tau) - v(\tau) \|} \,d\tau \right|$$

$$\leq K |t| \, \|u - v\|_C \leq K a \, \|u - v\|_C .$$

Άρα $\| T_y(u) - T_y(v) \|_C \leq K a \, \|u - v\|_C$.

και T_y συνάρτηση συστολής αν $K a < 1 \Leftarrow a < \frac{1}{K}$.

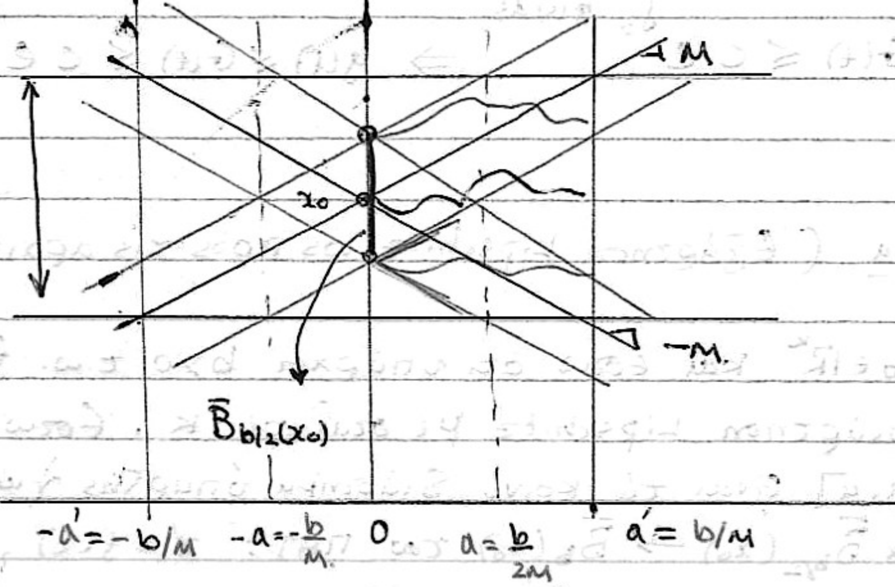
Συνεπώς αν $a < \min\left(\frac{b}{2M}, \frac{1}{K}\right)$ η $T_y : V \to V$ και είναι συνάρτηση συστολής και επομένως έχει μοναδικό σταθερό σημείο που είναι η λύση του ΠΑΤ. □

Παρατήρηση:

(1) Η ανισότητα $a < 1/K$ δεν είναι πάλι απαραίτητος και μπορεί να την παραλείψουμε.

(2) Το διάστημα $J = [-a, a]$ είναι το κοινό διάστημα λύσεων για κάθε ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(0) = y$ με $y \in \overline{B}_{b/2}(x_0)$.

(3) Σε σχέση με το Θεώρημα P.L. η περιοχή στην οποία το Θεώρημα εγγυάται λύση ~~έχει το~~ αντιστοιχεί στο μισό διάστημα.



<u>Λήμμα</u> (Grönwall)

Έστω $g, k : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $a>0$, $k(t) \geq 0$ και

$$g(t) \leq G(t) := c + \int_0^t k(s) g(s)\, ds$$

για κάθε $0 \leq t \leq a$. Τότε, για κάθε $t \in [0,a]$,

$$g(t) \leq c\, e^{\int_0^t k(s) ds}$$

<u>Απόδειξη:</u>

Εφόσον g και k συνεχείς, τότε $G \in C^1$ και $G(0) = c$.
Παραγωγίζοντας:

$$G'(t) = k(t) g(t) \leq k(t) G(t) \Rightarrow G'(t) - k(t) G(t) \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{-\int_0^t k(s) ds} G'(t) - e^{-\int_0^t k(s) ds} k(t) G(t) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(G(t) e^{-\int_0^t k(s) ds} \right) \leq 0 \Rightarrow G(t) e^{-\int_0^t k(s) ds} \leq G(0) = c$$

$$\Rightarrow \quad G(t) \leq c\, e^{\int_0^t k(s)\,ds} \quad \Rightarrow \quad g(t) \leq G(t) \leq c\, e^{-\int_0^t k(s)\,ds} \qquad \square$$

<u>Θεώρημα</u> (Εξάρτηση Lipschitz ως προς τις αρχικές συνθήκες).

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και έστω ότι υπάρχει $b>0$ τ.ω. $f: \overline{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά K. Έστω ότι το διάστημα $J = [-a, a]$ είναι το κοινό διάστημα ύπαρξης για λύσεις $u: J \times \overline{B}_{b/2}(x_0) \to \overline{B}_b(x_0)$ του ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(0) = y$. Τότε η συνάρτηση $u(t;y)$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz ως προς y με σταθερά Lipschitz e^{Ka}.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $u(t;y)$ και $u(t;z)$ δύο λύσεις με αρχικές συνθήκες στο $\overline{B}_{b/2}(x_0)$, δηλ. για $t \in [0, a]$:

$$u(t;y) = y + \int_0^t f(u(\tau;y))\,d\tau$$

$$u(t;z) = z + \int_0^t f(u(\tau;z))\,d\tau$$

Επομένως:

$$\|u(t;y) - u(t;z)\| \leq \|y-z\| + \int_0^t \|f(u(\tau;y)) - f(u(\tau;z))\|\,d\tau$$

$$\leq \|y-z\| + K \int_0^t \|u(\tau;y) - u(\tau;z)\|\,d\tau$$

Από την ανισότητα Grönwall (με $c = \|y-z\|$ και $k(t) = K$) έχουμε

$$\|u(t;y) - u(t;z)\| \leq \|y-z\| \cdot e^{Kt}$$

Άρα $u(t;y)$ ομοιόμορφα Lipschitz ως προς y με $L = e^{Ka}$. $\square$

Μέγιστο διάστημα ύπαρξης καί μοναδικότητας λύσης

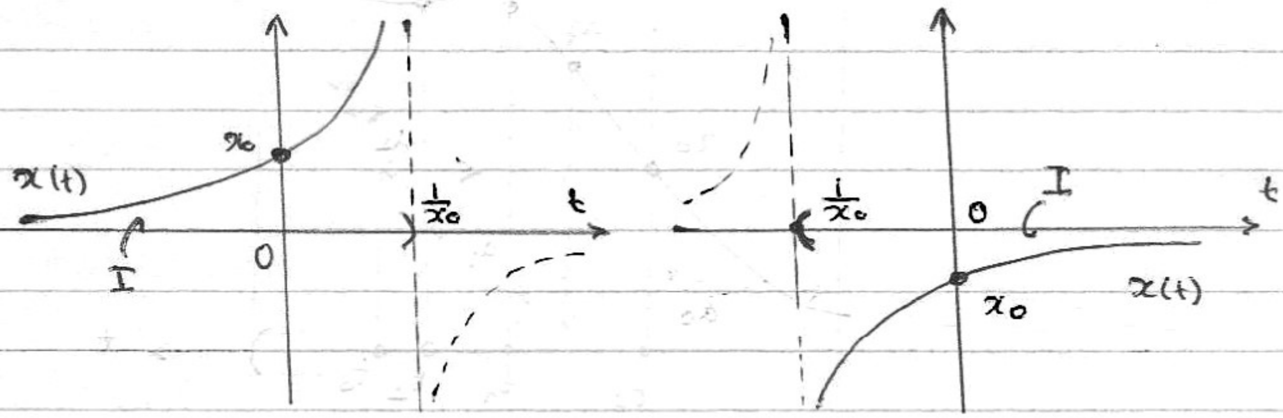
Τό Θεώρημα Picard - Lindelöf εγγυάται ότι αν η f είναι τοπικά Lipschitz μπορούμε νά βρούμε τη λύση σέ κλειστό διάστημα $J = [t_0-a, t_0+a]$. Η εκτίμηση μπορεί νά μην είναι ιδιαίτερα ακριβής καί η λύση νά υπάρχει σέ πολύ μεγαλύτερο διάστημα.

Ορισμός : Τό μέγιστο διάστημα ύπαρξης, $J(t_0,x_0)$ είναι τό μεγαλύτερο διάστημα του $\mathbb{R}$ πού περιέχει τό t_0 στό οποίο η λύση του Π.Α.Τ υπάρχει.

Παράδειγμα.

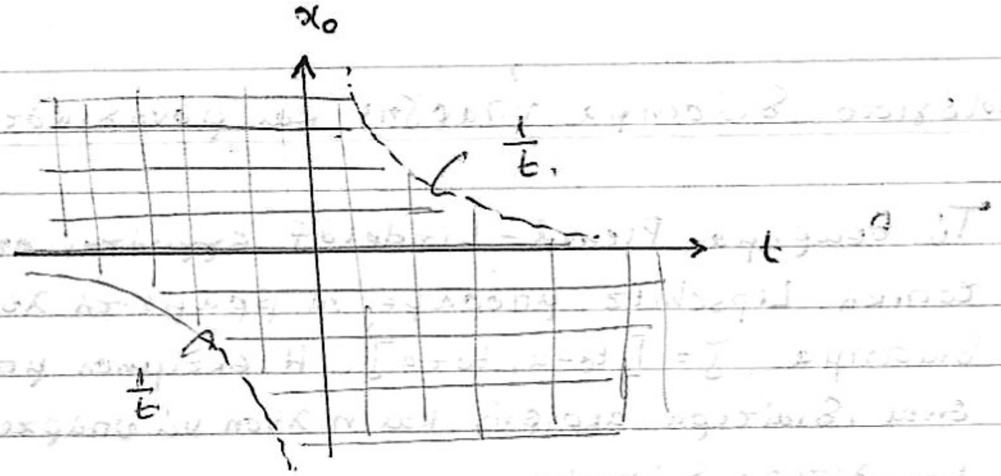
Εξετάζουμε καί πάλι τό ΠΑΤ : $x' = x^2$, $x(0) = x_0$ μέ αναλυτική λύση $x(t) = \dfrac{x_0}{1-tx_0}$

Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις ανάλογα μέ τό πρόσημο του x_0 :



$x_0 > 0$, $I = \left(-\infty, \frac{1}{x_0}\right)$ $\qquad$ $x_0 < 0$, $I = \left(\frac{1}{x_0}, +\infty\right)$.

Στήν περίπτωση $x_0 = 0$ η λύση είναι $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ καί $I = (-\infty, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι καί στίς τρείς περιπτώσεις τό I είναι ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$.

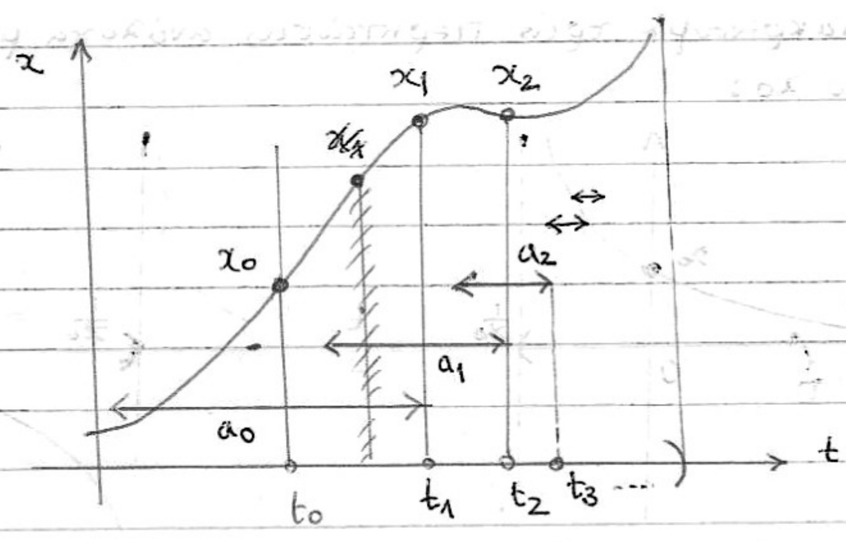


Περιοχή ύπαρξης λύσης στό επίπεδο (t, x_0)

Θεώρημα (Μέγιστο διάστημα ύπαρξης).

Έστω E ανοικτό σύνολο καί $f: E \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz. Τότε, υπάρχει μέγιστο, ανοικτό διάστημα $J = (\alpha, \beta)$, $t_0 \in J$, τέτοιο ώστε τό ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, έχει μοναδική λύση $x: J \to E$.

Απόδειξη



Θά χρησιμοποιήσουμε τόν συμβολισμό $x(t) = u(t, t_0, x_0)$ γιά την λύση του ΠΑΤ. Το θεώρημα PL εγγυάται ότι στό κάθε κλειστή περιοχή $\bar{B}_{b_0}(x_0) \subseteq E$ υπάρχει λύση στό διάστημα $J_0 = [t_0 - a_0, t_0 + a_0]$. Επιπλέον από την απόδειξη του θεωρήματος συνάγεται ότι

$u(t;t_0,x_0) \in \overline{B}_{b_0}(x_0) \subseteq E$ καί είναι C^1 (συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση). Επομένως:

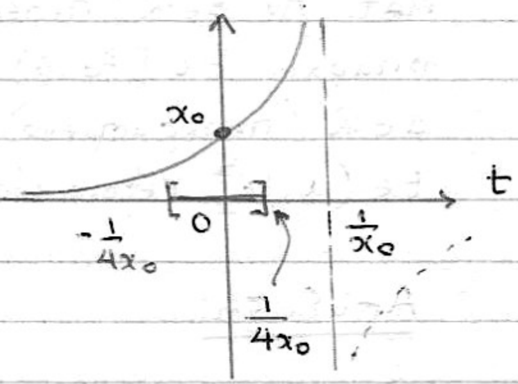
$$\lim_{t \to \underbrace{t_0+a_0}_{t_1}} u(t;t_0,x_0) = x_1 \in \overline{B}_{b_0}(x_0)$$

καί $x_1 \in E$ εφόσον E ανοικτό. Εφαρμόζουμε πάλι τό θεώρημα γιά το ΠΑΤ μέ αρχική συνθήκη $x(t_1) = x_1$ σέ περιοχή $\overline{B}_{b_1}(x_1) \subseteq E$ που μας δίνει νέα λύση $u(t;t_1,x_1)$ σέ διάστημα $J_1 = [t_1-a_1, t_1+a_1]$ γύρω από τό σημείο $t_1 = t_0+a_0$. Παρατηρούμε οτι $J_0 \cap J_1 \neq \phi$ καί το μονοσήμαντο της λύσης οτι $u(t;t_0,x_0) = u(t;t_1,x_1)$ στό $J_0 \cap J_1$.

Μέ παρόμοιο τρόπο η λύση επεκτείνεται καί δίνει μοναδική λύση σέ μεγαλύτερα διαστήματα. Έστω J η ένωση όλων των διαστημάτων καί $x(t)$ η μοναδική λύση που κατασκευάζεται στό J.

Το διάστημα J είναι ανοικτό. Έστω, γιά αντίφαση, οτι κάποιο άκρο του J ηταν κλειστό, π.χ. $J = (\alpha, \beta]$. Τότε, όπως προηγουμένως, $x(\beta) \in E$ καί η λύση θά μπορούσε νά επεκταθεί σέ μεγαλύτερο διάστημα, άτοπο. Επομένως τό J είναι ανοικτό διάστημα. $\square$

Παράδειγμα:



Εξετάζουμε πάλι το ΠΑΤ $x' = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$ μέ λύση:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}$$

Επιλέγοντας $b = x_0$ η μέγιστη τιμή της a_0 ήταν $a_0 = \frac{1}{4x_0}$ και επομένως $J_0 = [-a_0, a_0]$.

Γιά νά εφαρμόσουμε πάλι τό Θεώρημα PL γιά τό ΠΑΤ: $x' = x^2$, $x_1 = x(a_0)$ θά πρέπει νά μπορούσαμε νά υπολογίσουμε το x_1, πού γενικά δέν είναι δυνατόν. Στό παράδειγμα αυτό όμως, η αναλυτική λύση είναι γνωστή καί βρίσκουμε $x_1 = \frac{4x_0}{3}$. Η εφαρμογή του Θεωρήματος γιά τό νέο ΠΑΤ δίνει $J_2 = [t_1 - a_1, t_1 + a_1]$ όπου $a_1 = \frac{1}{4x_1} = \frac{3}{16x_0}$.

Άσκηση: Δείξτε ότι συνεχίζοντας την διαδικασία, τό Θεώρημα PL εγγυάται (μετά από n βήματα) ύπαρξη καί μοναδικότητα λύσης έως χρόνο t_n, όπου

$$t_n = \frac{1}{x_0}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

καί επομένως ότι $t_n \to t_\infty = \frac{1}{x_0}$ πού είναι ο (πραγματικός) "χρόνος έκρηξης" της λύσης.

Θεώρημα

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό καί $f: E \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz. Έστω ότι $J = (a, \beta)$ τό μέγιστο διάστημα ύπαρξης ~~του~~ της λύσης του ΠΑΤ. Αν $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο), τότε γιά κάθε συμπαγές $K \subseteq E$ υπάρχει $t \in [t_0, \beta)$ τέτοιο ώστε $x(t) \notin K$. Αντίστοιχα, αν $a \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο), τότε γιά κάθε συμπαγές $K \subseteq E$ υπάρχει $t \in (a, t_0]$ τέτοιο ώστε $x(t) \notin K$.

Απόδειξη.

Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση γιά τό άνω άκρο του J, $\beta \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός του θεωρήματος δεν ευσταθεί. Τότε θα υπήρχε συμπαγές σύνολο $K \subseteq E$ τέτοιο ώστε $x(t) \in K$ γιά κάθε $t \in [t_0, \beta)$. Εφόσον η f συνεχής και K συμπαγές, η f είναι φραγμένη στο K. Μάλιστα, τό ελάχιστο άνω φράγμα της f ταυτίζεται με την μέγιστη τιμή:

$$M = \max \{ \| f(x) \| : x \in K \}$$

- Από την εξίσωση λύσης του ΠΑΤ

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau))\, d\tau$$

συμπεραίνουμε ότι γιά $t_1 \leq t_2 < \beta$:

$$\| x(t_1) - x(t_2) \| \leq \int_{t_1}^{t_2} \| f(x(\tau)) \| d\tau \leq M \, |t_2 - t_1|$$

- Επομένως, αν $t_j \in [t_0, \beta)$ είναι ακολουθία $t_j \to \beta$, τότε η ακολουθία $(x(t_j))$ στό $\mathbb{R}^n$ είναι Cauchy

(Εφόσον $t_j \to \beta$ γιά κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) : |t_j - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}$ γιά κάθε $j \geq N$. Άρα γιά $j, k \geq N$:

$$\| x(t_j) - x(t_k) \| \leq M |t_j - t_k| \leq M (|t_j - \beta| + |t_k - \beta|)$$

$$\leq M \left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \right) = \varepsilon \quad)$$

- Εφόσον K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει (στό K): Έστω $x(t_j) \to x_1$.

- ~~Από τη~~ Έστω δύο ακολουθίες (t_j) και (τ_j) στό $[t_0, \beta)$, $t_j \to \beta$ και $\tau_j \to \beta$. Τότε:

$\tau_j - t_j \to 0$

$$\|x(\tau_j) - x_1\| \leq \|x(\tau_j) - x(t_j)\| + \|x(t_j) - x_1\|$$

$$\leq M|\tau_j - t_j| + \|x(t_j) - x_1\| \to 0$$

Καί άρα $x(\tau_j) \to x_1$. Άρα γιά κάθε ακολουθία (t_j), $t_j \in [t_0, \beta)$, $t_j \to \beta$, έχουμε $x(t_j) \to x_1$. Από την "αρχή της μεταφοράς" τό όριο

$$\lim_{t\to\beta} x(t) = x_1$$

είναι καλά ορισμένο.

- Ορίζουμε $x(\beta) = x_1$ ($x_1 \in K$ αφού K κλειστό). Τότε η $x(t)$ είναι συνεχής στό (κλειστό) διάστημα $[t_0, \beta]$. Το Θεώρημα PL γιά τό ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(\beta) = x_1$, εγγυάται ύπαρξη καί μοναδικότητα λύσης σέ κάποιο κλειστό διάστημα $J' \ni \beta$. Επιπλέον, $J \cap J' \neq \phi$. Από την μοναδικότητα λύσης, στό $J \cap J'$ οι λύσεις ταυτίζονται. Άρα, η λύση του ΠΑΤ επεκτείνεται πέραν του β καί άρα τό $J = (\alpha, \beta)$ δέν είναι τό μέγιστο διάστημα όπως έχουμε υποθέσει (άτοπο). Άρα, $\nexists$ συμπαγές $K \subseteq E$ γιά τό οποίο $x(t) \in K$ γιά κάθε $t \in [t_0, \beta)$. $\square$

<u>Πόρισμα</u>

Αν $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο), τότε η:

(ως πραγματικός αριθμός)

(i) Το όριο $\lim_{t\to\beta} x(t)$ δέν υπάρχει, η

(ii) $\lim_{t\to\beta} x(t) \in \partial E$.

Απόδειξη

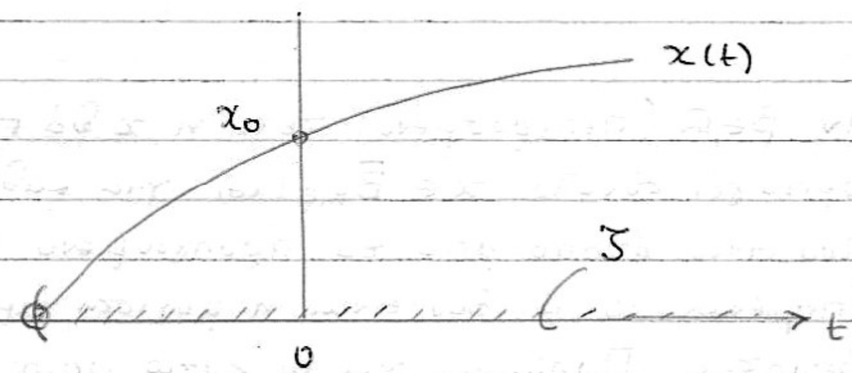
Αν $\beta \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε από τό προηγούμενο Θεώρημα ότι η $x(t)$ δεν περιορίζεται εντός κανενός συμπαγούς συνόλου $K \subseteq E$. Αν τό όριο υπάρχει, δέν μπορεί νά είναι σημείο του E, γιατί τότε η λύση θά μπορούσε νά επεκταθεί (εντός του E) όπως προηγουμένως. Επομένως, ~~γιά κάθε~~ καθώς $x(t) \in E$ γιά κάθε $t < \beta$, πρέπει να έχουμε $\lim_{t \to \beta} x(t) \in \partial E$. □

Παράδειγμα

Έστω τό ΠΑΤ: $x' = f(x) = \frac{1}{x}$, $x(0) = x_0 > 0$. Εφόσον η f δέν ορίζεται στό $x = 0$, επιλέγουμε $E = R_+ = (0, +\infty)$ (εφόσον $x(0) = x_0 > 0$). Η λύση υπολογίζεται αναλυτικά μέ την μέθοδο "διαχωρισμού μεταβλητών":

$$\int x\,dx = \int dt + c' \Rightarrow x^2 = 2t + c, \quad x^2(0) = x_0^2 = c$$

καί άρα $x(t) = \sqrt{x_0^2 + 2t}$. Έχουμε $x(t) > 0 \Rightarrow x_0^2 + 2t > 0$ $\Rightarrow t > -\frac{x_0^2}{2}$ καί επομένως μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης είναι τό $J = \left(-\frac{x_0^2}{2}, \infty\right)$.



Παρατηρούμε ότι σε αυτήν τήν περίπτωση: $\lim_{t \to \left(-\frac{x_0^2}{2}\right)^+} x(t) = 0 \in \partial E$

Ολική ύπαρξη λύσης

Εξετάζουμε συνθήκες κάτω από τις οποίες η λύση του ΠΑΤ υπάρχει (και είναι μοναδική) σε όλο το $J = \mathbb{R}$. Χωρίς βλάβη γενικότητας ορίζουμε το ΠΑΤ ως $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ (δηλ. θέτουμε $t_0 = 0$).

Θεώρημα

Αν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz και φραγμένη, τότε η λύση του ΠΑΤ υπάρχει (και είναι μοναδική) σε όλο το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Εφόσον η f είναι τοπικά Lipschitz η λύση $u(t; x_0)$ υπάρχει σε κάποιο μέγιστο (ανοικτό) διάστημα $J = (\alpha, \beta)$. Από την υπόθεση υπάρχει $m > 0$, τέτοιος ώστε $\|f(x)\| \leq m$ $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau))\,d\tau \Rightarrow \|x(t) - x_0\| \leq \int_0^t \|f(x(\tau))\|\,d\tau$$

$$\leq mt$$

Αν $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο) τότε η x θα περιέχετο σε συμπαγή σύνολο $x \in \bar{B}_{m\beta}(x_0)$ για κάθε $t \in [0, \beta)$, πού είναι άτοπο από το προηγούμενο Θεώρημα. Επομένως το β δεν είναι η μέγιστη τιμή του διαστήματος ύπαρξης. Παρόμοια για το κάτω όριο του J. (α). Άρα $J = (-\infty, \infty)$. $\square$

Θεώρημα:

Έστω $f: E=\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ολικά Lipschitz. Τότε η λύση του ΠΑΤ υπάρχει σέ όλο τό $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Παρόμοια μέ την προηγούμενη απόδειξη:

$$\|x(t)-x_0\| \leq \int_0^t \|f(x(\tau))\|\, d\tau \leq \int_0^t \Big(\|f(x(\tau))-f(x_0)\| + \|f(x_0)\| \Big) d\tau$$

γιά κάθε $t\in[0,\beta)$. Ο πρώτος όρος φράσεται ως:

$$\|f(x(\tau))-f(x_0)\| \leq K\, \|x(\tau)-x_0\|$$

όπου K η (ολική) σταθερά Lipschitz. Έστω $\beta\in\mathbb{R}$ (πεπερασμένο). Τότε

$$\|x(t)-x_0\| \leq \beta\, \|f(x_0)\| + K\int_0^t \|x(\tau)-x_0\|\, d\tau$$

Από τήν ανισότητα Grönwall,

$$\|x(t)-x_0\| \leq \beta\, \|f(x_0)\|\, e^{Kt}$$

Επομένως, αν $0\leq t<\beta$, η $x(t)$ περιέχεται σέ συμπαγές σύνολο

$$\overline{B}_{\beta\|f(x_0)\|e^{K\beta}}(x_0) = \{ y : \|y-x_0\| \leq \beta\, \|f(x_0)\|\, e^{K\beta} \}$$

πού αντιβαίνει σε προηγούμενο Θεώρημα. Άρα $\beta=\infty$ καί $\mathcal{J}=\mathbb{R}$ (παρόμοια γιά τό α). □

Τό επόμενο Πόρισμα είναι άμεσο αλλά είναι χρήσιμο στην ανάλυση ευστάθειας Lyapunov της επόμενης ενότητας

Πόρισμα

Εστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz και $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Εστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και έστω ότι κάθε λύση του ΠΑΤ : $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, $\varphi(t, x_0)$ στο διάστημα $J \subseteq J' = [t_0, \infty)$ στο οποίο ορίζεται ικανοποιεί την συνθήκη $\varphi(t, x_0) \in K$ γιά κάθε $t \in J$. Τότε, η λύση του ΠΑΤ υπάρχει και είναι μοναδική ~~σε~~ στό διάστημα J'.

Παράδειγμα / Ασκηση.

Εστω τό ΠΑΤ : $x' = f(x)$, $f(x) = -x^3$, $x(0) = x_0 > 0$. Δείξτε (χωρίς νά υπολογίσετε την λύση αναλυτικά) ότι η λύση του ΠΑΤ υπάρχει και είναι μοναδική στό διάστημα $[t_0, \infty)$. Επιβεβαιώστε τό συμπέρασμα σας επιλύοντας τό ΠΑΤ αναλυτικά. [Υπόδειξη: Μπορεί νά έχουμε $|x(t)| = x_0$ γιά $t > t_0$;]