Ελεγξιμότητα / Παρατηρησιμότητα.

Προκαταρκτικά:

1. Θετικά ορισμένοι (ημι-ορισμένοι) πίνακες.

Ορισμός: Έστω $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ο P είναι θετικά ορισμένος (ημι-ορισμένος) αν η τετραγωνική μορφή: $\underline{x}^T P \underline{x} > 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq 0$ (αντίστοιχα $\underline{x}^T P \underline{x} \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$). Παρόμοια ορίζουμε αρνητικά ορισμένους (ημιορισμένους) πίνακες: $P < 0 \Leftrightarrow -P > 0$, $P \leq 0 \Leftrightarrow -P \geq 0$

Παρατήρηση: Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P > 0$ ($P \geq 0$) τότε χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι ο P είναι συμμετρικός. ($P = P^T$).
Πράγματι:

$$\underline{x}^T P \underline{x} = \underline{x}^T \left[\frac{1}{2}(P+P^T) + \frac{1}{2}(P-P^T) \right] \underline{x}$$

όπου οι πίνακες $P+P^T$ και $P-P^T$ είναι συμμετρικός και αντι-συμμετρικός αντίστοιχα. Επομένως:

$$\underline{x}^T P \underline{x} = \frac{1}{2} \underline{x}^T (P+P^T) \underline{x} \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

και άρα $P > 0 \Leftrightarrow P+P^T > 0$ (αντίστοιχα $P \geq 0 \Leftrightarrow P+P^T \geq 0$).
Στο εξής υποθέτουμε ότι:

$$S_+^n = \{ P \in \mathbb{R}^{n \times n} : P = P^T > 0 \}, \quad \bar{S}_+^n = \{ P \in \mathbb{R}^{n \times n} : P = P^T \geq 0 \}$$

$$S^n = \{ P \in \mathbb{R}^{n \times n} : P = P^T \}$$

και έχουμε: $S_+^n \subseteq \bar{S}_+^n \subseteq S^n$, δηλ. υποθέτουμε ότι θετικά ορισμένοι και ημιορισμένοι πίνακες είναι αυτόματα συμμετρικοί.
Ιδιότητες:

(I1): S^n_+ και $\bar{S}^n_+$ είναι κυρτοί κώνοι στον χώρο $\mathbb{R}^{n\times n}$, δηλ.

(i) $P_1, P_2 \in S^n_+ \Rightarrow \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in S^n_+ \quad \forall \lambda \in [0,1]$

(ii) $P_1 \in S^n_+ \Rightarrow \lambda P_1 \in S^n_+ \quad \forall \lambda > 0$.

(I2): Αν $P>0$, $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\det(P)\neq 0$. (Αν $\det(P)=0$ τότε θα υπήρχε $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{x}\neq 0$, ώστε $P\underline{x}=0 \Rightarrow \underline{x}^T P \underline{x}=0$, άτοπο)

(I3): Αν $P>0$, $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\lambda_i(P)>0$, $i=1,2,\dots,n$. (αντίστοιχα $P\geq 0 \Rightarrow \lambda_i(P)\geq 0$, $i=1,2,\dots,n$): Λόγω συμμετρίας του P έχουμε $P=U\Lambda U^T$, $\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $UU^T=I_n$. Έστω ότι $\lambda_j\leq 0$ γιά κάποιο $j\in\{1,2,\dots n\}$. Τότε αν $\underline{u}_j$ η j-στήλη του U έχουμε: $\underline{u}_j^T P \underline{u}_j = \underline{u}_j^T U\Lambda U^T \underline{u}_j = \underline{e}_j^T \Lambda \underline{e}_j = \lambda_j \leq 0$, άτοπο καθώς $\underline{u}_j \neq 0$.

(I4): Αν $P=P^T\geq 0$, $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, τότε: $\underline{x}^T P \underline{x}=0 \Leftrightarrow P\underline{x}=0$: Γράφουμε: $P=U\,\mathrm{diag}\{\Lambda_1, 0\}U^T$, όπου $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\Lambda_1)>0$, $UU^T=I_n$. Έστω ότι $U=[U_1 \vdots U_2]$ όπου $U_1\in\mathbb{R}^{n\times r}$, $r=\mathrm{Rank}(P)$. Τότε $P\underline{x}=0 \Leftrightarrow \underline{x}\in \mathrm{Range}(U_2)$. Επίσης $P=U_1\Lambda_1 U_1^T = U_1\Lambda_1^{1/2}U_1^T U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T =: P_1^{1/2}\cdot P_1^{1/2}$, όπου $P_1^{1/2}=U_1\Lambda_1^{1/2}U_1^T=(P_1^{1/2})^T\geq 0$. Επομένως: $\underline{x}^T P \underline{x}=0 \Rightarrow \underline{x}^T P_1^{1/2} P_1^{1/2}\underline{x}=0 \Rightarrow P_1^{1/2}\underline{x}=0 \Rightarrow P_1^{1/2}P_1^{1/2}\underline{x}=0 \Rightarrow P\underline{x}=0$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή ($P\underline{x}=0 \Rightarrow \underline{x}^T P\underline{x}=0$) είναι προφανής.

(I5): Αν $P(t)=\int_0^t Q(\tau)Q^T(\tau)\,d\tau$, $Q(t)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n\times m})$ και $t>0$, τότε $P(t)=P^T(t)\geq 0$ και $\underline{x}^T P(t)\underline{x} = \int_0^t \|Q^T(\tau)\underline{x}\|\,dt$. Επομένως: $\underline{x}^T P(t)\underline{x}=0 \Leftrightarrow Q^T(\tau)\underline{x}=\underline{0} \quad \forall \tau\in[0,t]$ (λόγω συνέχειας). Επίσης $t_2\geq t_1 \Rightarrow P(t_2)\geq P(t_1)$ (πού εξ' ορισμού σημαίνει ότι $P(t_2)-P(t_1)\geq 0$).

2 Θεώρημα Cayley-Hamilton

Θεώρημα: Κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλ αν

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I_n) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$$

τότε: $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0$.

Απόδειξη: Έστω $B(\lambda) = \operatorname{adj}(A-\lambda I_n)$. Τότε $\partial B_{ij}(\lambda) \leq n-1$ $\forall i,j$ και $B(\lambda) = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Επομένως:

$$(A-\lambda I)\,B(\lambda) = p(\lambda)\,I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A-\lambda I)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n)I_n$$

$$\Rightarrow AB_0 + (AB_1 - B_0)\lambda + (AB_2 - B_1)\lambda^2 + \cdots + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n$$
$$= a_0 I_n + a_1 I_n \lambda + \cdots + a_n I_n \lambda^n.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -B_{n-1} &= a_n I \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I \\ &\ \vdots \\ AB_1 - B_0 &= a_1 I \\ AB_0 &= a_0 I \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -A^n \cancel{B_{n-1}} &= a_n A^n \\ A^n \cancel{B_{n-1}} - A^{n-1}\cancel{B_{n-2}} &= a_{n-1} A^{n-1} \\ &\ \vdots \\ A^2\cancel{B_1} - \cancel{AB_0} &= a_1 A \\ A\cancel{B_0} &= a_0 I \end{aligned}\right\}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $p(A) = 0$ □

3. Α-Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ένας υπόχωρος $\mathcal{V} \leq \mathbb{R}^n$ λέγεται Α-αναλλοίωτος αν $\forall \underline{x} \in \mathcal{V} \Rightarrow A\underline{x} \in \mathcal{V}$. Θα γράφουμε $A\mathcal{V} \leq \mathcal{V}$ γιά έναν Α-αναλλοίωτο υπόχωρο $\mathcal{V}$.

Παραδείγματα:

(i) $\mathcal{N}_r(A) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{0} \}$

(ii) $Range(A) = \{ A\underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n \}$

(iii) $\mathcal{N}_r(A^m) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A^m \underline{x} = \underline{0} \}$

(iv) $Range(A^m) = \{ A^m \underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n \}$

(v) Έστω $A = J_n(\lambda_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δηλ. A είναι Jordan block που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0. Ο υπόχωρος ~~$\mathcal{M} = \{$~~ $\mathcal{M} = span\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \dots, \underline{e_k}\}$, $k \in \{1,2,\dots n\}$ είναι $J_n(\lambda_0)$-αναλλοίωτος.

(vi) Έστω $A = \lambda_0 I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathcal{V}$ τυχών υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Τότε ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

(vii) Έστω $A = diag\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε οι υπόχωροι $\mathcal{M}_1 = span\{\underline{e_1}\}$, $\mathcal{M}_2 = span\{\underline{e_2}\}$, $\mathcal{M}_{1,2} = span\{\underline{e_1}, \underline{e_2}\}$ είναι A-αναλλοίωτοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$.

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\mathcal{V}$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$: $\dim(\mathcal{V}) = d$, $\mathcal{V} = span\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_d}\}$, $\underline{v_i} \in \mathbb{R}^{k n}$, $i \in \{1,2,\dots,d\}$. Τότε :
(α) Ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος $\Leftrightarrow$ (β) $A\underline{v_i} \in \mathcal{V}$ $\forall i \in \{1,2,\dots,d\}$.

Ορισμός:
Έστω $\mathcal{X}$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\underline{x} \in \mathcal{X}$. Ο ($A$-αναλλοίωτος) κυκλικός υπόχωρος του $\mathcal{X}$ παραγόμενος από τον πίνακα A ορίζεται ως:

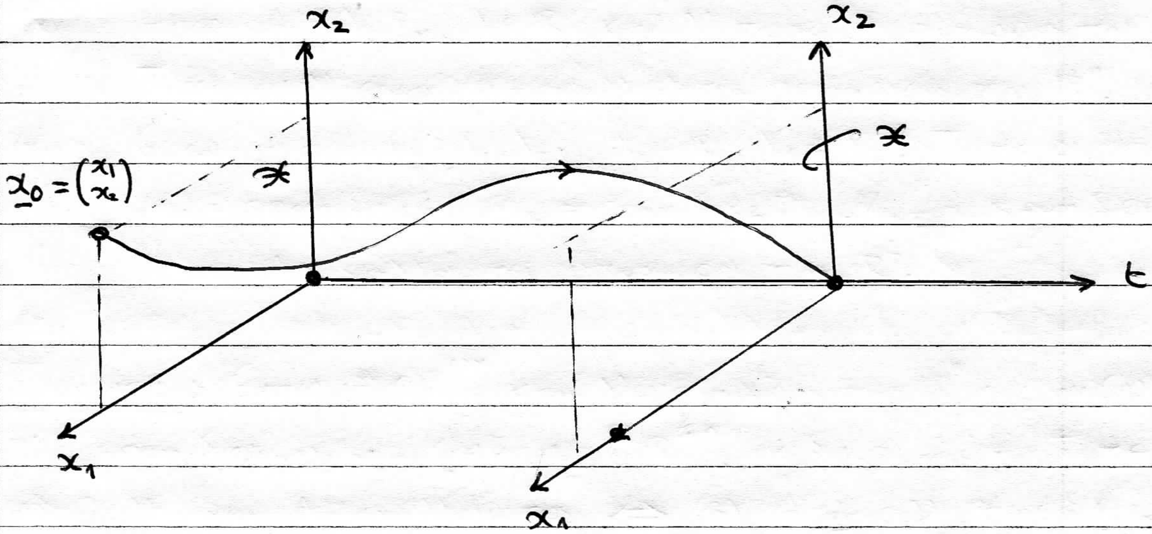
$$\mathcal{V} = span\{\underline{x}, A\underline{x}, \dots, A^{n-1}\underline{x}\} \qquad (*)$$

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε ο υπόχωρος (*) είναι ο ελάχιστος A-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το $\underline{x}$.

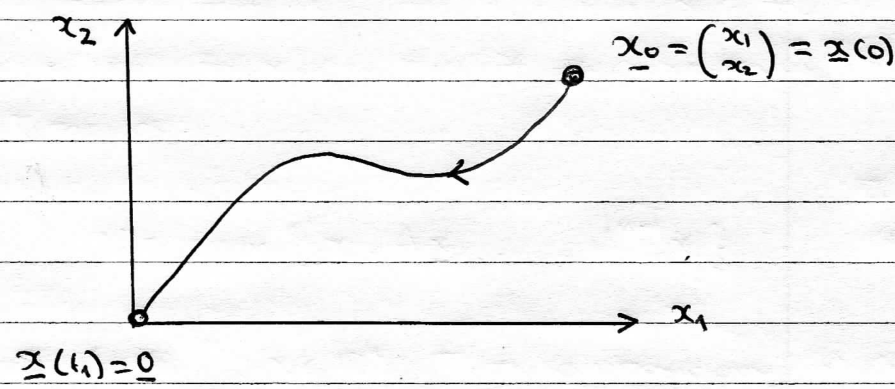
Ελεγξιμότητα:

Έστω το σύστημα: $\Sigma: \underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

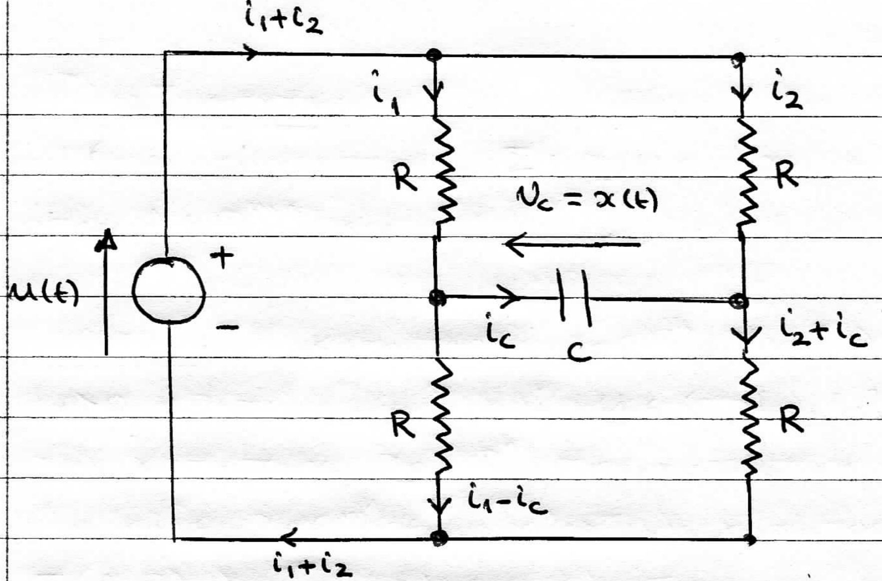
Ορισμός: Η "κατάσταση" $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ελέγξιμη αν υπάρχει $t_1 > 0$ (πεπερασμένο) και $\underline{u} \in C([0, t_1], \mathbb{R}^m)$ που μεταφέρει τήν κατάσταση $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ στήν "κατάσταση ηρεμίας" $\underline{x}(t_1) = \underline{0}$. Αν κάθε $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι ελέγξιμη κατάσταση, τότε τό σύστημα $\Sigma(A,B)$ λέγεται πλήρως ελέγξιμο.



Ισοδύναμα στό "πεδίο φάσματος":



Παράδειγμα: (μή ελέγξιμο σύστημα)



Αν $v_c(0) = x(0) = 0$ τότε λόγω της συμμετρίας του κυκλώματος $x(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ ανεξάρτητα από την τάση $u(t)$.

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} & i_c = C\frac{dv_c}{dt} = C\frac{dx}{dt} \\ & \underbrace{v_c(t)}_{x} + i_1 R = i_2 R \Rightarrow x(t) = (\underbrace{i_2 - i_1}_{-i_c})R \\ & i_1 \cancel{R} + (i_1 - i_c)\cancel{R} = i_2 \cancel{R} + (i_2 + i_c)\cancel{R} \Rightarrow i_c = i_1 - i_2 \end{aligned}\right\}$$

Επομένως:

$$C\frac{dx}{dt} + \frac{x}{R} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{1}{RC}x(t) = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-t/RC}x(0) \qquad \text{ανεξάρτητα από το } u(t).$$

Επομένως η κατάσταση του συστήματος δέν είναι ελέγξιμη από την είσοδο (κάθε $x(0) = x_0$ πρέπει να "οδηγείται" στην κατάσταση $x(t_1) = 0$ σε πεπερασμένο χρόνο t_1 μέσω κατάλληλης συνάρτησης εισόδου $u(t)$). $\square$

Έστω ότι η κατάσταση $\underline{x_0}$ είναι ελέγξιμη, δηλ. ότι υπάρχει $u \in C([0,t_1] \times \mathbb{R}^m)$ που την μεταφέρει στην κατάσταση $\underline{x}(t_1) = \underline{0}$ σε πεπερασμένο χρόνο t_1. Τότε:

$$0 = e^{At_1}\underline{x_0} + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}B\underline{u}(\tau)\,d\tau \Rightarrow -\underline{x_0} = \int_0^{t_1} e^{-A\tau}B\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή: $L_c(0,t_1): C([0,t_1]\times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$

$$L_c(0,t_1)\underline{u} = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$$

Τότε η κατάσταση $\underline{x_0}$ είναι ελέγξιμη αν και μόνο αν:

$$\underline{x_0} \in \text{Range}[L_c(0,t_1)] \quad \text{για κάποιο } t_1>0.$$

Το σύνολο των "ελέγξιμων καταστάσεων" είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{X}_c = \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \underline{x_0} \in \text{Range}[L_c(0,t_1)],\ 0<t_1<\infty \}$$

Το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν: $\mathcal{X}_c = \mathbb{R}^n$.
Η Grammian ελεγξιμότητας του συστήματος ορίζεται ως:

$$W_c(0,t_1) := \int_0^{t_1} e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau}\, d\tau \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad (t_1>0)$$

Ισχύει ότι: $W(0,t_1) = W^T(0,t_1) \geq 0$ για κάθε $t_1 \geq 0$. Ορίζουμε επίσης τον πίνακα ελεγξιμότητας

$$\Gamma_c := [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n\times mn}$$

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε $t_1>0$ έχουμε:

$$\mathcal{X}_c = \text{Range}[L_c(0,t_1)] = \text{Range}[W_c(0,t_1)] = \text{Range}(\Gamma_c)$$

<u>Απόδειξη</u>: (1) Αποδεικνύεται πρώτα ότι: $\text{Range}[L_c(0,t_1)] = \text{Range}[W_c(0,t_1)]$
Έχουμε:

$$L_c(0,t_1)\underline{u} = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση εισόδου: $\underline{u}(\tau) = B^T e^{-A^T\tau}\underline{\xi} \in \mathcal{C}([0,t_1], \mathbb{R}^m)$

όπου $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο διάνυσμα. Τότε

$$L_c(0,t_1)\,\underline{u} = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau}\, d\tau \cdot \underline{\xi}$$

$$= W_c(0,t_1)\,\underline{\xi}$$

και επομένως (εφόσον $\underline{\xi}$ αυθαίρετο), $\mathrm{Range}[W_c(0,t_1)] \subseteq \mathrm{Range}[L_c(0,t_1)]$

Αντίστροφα, έστω ότι $\underline{x_0} \in \mathrm{Range}[L_c(0,t_1)]$. Τότε υπάρχει $\underline{u} \in C([0,t_1] \times \mathbb{R}^m)$: $L_c\underline{u} = \underline{x_0}$. Καθώς $W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1)$ έχουμε:

$$\mathrm{Range}[W_c(0,t_1)] \oplus \mathcal{N}[W_c(0,t_1)] = \mathbb{R}^n$$

και: $$\mathcal{N}[W_c(0,t_1)] = \mathrm{Range}[W_c(0,t_1)]^{\perp}$$

Επομένως το $\underline{x_0}$ γράφεται (κατά μοναδικό τρόπο) ως:

$$\underline{x_0} = \underline{x_c} + \underline{x_n} \;;\; \underline{x_c} \in \mathrm{Range}[W_c(0,t_1)],\ \underline{x_n} \in \mathcal{N}[W_c(0,t_1)].$$

Έχουμε: $$W_c(0,t_1)\,\underline{x_n} = 0 \Rightarrow \underline{x_n}^T W_c(0,t_1)\,\underline{x_n} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \underline{x_n}^T e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau}\, \underline{x_n}\, d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \| B^T e^{-A^T\tau}\, \underline{x_n} \|\, d\tau = 0$$

και επομένως (λόγω συνέχειας):

$$B^T e^{-A^T\tau}\, \underline{x_n} = 0 \qquad \forall \tau \in [0,t_1] \qquad (*)$$

Επίσης: $W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1) \Rightarrow \mathrm{Range}[W_c(0,t_1)]^{\perp} = \mathcal{N}[W_c(0,t_1)]$

$\Rightarrow \underline{x_c}^T \underline{x_n} = 0$ και επομένως:

$$\underline{x}_0^T \underline{x}_n = (\underline{x}_c^T + \underline{x}_n^T)\underline{x}_n = \|\underline{x}_n\|^2$$

$$\Rightarrow (L_c \underline{u})^T \underline{x}_n = \|\underline{x}_n\|^2$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \underline{u}^T(\tau) B^T e^{-A^T\tau} \underline{x}_n \, d\tau = \|\underline{x}_n\|^2 = 0$$

(λόγω (*)). Επομένως $\underline{x}_n = \underline{0}$ καί $\underline{x}_0 = \underline{x}_c \in \text{Range}[W_c(0,t_1)]$

$$\Rightarrow \underline{\text{Range}[L_c(0,t_1)] \subseteq \text{Range}[W_c(0,t_1)]}$$

καί επομένως $\underline{\text{Range}[L_c(0,t_1)] = \text{Range}[W_c(0,t_1)]}$.

(2) $\forall t_1 > 0$: $\underline{\text{Range}[W_c(0,t_1)] = \text{Range}(\Gamma_c)}$

Πρώτα θά δείξουμε ότι $\underline{\text{Range}[W_c(0,t_1)] \subseteq \text{Range}(\Gamma_c)}$ γιά κάθε $t_1 > 0$: Έστω $\underline{x}_0 \in \text{Range}[W_c(0,t_1)]$ γιά κάποιο $t_1 > 0$ (αυθαίρετο). Τότε από τό πρώτο μέρος του θεωρήματος $\underline{x}_0 \in \text{Range}[L_c(0,t_1)]$, δηλ $\exists\, \underline{u}_* \in C([0,t_1] \times \mathbb{R}^m)$:

$$\underline{x}_0 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) \, d\tau$$

Από τό Θεώρημα Cayley-Hamilton:

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(\tau) A^k$$

καί επομένως:

$$\underline{x}_0 = \int_0^{t_1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(\tau) A^k B \, \underline{u}(\tau) \, d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \underbrace{\int_0^{t_1} \beta_k(\tau) \underline{u}(\tau) \, d\tau}_{\underline{\alpha}_k(t_1)}.$$

$$\Rightarrow \underline{x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \, \underline{\alpha}_k(t_1) = [B \;\; AB \cdots A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \underline{\alpha_0}(t_1) \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_{n-1}(t_1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x_0} \in Range(\Gamma_c)$$

$$\Rightarrow Range\,[W_c(0,t_1)] \subseteq Range(\Gamma_c)$$

Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι $Range(\Gamma_c) \subseteq Range\,[W_c(0,t_1)]$ $\forall t_1 > 0$. Έστω $\underline{x_0} \in Range(\Gamma_c)$ και έστω ότι $\underline{x_0} \notin Range\,[W_c(0,t_1)]$ για κάποιο $t_1 > 0$. Τότε $\underline{x_0} = \Gamma_c \underline{\eta}$, $\underline{\eta} \in \mathbb{R}^{mn}$. Εφόσον $W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1)$ έχουμε $\mathbb{R}^n = Range\,[W_c(0,t_1)] \oplus \mathcal{N}\,[W_c(0,t_1)]$ και αν $\underline{x_0} \notin Range\,[W_c(0,t_1)]$ τότε $\underline{x_0} = \underline{x_c} + \underline{x_n}$, $\underline{x_c} \in Range\,[W_c(0,t_1)]$, $\underline{x_n} \in \mathcal{N}\,[W_c(0,t_1)]$, και $\underline{x_n} \neq 0$. Έχουμε:

$$W_c(0,t_1)\,\underline{x_n} = \underline{0} \quad \Rightarrow \underline{x_n}^T W_c(0,t_1)\underline{x_n} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \underline{x_n}^T e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} \underline{x_n} \, d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \| B^T e^{-A^T\tau} \underline{x_n} \| \, d\tau = 0$$

$$\Rightarrow B^T e^{-A^T\tau} \underline{x_n} \equiv 0 \qquad \forall \tau \in [0,t_1].$$

Παραγωγίζοντας την ταυτότητα αυτή έχουμε:

$$\underline{x_n}^T e^{-A\tau} B = 0 \quad \forall \; \tau \in [0,t_1]$$

$$\Rightarrow (\underline{x_n}^T e^{-A\tau} B)' = \underline{x_n}^T e^{-A\tau} AB \Big|_{\tau=0} = 0 \Rightarrow \underline{x_n}^T AB = 0$$

και επαγωγικά: $\underline{x_n}^T e^{-A\tau} A^k B \Big|_{\tau=0} = 0 \qquad \forall k \geq 0$

που ισοδυναμεί με:

$$\underline{x_n}^T B = \underline{x_n}^T AB = \cdots = \underline{x_n}^T A^{n-1} B = \underline{0}$$

η $\underline{x_n}^T \Gamma_c \overset{(*)}{=} 0$. Από την σχέση $\underline{x_0} \overset{(**\,*)}{=} \Gamma_c \underline{\eta}$ και την σχέση $\underline{x_n}^T \underline{x_c} \overset{(**)}{=} 0$ έχουμε:

$$\|\underline{x_n}\|^2 = \underline{x_n}^T \underline{x_n} \overset{(**)}{=} \underline{x_n}^T (\underline{x_n} + \underline{x_c}) = \underline{x_n}^T \underline{x_0} \overset{(***)}{=} \underline{x_n}^T \Gamma_c \underline{\eta} \overset{(*)}{=} 0$$

$\Rightarrow \|\underline{x_n}\| = 0 \Rightarrow \underline{x_n} = \underline{0}$ (άτοπο). Επομένως $Range(\Gamma_c) \subseteq Range(W_c(0,t_1))$ πού μαζί με την αντίστροφη σχέση συνεπάγεται ότι $Range(\Gamma_c) = Range[W_c(0,t_1)]$ $\forall t_1 > 0$. $\square$

Παρατηρούμε ότι $Range[W_c(0,t_1)] = Range[L_c(0,t_1)] = Range(\Gamma_c)$ $\forall t_1 \in (0,\infty)$ και επομένως ο ελέγξιμος υπόχωρος:

$$\mathcal{X}_c = Range[L_c(0,t_1)] = Range[W_c(0,t_1)]$$

γιά οποιοδήποτε $t_1 \in (0,\infty)$.

<u>Θεώρημα:</u> $\mathcal{X}_c = Range(\Gamma_c)$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει τό $Range(B)$.

<u>Απόδειξη:</u> $Range(B) \subseteq \mathcal{X}$ είναι προφανές. Έστω $\underline{x} \in \mathcal{X}_c$. Τότε $\exists\, \underline{y} \in \mathbb{R}^{mn}$: $\underline{x} = \Gamma_c \underline{y}$. Έχουμε:

$$A\underline{x} = A\Gamma_c \underline{y} = [AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^nB]\, \underline{y}$$

Οι στήλες του πίνακα A^nB είναι γραμμικοί συνδιασμοί των στηλών του Γ_c (Cayley-Hamilton) και επομένως $A\underline{x} \in \mathcal{X}_c$, δηλ. $A\mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{X}_c$ και ο $\mathcal{X}_c$ είναι A-αναλλοίωτος.

Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{V}$ είναι ένας άλλος A-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει τό $Range(B)$. Τότε οι στήλες του B είναι στόν $\mathcal{V}$. Εφόσον ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος, οι στήλες του AB ανήκουν στόν $\mathcal{V}$, καθώς καί οι στήλες τού A^2B, κλπ. Συμπεραίνουμε ότι οι στήλες του $\Gamma_c \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{V}$ καί επομένως ο $\mathcal{X}_c$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει τό Range (B). $\square$

<u>Λήμμα</u> (Kalman): Έστω $\Sigma(A,B)$ γραμμικό χρονικά ανεξάρτητο σύστημα μέ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καί $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Τότε, αν τό $\Sigma(A,B)$ δέν είναι πλήρως ελέγξιμο, $\exists Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, ώστε:

$$\hat{A} = Q^{-1} A Q = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hline 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right], \quad \hat{B} = Q^{-1} B = \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c \times m}$ όπου $n_c = \mathrm{Rank}(\Gamma_c)$, $\Gamma_c = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B]$ καί όπου $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $n_c = \mathrm{Rank}(\Gamma_c) < n$. Ορίζουμε τόν πίνακα:

$$Q = [Q_1 \,\vdots\, Q_2] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Q_1 = [\underline{v}_1\, \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_{n_c}] \in \mathbb{R}^{n\times n_c}$$

όπου $\{\underline{v}_i\}_{i=1}^{n_c}$ βάση του Range$(\Gamma_c) = \mathcal{X}_c$ καί $\det(Q) \neq 0$. Θά δείξουμε ότι $Q\hat{A} = AQ$, δηλ.

$$[\underbrace{\underline{v}_1\, \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_{n_c}}_{Q_1} \,\vdots\, Q_2] \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hline 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right] = A\,[\underbrace{\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_{n_c}}_{Q_1} \,\vdots\, Q_2]$$

Εφόσον Range$(Q_1) =$ Range$(\Gamma_c) =$ Range$([B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B])$ ο υπόχωρος Range(Q_1) είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ καί επομένως $A\underline{v}_i \in$ Range(Q_1), $i = 1,2,\ldots,n_c$. Επομένως, κάθε ένα από τά n_c διανύσματα του πίνακα AQ_1 γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των $\{\underline{v}_i\}_{i=1}^{n_c}$, δηλ. $AQ_1 = Q_1 \hat{A}_{11}$ γιά κάποιον πίνακα $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c}$.

Επίσης:

$$B = Q \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = [\, \underline{v}_1 \cdots \underline{v}_{n_c} \,\vdots\, Q_2 \,] \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή $Range(B) \subseteq Range(\Gamma_c) = Range(Q_1)$, κάθε στήλη του B γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\{v_i\}_{i=1}^{n_c}$. Ο πίνακας ελεγξιμότητας ~~γράφεται~~ του $\Sigma(\hat{A}, \hat{B})$ γράφεται:

$$\hat{\Gamma}_c = [\, \hat{B} \,\vdots\, \hat{A}\hat{B} \,\vdots\, \hat{A}^2 \hat{B} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \hat{A}^{n-1} \hat{B} \,]$$

$$= [\, Q^{-1} B \,\vdots\, Q^{-1} A B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, Q^{-1} A^{n-1} B \,]$$

$$= Q^{-1} [\, B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1} B \,] = Q^{-1} \Gamma_c$$

Όμως: $$\hat{\Gamma}_c = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \hat{B}_1 & \hat{A}_{11} \hat{B}_1 & \cdots & \hat{A}_{11}^{n-1} \hat{B}_1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right]$$

και επομένως:

$$Rank(\Gamma_c) = n_c = Rank(\hat{\Gamma}_c)$$

$$= Rank([\, \hat{B}_1 \,\vdots\, \hat{A}_{11} \hat{B}_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \hat{A}_{11}^{n-1} \hat{B}_1 \,])$$

$$= Rank([\, \hat{B}_1 \,\vdots\, \hat{A}_{11} \hat{B}_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \hat{A}_{11}^{n_c-1} \hat{B}_1 \,])$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι λόγω του Θεωρήματος Cayley-Hamilton. Επομένως το σύστημα $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. □

<u>Θεώρημα</u>: Έστω σύστημα $\Sigma(A,B)$: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{x}(0) = x_0$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Τό σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

(β) Ο πίνακας Gramian $W_c(0,t_1) > 0$ γιά κάθε $t_1 \in (0,\infty)$.

(γ) $\text{Rank}(\Gamma_c) = n$

(δ) $\text{Rank}(L_c(0,t_1)) = n$ γιά κάθε $t_1 \in (0,\infty)$.

(ε) $\text{Rank}([sI_n - A \,\vdots\, B]) = n$ γιά κάθε $s \in \mathbb{C}$ (ισοδύναμα $\text{Rank}([\lambda_i I - A \,\vdots\, B]) = n$ γιά κάθε $\lambda_i \in \sigma(A)$.

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον γιά κάθε $t_1 \in (0,\infty)$:

$$\mathcal{X}_c = \text{Range}[W_c(0,t_1)] = \text{Range}(L_c(0,t_1)) = \text{Range}(\Gamma_c)$$

όπου $\mathcal{X}_c$ ο ελέγξιμος υπόχωρος, έχουμε (α) ⇔ (β) ⇔ (γ) ⇔ (δ).

(γ) ⇒ (ε): Έστω ότι $\text{Rank}(\Gamma_c) = n$ και ότι υπάρχει $\lambda \in \sigma(A)$ και $\underline{\xi} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{\xi} \neq \underline{0}$, ώστε $\underline{\xi}^*[\lambda I - A \,\vdots\, B] = \underline{0}$ ⇒ $\lambda \underline{\xi}^* = \underline{\xi}^* A$ ⇒ $\underline{\xi}^* A^2 = (\underline{\xi}^* A)A = \lambda \underline{\xi}^* A = \lambda^2 \underline{\xi}^*$ και γενικά: $\underline{\xi}^* A^i = \lambda^i \underline{\xi}^*$, $i = 1,2,\ldots,n-1$. Επομένως:

$$\underline{\xi}^* \Gamma_c = \underline{\xi}^*[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B]$$

$$= [\underline{\xi}^* B \,\vdots\, \underline{\xi}^* AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{\xi}^* A^{n-1} B]$$

$$= [\underline{0} \,\vdots\, \lambda \underline{\xi}^* B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \lambda^{n-1} \underline{\xi}^* B] = \underline{0}$$

(άτοπο, καθώς $\text{Rank}(\Gamma_c) = n$ και $\underline{\xi} \neq \underline{0}$).

(ε) ⇒ (α): Εξ' υποθέσεως ισχύει ότι $\text{Rank}[\lambda I - A \,\vdots\, B] = n$ γιά κάθε $\lambda \in \sigma(A)$. Υποθέτουμε (γιά αντίφαση) ότι $\Sigma(A,B)$ δέν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε από τό προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(Q) \neq 0$:

$$QAQ^{-1} = \hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hline 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right], \quad QB = \hat{B} = \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c \times m}$, $n_c = \mathrm{Rank}(\Gamma_c) = \dim(\mathcal{X}_c)$. Έστω $\lambda \in \sigma(\hat{A}_{22})$ μέ αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα $\underline{\beta}^* \neq \underline{0}$, δηλ. $\underline{\beta}^* \hat{A}_{22} = \lambda \hat{A}_{22}$. Κατασκευάζουμε τό διάνυσμα $[\underline{0}^T \vdots \underline{\beta}^*] = \underline{\alpha}^* \neq \underline{0}$, $\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^n$. Τότε:

$$\underline{\alpha}^* [\lambda I - \hat{A} \vdots \hat{B}] = [\underline{0}^T \vdots \underline{\beta}^*] \left[\begin{array}{cc|c} \lambda I - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & \hat{B}_1 \\ 0 & \lambda I - \hat{A}_{22} & 0 \end{array}\right] = \underline{0}^T$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha}^* [\lambda I - QAQ^{-1} \vdots QB] = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha}^* Q\, [\lambda I - A \vdots B] \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma}^* [\lambda I - A \vdots B] = 0, \quad \underline{\gamma} := Q^T \underline{\alpha} \neq 0 \quad (\text{άτοπο}). \qquad \square$$

Θεώρημα: Αν τό σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο, τότε μπορούμε νά μεταφέρουμε αυθαίρετη κατάσταση $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σέ αυθαίρετη κατάσταση $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ όπου $t_1 \in (0, \infty)$.

Απόδειξη:

Έστω ότι $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο καί $\underline{x}_0, \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Θά δείξουμε ότι υπάρχει $\underline{u} \in C([0,t_1] \times \mathbb{R}^m)$ πού μεταφέρει τήν κατάσταση $\underline{x}(t)$ εντός χρόνου t_1 από τήν αρχική κατάσταση $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ στήν τελική κατάσταση $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$.

Αρκεί νά δείξουμε ότι:

$$\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1 = e^{At_1} \underline{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$$

$$\Leftrightarrow e^{At_1} \underbrace{(\underline{x}_0 - e^{-At_1} \underline{x}_1)}_{\underline{\xi}} + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau = 0$$

Εφόσον τό $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο $\exists\, \underline{u} \in C([0,t_1], \mathbb{R}^m)$ πού μεταφέρει τήν αρχική κατάσταση $\underline{x}(0) = \xi$ στήν κατάσταση $\underline{x}(t_1) = \underline{0}$ σε πεπερασμένο χρόνο t_1. Η ίδια συνάρτηση εισόδου μεταφέρει τήν κατάσταση $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ στην κατάσταση $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$. □

<u>Παράδειγμα:</u>

Νά βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_c$ του συστήματος:

$$\underline{x}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underline{u}(t)$$

$$\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = \mathrm{Rank}([B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B]) = \mathrm{Rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2 < 3$$

Καί επομένως τό σύστημα είναι μή-ελέγξιμο. Ο ελέγξιμος υπόχωρος

$$\mathcal{X}_c = \mathrm{Range}(\Gamma_c) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

<u>Θεώρημα:</u> $\mathcal{X}_c = \mathrm{Range}(\Gamma_c)$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος πού περιέχει $\mathrm{Range}(B)$.

<u>Απόδειξη:</u> Ότι $\mathrm{Range}(\Gamma_c) \subseteq \mathcal{X}_c$ είναι προφανές. Έστω $\underline{x} \in \mathcal{X}_c$. Τότε $\exists\, \underline{y} \in \mathbb{R}^{mn}$ τέτοιο ώστε $\underline{x} = \Gamma_c \underline{y}$. Έχουμε:

$$A\underline{x} = A\Gamma_c \underline{y} = A[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B]\,\underline{y}$$

$$= [AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^nB]\,\underline{y}$$