Οι στήλες του πίνακα $A^n B$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του πίνακα Γ_c και επομένως $A\underline{x} \in Range(\Gamma_c) = \mathcal{X}_c$, δηλ. $A\mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{X}_c$ και ο $\mathcal{X}_c$ είναι A-αναλλοίωτος.

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{V}$ είναι επίσης A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το $Range(B)$. Τότε οι στήλες του B είναι στον $\mathcal{V}$. Εφόσον ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος οι στήλες του AB ανήκουν στον $\mathcal{V}$ και για τον ίδιο λόγο και οι στήλες του A^2B, κλπ. Συμπεραίνουμε ότι οι στήλες του Γ_c ανήκουν στον $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{V}$. □

<u>Ελεγξιμότητα διαγωνίων μορφών.</u>

Η ελεγξιμότητα του $\Sigma(A,B): \underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$, παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς ομοιομορφίας του A (μετασχηματισμός ισοδυναμίας του συστήματος): Αν $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, τότε $\Sigma(A,B) \overset{Q}{\sim} \Sigma(Q^{-1}AQ, Q^{-1}B)$. Οι πίνακες ελεγξιμότητας που αντιστοιχούν στα δύο ισοδύναμα συστήματα είναι:

$$\Gamma_c = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B] \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma}_c = [Q^{-1}B \,\vdots\, Q^{-1}AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, Q^{-1}A^{n-1}B]$$

δηλ. $\hat{\Gamma}_c = Q^{-1}\Gamma_c \Rightarrow Rank(\Gamma_c) = Rank(\hat{\Gamma}_c)$.

Έστω $\Sigma(A,B)$ όπου A είναι πίνακας απλής δομής. Αν $\{\lambda_i\}$ οι ιδιοτιμές του A και $\{\underline{u}_i\}$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε

$$A = P\underbrace{diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}}_{\Lambda}P^{-1} \quad \text{όπου } P = [\underline{u}_1 \underline{u}_2 \ldots \underline{u}_n]$$

μη ιδιάζων, δηλ. $\Lambda = P^{-1}AP$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό:

$$\underline{x} = P\tilde{\underline{x}} \Rightarrow \underline{x}' = P\tilde{\underline{x}}' = A\underline{x} + B\underline{u}$$

$$\Rightarrow P\tilde{\underline{x}}' = AP\tilde{\underline{x}} + B\underline{u} \Rightarrow \tilde{\underline{x}}' = P^{-1}AP\tilde{\underline{x}} + P^{-1}B\underline{u}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}' = \underbrace{\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}}_{\Lambda} \tilde{x} + P^{-1} B \underline{u}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_i' = \lambda_i \tilde{x}_i + \tilde{b}_i^T \underline{u} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

όπου $\tilde{b}_i$ η i-γραμμή του πίνακα $P^{-1}B$. Επομένως το σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\text{Rank}([\lambda_i I - A \,\vdots\, B]) = n$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$, η ισοδύναμα αν ο πίνακας:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \lambda - \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_1^T \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & \ddots & 0 & \tilde{b}_2^T \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - \lambda_n & \tilde{b}_n^T \end{array}\right]$$

έχει Rank $= n$ γιά $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \dots, \lambda = \lambda_n$. Επομένως $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\tilde{b}_i \neq 0$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Στη γενική περίπτωση ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι μή-απλής δομής. Έστω $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1} (\lambda - \lambda_2)^{\tau_2} \cdots (\lambda - \lambda_e)^{\tau_e}$ όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ γιά $i \neq j$. Τότε $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μή ιδιάζων τέτοιος ώστε $P^{-1} A P = J$, όπου $J = \text{diag}\{J_1, \dots J_e\}$ με $J_i = \text{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{id_i}\}$, $J_{ij} \in \mathbb{C}^{q_{ij} \times q_{ij}}$. Ο J_i αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_i \in \sigma(A)$ και έχουμε $d_i = \dim(\mathcal{N}(\lambda_i I - A))$, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i, $i \in \{1, 2, \dots, e\}$ και $\tau_i := \max\{q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{id_i}\}$. Έστω ότι:

$$P^{-1} B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_e \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m}, \quad B_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{id_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\tau_i \times m}$$

και: $$B_{ij} = \begin{bmatrix} b_{1ij} \\ \vdots \\ b_{q_{ij} ij} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q_{ij} \times m}$$

Θέτουμε: $\underline{b}^T_{q_{ij}ij} = \underline{b}^T_{\varepsilon ij}$ (η έσχατη γραμμή του B_{ij}) και ορίζουμε ως B_i^{ε} τον υποπίνακα του B_i διαστάσεων $d_i \times m$ αποτελούμενο από την τελευταία γραμμή έκαστου B_{ij}, δηλ.

$$B_i^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \underline{b}^T_{\varepsilon i1} \\ \underline{b}^T_{\varepsilon i2} \\ \vdots \\ \underline{b}^T_{\varepsilon i d_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{d_i \times m}$$

Τότε έχουμε το παρακάτω Θεώρημα:

<u>Θεώρημα</u>: Το σύστημα $\Sigma(A,B)$ με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\forall i = 1,2,\dots,\rho$ οι γραμμές κάθε πίνακα $B_i^{\varepsilon} \in \mathbb{C}^{d_i \times m}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες (επί του $\mathbb{C}$).

<u>Απόδειξη</u>: Το $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$: $\text{Rank}([\lambda I - A \,\vdots\, B]) = n$. Εξετάζουμε το κατωθι παράδειγμα που αντιστοιχεί σε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ με $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ από το οποίο η γενική περίπτωση προκύπτει εύκολα. Έστω ότι ο πίνακας $[\lambda I - A \,\vdots\, B]$ είναι:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc|cc|c}
\lambda-\lambda_1 & -1 & & & & & & \underline{b}^T_{111} \\
0 & \lambda-\lambda_1 & & 0 & & & 0 & \underline{b}^T_{\varepsilon 11} \\
\hline
 & & \lambda-\lambda_1 & -1 & 0 & & & \underline{b}^T_{112} \\
 & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & -1 & & 0 & \underline{b}^T_{212} \\
 & & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & & & \underline{b}^T_{\varepsilon 12} \\
\hline
 & & & & & \lambda-\lambda_2 & -1 & \underline{b}^T_{121} \\
 & 0 & & 0 & & 0 & \lambda-\lambda_2 & \underline{b}^T_{\varepsilon 21}
\end{array}\right]$$

Οι μόνες πιθανές τιμές για τις οποίες ο πίνακας χάνει Rank είναι $\lambda = \lambda_1$ ή $\lambda = \lambda_2$. Θέτοντας $\lambda = \lambda_1$ και μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών / στηλών (που αφήνουν τό Rank αναλλοίωτο)

$$[\lambda_1 I - A \vdots B] \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|cc|c} 0 & -1 & & 0 & & & 0 & \underline{0}^T \\ 0 & 0 & & & & & & \underline{b}^T_{\varepsilon 11} \\ \hline & & 0 & -1 & 0 & & & \underline{0}^T \\ 0 & & 0 & 0 & -1 & & 0 & \underline{0}^T \\ & & 0 & 0 & 0 & & & \underline{b}^T_{\varepsilon 12} \\ \hline & & & & & \lambda_1-\lambda_2 & 0 & \underline{0}^T \\ 0 & & & 0 & & 0 & \lambda_1-\lambda_2 & \underline{0}^T \end{array}\right]$$

Αν οι γραμμές $\underline{b}^T_{\varepsilon 11}$ καί $\underline{b}^T_{\varepsilon 12}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες ο πίνακας χάνει Rank (καί μόνον τότε αν $\lambda = \lambda_1$). Ακολουθώντας τόν ίδιο συλλογισμό γιά κάθε ιδιοτιμή αποδεικνύεται τό Θεώρημα. □

Παρατήρηση: Αν $m=1$ (μία είσοδος), τότε αναγκαία συνθήκη ώστε τό $\Sigma(A,B)$ νά είναι πλήρως ελέγξιμο είναι $d_i = 1$, $i=1,2,\dots,\rho$

Παρατηρησιμότητα:

Θεωρούμε τό σύστημα $\Sigma(A,C)$: $\underline{x}' = A\underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} = C\underline{x}$, με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καί $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Το σύστημα αντιστοιχεί στό γραμμικό, χρονικά ανεξάρτητο σύστημα $\Sigma(A,B,C,D)$ μέ μηδενική είσοδο.

Ορισμός: Έστω τό σύστημα $\Sigma(A,C)$. Μία κατάσταση $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη αν η κατάσταση $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ καθορίζεται μονοσήμαντα από τήν έξοδο του συστήματος $\underline{y}(t)$, $t \in [0, t_1]$ γιά κάποιο $t_1 \in (0,\infty)$.

Εφόσον $\underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x}_0$ η κατάσταση $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη αν καθορίζεται μονοσήμαντα από τήν έξοδο $\underline{y}(t)$, $0 \le t \le t_1$ γιά κάποιο $t_1 \in (0,\infty)$. Γιά παράδειγμα αν $\mathrm{Rank}(C) = n$, τότε ο πίνακας C έχει αριστερό αντίστροφο C^L ($C^L C = I_n$) και

$$\underline{y}(t) = C e^{At} \underline{x}_0 \Rightarrow \underline{x}_0 = e^{-At} C^L \underline{y}(t)$$

δηλ. η κατάσταση $\underline{x}_0$ καθορίζεται μονοσήμαντα από στιγμιαία μέτρηση της εξόδου $\underline{y}(t)$, $t \in (0, t_1)$. Συνήθως έχουμε $p<n$ και επομένως $Rank(C) \leq p < n$.

<u>Ορισμός</u>: Το σύστημα $\Sigma(A,C)$ λέγεται πλήρως παρατηρήσιμο αν κάθε $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη, δηλ. αν καθορίζεται μονοσήμαντα από την έξοδο $\underline{y}(t)$, $t \in [0, t_1]$, όπου $t_1 > 0$.

Έχουμε: $\underline{y}(\tau) = C e^{A\tau} \underline{x}_0$, $\tau \in [0, t_1]$. Επομένως:

$$e^{A^T \tau} C^T \underline{y}(\tau) = e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} \underline{x}_0$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} e^{A^T \tau} C^T \underline{y}(\tau) d\tau = \left(\int_0^{t_1} e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \right) \underline{x}_0$$

$$:= W_o(0, t_1) \underline{x}_0$$

όπου ορίσαμε ως $W_o(0,t_1)$ τον πίνακα Gramian παρατηρησιμότητας. Ισχύει ότι $W_o(0,t_1) = W_o^T(0,t_1) \geq 0$ γιά κάθε $t_1 \geq 0$. Αν επιπλέον (γιά $t_1 > 0$) $W_o(0,t_1) > 0$ (θετικά ορισμένος), τότε

$$\underline{x}_0 = W_o^{-1}(0, t_1) \int_0^{t_1} e^{A^T \tau} C^T \underline{y}(\tau) d\tau$$

και η κατάσταση $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη. Εφόσον η ιδιότητα αυτή ισχύει γιά κάθε ζεύγος $(\underline{x}_0, y_{[0,t_1]})$ όταν $W_o(0,t_1) > 0$, τότε το σύστημα $\Sigma(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Ισχύει το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα:

Έστω $\Sigma(A,C)$: $\underline{x}' = A\underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y}(t) = C\,\underline{x}(t)$, $t \geq 0$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$. Τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Το σύστημα $\Sigma(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

(2) Ο πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας $W_o(0,t_1) > 0$ γιά κάθε $t_1 > 0$.

(3) Ο πίνακας παρατηρησιμότητας:

$$\Gamma_o := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn\times n}$$

έχει $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = n$. (Ισοδύναμα $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{N}_r(CA^{i-1}) = \{\underline{0}\}$)

(4) Ο πίνακας: $[\lambda I_n - A^T \,\vdots\, C^T]$ έχει Rank n γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ (ισοδύναμα γιά κάθε $\lambda = \lambda_i \in \sigma(A)$).

(5) Τό σύστημα $\Sigma(A^T, C^T)$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη:

Πρώτα αποδεικνύεται η ισοδυναμία (1) ⇔ (3). Η ισοδυναμία με τίς υπόλοιπες σχέσεις βασίζεται στήν δυϊκότητα που μάς δίνει η (5).

(3) ⇒ (1) : Από την σχέση $\underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x}_0$, $t \in [0,t_1]$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(0) \\ \underline{y}'(0) \\ \vdots \\ \underline{y}^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}_0 := \Gamma_o \underline{x}_0$$

Εφόσον $\text{Rank}(\Gamma_o) = n$, η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση και επομένως η κατάσταση $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Εφόσον $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο, $\Sigma(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

(1) $\Rightarrow$ (3): Έστω ότι $\Sigma(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο αλλά $\text{Rank}(\Gamma_o) < n$. Τότε $\exists \underline{x_0} \neq \underline{0}$: $\Gamma_o \underline{x_0} = \underline{0} \Rightarrow CA^i \underline{x_0} = \underline{0}$ γιά κάθε $i \in \mathbb{N}_0$ (Cayley-Hamilton). Επομένως $\underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x_0} = 0$ γιά κάθε $t \geq 0$. Συμπεραίνουμε ότι τό σύστημα $\Sigma(A,C)$ δέν είναι πλήρως παρατηρήσιμο (π.χ. η αρχική κατάσταση $\underline{x}(0) = \underline{x_0} \neq 0$ δέν μπορεί νά διακριθεί από τήν κατάσταση $\underline{x_0} = \underline{0}$ μέ χρήση της εξόδου $\underline{y}(t) = \underline{0}$, $0 \leq t \leq t_1$).

(1) $\Leftrightarrow$ (5): Από τήν ισοδυναμία (1) $\Leftrightarrow$ (3) έχουμε ότι $\Sigma(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αν καί μόνο αν $\text{Rank}(\Gamma_o) = n \Leftrightarrow$ $\text{Rank}(\Gamma_o^T) = n \Leftrightarrow \Sigma(A^T, C^T)$ πλήρως ελέγξιμο. Η ισοδυναμία μέ τίς άλλες προτάσεις προκύπτει τώρα από τό Θεώρημα Ελεγξιμότητας.

□

Μή-παρατηρήσιμος υπόχωρος

Τό σύνολο των μή-παρατηρήσιμων καταστάσεων $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ ορίζει τόν μή-παρατηρήσιμο υπόχωρο $\mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{N}_r\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^n$$

Λήμμα: Το σύστημα $\Sigma(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν καί μόνο άν $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \{\underline{0}\}$.

Απόδειξη:

Έστω ότι $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \{\underline{0}\}$. Τότε $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = n$ και από τό Θεώρημα Παρατηρησιμότητας τό $\Sigma(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

Αντίστροφα, έστω ότι $\Sigma(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο καί $\mathcal{X}_{\bar{o}} \neq \{\underline{0}\}$. Τότε, αφού $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, $\exists\ \underline{x}_0 \neq \underline{0}$: $CA^i \underline{x}_0 = \underline{0}$ $\forall i = 0,1,2,\ldots,n-1$ $\Rightarrow$ $CA^i \underline{x}_0 = \underline{0}$ $\forall i \in \mathbb{N}_0$ (Cayley-Hamilton) $\Rightarrow$ $Ce^{At}\underline{x}_0 = 0$ $\forall t \geq 0$. Διαλέγουμε αυθαίρετο $\tilde{\underline{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε η έξοδος του συστήματος (μέ μηδενική είσοδο) γιά αρχική κατάσταση $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 + \tilde{\underline{x}}_0$ ταυτίζεται μέ τήν έξοδο γιά $\underline{x}(0) = \tilde{\underline{x}}_0$ και επομένως $\Sigma(A,C)$ δέν είναι πλήρως παρατηρήσιμο (αντίφαση). $\square$

Θεώρημα: Η ιδιότητα πλήρους παρατηρησιμότητας διατηρείται σε ισοδύναμα συστήματα.

Απόδειξη:

Έστω $\Sigma(A,C) \sim \Sigma(Q^{-1}AQ, CQ)$. Τότε:

$$CQ(Q^{-1}AQ)^i = CQQ^{-1}A^iQ = CA^iQ \qquad (i \geq 0)$$

και επομένως: $\hat{\Gamma}_o = \Gamma_o Q \Rightarrow \mathrm{Rank}(\hat{\Gamma}_o) = \mathrm{Rank}(\Gamma_o)$. $\square$

Θεώρημα: Ο μή παρατηρήσιμος υπόχωρος του $\Sigma(A,C)$ είναι ο μεγαλύτερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχεται στό $\mathcal{N}_r(C)$.

Απόδειξη:

$\underline{x} \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o) \Rightarrow CA^k \underline{x} = \underline{0}$ $\forall k \geq 0$. Επομένως ($k=0$) $\underline{x} \in \mathcal{N}_r(C)$. Επιπλέον, $A^n \underline{x}$ είναι γραμμικός συνδιασμός τών $\{\underline{x}, A\underline{x}, \ldots, A^{n-1}\underline{x}\}$ καί επομένως $\Gamma_o A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow A\underline{x} \in \mathcal{N}_r(\Gamma_o) = \mathcal{X}_{\bar{o}}$. Επομένως: $A\mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq \mathcal{X}_{\bar{o}} \subseteq \mathcal{N}_r(C)$. Έστω ότι $\mathcal{V}$ είναι επίσης A-αναλλοίωτος υπόχωρος μέ $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}_r(C)$. Τότε $\underline{x} \in \mathcal{V} \Rightarrow C\underline{x} = \underline{0}$ και επομένως

$CA\underline{x} = CA^2\underline{x} = \cdots = CA^{n-1}\underline{x} = \underline{0}$. Επομένως $\underline{x} \in N_r(\Gamma_0) = \mathcal{X}_{\bar{o}}$ καί άρα $\mathcal{V} \leq \mathcal{X}_{\bar{o}}$. □

<u>Λήμμα</u> (Kalman): Υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας

$$\Sigma(A,C) \sim \Sigma(Q^{-1}AQ, CQ), \quad \det(Q) \neq 0$$

όπου:

$$Q^{-1}AQ = \hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hline \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array}\right], \quad \hat{C} = CQ = [\hat{C}_1 \,\vdots\, 0]$$

καί $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$, $\hat{C}_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_0}$, $n_0 = Rank(\Gamma_0) = Rank([C^T \cdots (A^T)^{n-1}C^T])$ καί $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{C}_1)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

<u>Απόδειξη:</u> Μέ χρήση δυϊκότητας. □

Έστω σύστημα $\Sigma(A,B,C,D)$: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$ μέ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ καί $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Έστω ότι $\dim(\mathcal{X}_c) = Rank(\Gamma_c) < n$ καί $\dim(\mathcal{X}_{\bar{o}}) = n - Rank(\Gamma_0) > 0$. Τότε τό σύστημα δέν είναι ούτε πλήρως ελέγξιμο ούτε πλήρως παρατηρήσιμο. Στήν περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε τόν χώρο κατάστασης:

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n = \mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$$

όπου:

$$\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c \quad \text{(ελέγξιμος υπόχωρος)}$$

$$\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{X}_{\bar{o}} \quad \text{(μή-παρατηρήσιμος υπόχωρος)}$$

$$\mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{X}_{\bar{c}} \quad (\mathcal{X}_c \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}} = \mathbb{R}^n = \mathcal{X})$$

$$\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} = \mathcal{X}_o \quad (\mathcal{X}_{\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_o = \mathbb{R}^n = \mathcal{X}).$$

Παρατηρούμε ότι οι υπόχωροι $\mathcal{X}_c$ καί $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένοι, ενώ οί $\mathcal{X}_{\bar{c}}$ καί $\mathcal{X}_o$ είναι αυθαίρετα συμπληρώματα των $\mathcal{X}_c$ καί $\mathcal{X}_{\bar{o}}$, αντίστοιχα. Θά δείξουμε τήν ανάλυση του $\mathcal{X}$ σε αυτό τό ευθύ άθροισμα κατασκευάζοντας ενα αλγεβρικά ισοδύναμο σύστημα $\Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D) \sim \Sigma(A,B,C,D)$ στό οποίο τό διάνυσμα κατάστασης $\hat{\underline{x}}$ αναλύεται ως:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{x}}_{co} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\underline{x}}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{\underline{x}}_{\bar{c}o} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{\underline{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

όπου $[\hat{\underline{x}}_{co}^T : 0 : 0 : 0]^T \in \mathcal{X}_{co}$, κλπ. Επίσης:

(i) $\hat{\underline{x}}_{co}$ είναι τό διάνυσμα κατάστασης ενός πλήρως ελέγξιμου καί πλήρως παρατηρήσιμου υπο-συστήματος Σ_{co}.

(ii) $\hat{\underline{x}}_{c\bar{o}}$ είναι τό διάνυσμα κατάστασης ενός πλήρως ελέγξιμου καί μή-~~πλήρως~~ παρατηρήσιμου συστήματος $\Sigma_{c\bar{o}}$.

(iii) $\hat{\underline{x}}_{\bar{c}o}$ είναι τό διάνυσμα ενός μή ~~πλήρως~~ ελέγξιμου καί πλήρως παρατηρήσιμου υποσυστήματος $\Sigma_{\bar{c}o}$.

(iv) $\hat{\underline{x}}_{\bar{c}\bar{o}}$ είναι τό διάνυσμα κατάστασης ενός μή ελέγξιμου καί μή παρατηρήσιμου υποσυστήματος $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$.

<u>Θεώρημα</u> (Κανονική μορφή Kalman)

Εστω σύστημα $\Sigma(A,B,C,D)$: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$, μή-πλήρως ελέγξιμο καί μή-πλήρως παρατηρήσιμο. Τότε υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας $\Sigma(A,B,C,D) \overset{a}{\sim} \Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$, τέτοιος ώστε:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [\hat{C}_1 : 0 : \hat{C}_3 : 0]$$

και τέτοιο ώστε νά ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες:

(i) Τό ζεύγος

$$\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \right)$$

είναι πλήρως ελέγξιμο.

(ii) Το ζεύγος:

$$\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{13} \\ 0 & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \left[\hat{C}_1 \vdots \hat{C}_3 \right] \right)$$

είναι πλήρως παρατηρήσιμο

(iii) Τό σύστημα $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο καί πλήρως παρατηρήσιμο.

<u>Απόδειξη:</u>

Η απόδειξη βασίζεται στήν κατασκευή βάσεων γιά τούς κάτωθι υπόχωρους:

(i) Αρχικά ορίζουμε $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c) \cap \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$ (μονοσήμαντα ορισμένος)

(ii) Στη συνέχεια, επιλέγουμε $\mathcal{X}_{co} : \mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{co} = \mathcal{R}(\Gamma_c)$ (ο $\mathcal{X}_{co}$ δέν είναι μονοσήμαντα ορισμένος)

(iii) Στη συνέχεια, επιλέγουμε $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$: $\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$ (ο $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ δέν είναι μονοσήμαντα ορισμένος)

(iv) Τέλος επιλέγουμε $\mathcal{X}_{\bar{c}o} : \mathcal{R}(\Gamma_c) \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} = \mathbb{R}^n$ (ο $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$ δέν είναι μονοσήμαντα ορισμένος).

Ορίζουμε πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\det(Q) \neq 0)$ ως εξής :

$$Q = [\, Q_1 \,\vdots\, Q_2 \,\vdots\, Q_3 \,\vdots\, Q_4 \,]$$

$$= [\, \underbrace{\underbrace{\underline{q}_1 \cdots \underline{q}_j}_{\mathcal{X}_{co}} \,\vdots\, \underbrace{\overbrace{\underline{q}_{j+1} \cdots \underline{q}_k}^{\mathcal{X}_{\bar{o}}}}_{\mathcal{X}_{c\bar{o}}}}_{\mathcal{X}_c} \,\vdots\, \underbrace{\underline{q}_{k+1} \cdots \underline{q}_e}_{\mathcal{X}_{\bar{c}o}} \,\vdots\, \underbrace{\overbrace{\underline{q}_{e+1} \cdots \underline{q}_n}^{\mathcal{X}_{\bar{o}}}}_{\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}} \,]$$

όπου :

$\{\underline{q}_{j+1}, \ldots, \underline{q}_k\}$ βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c) \cap \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$

$\{\underline{q}_1, \ldots, \underline{q}_j\}$ βάση του $\mathcal{X}_{co}$ ώστε $\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{co} = \mathcal{R}(\Gamma_c)$

$\{\underline{q}_{e+1}, \ldots, \underline{q}_n\}$ βάση του $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$: $\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$

$\{\underline{q}_{k+1}, \ldots, \underline{q}_e\}$ βάση του $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$: $\mathcal{R}(\Gamma_c) \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} = \mathbb{R}^n$

Ορίζουμε επίσης :

$$T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ \hdashline T_2 \\ \hdashline T_3 \\ \hdashline T_4 \end{bmatrix}$$

αντίστοιχα με τον διαμερισμό του πίνακα $Q = [Q_1 \vdots Q_2 \vdots Q_3 \vdots Q_4]$

Έχουμε:

$$\begin{array}{c} \\ j \\ k-j \\ e-k \\ n-e \end{array} \begin{bmatrix} T_1 \\ \hdashline T_2 \\ \hdashline T_3 \\ \hdashline T_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j & k-j & e-k & n-e \end{array} \\ \left[\, Q_1 \,\vdots\, Q_2 \,\vdots\, Q_3 \,\vdots\, Q_4 \,\right] \end{array} = \begin{bmatrix} I_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{k-j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{e-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-e} \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε επίσης : $\hat{A} = Q^{-1} A Q = TAQ$, $\hat{B} = Q^{-1} B = TB$

$\hat{C} = CQ$

καί $\hat{A}_{ij} = T_i A Q_j$, $\hat{B}_i = T_i B$, $\hat{C}_j = C Q_j$ ($i=1,2,3,4$ καί $j=1,2,3,4$):

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \\ \hat{B}_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \left[\hat{C}_1 \,\vdots\, \hat{C}_2 \,\vdots\, \hat{C}_3 \,\vdots\, \hat{C}_4 \right]$$

Έχουμε:

(α) $$\begin{bmatrix} \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} A \left[Q_1 \,\vdots\, Q_2 \right].$$

Έκ' κατασκευής: $\Gamma_c = \mathcal{R}([Q_1 \vdots Q_2])$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος $\Rightarrow A[Q_1 \vdots Q_2] = [Q_1 \vdots Q_2] X$ γιά κάποιον πίνακα X. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} [Q_1 \vdots Q_2] X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(β) $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}([Q_1 \vdots Q_2]) \Rightarrow B = [Q_1 \vdots Q_2] Y$ γιά κάποιο πίνακα Y. Επομένως

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} [Q_1 \vdots Q_2] Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(γ) $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{R}([Q_2 \vdots Q_4])$ είναι A-αναλλοίωτος. Συνεπώς

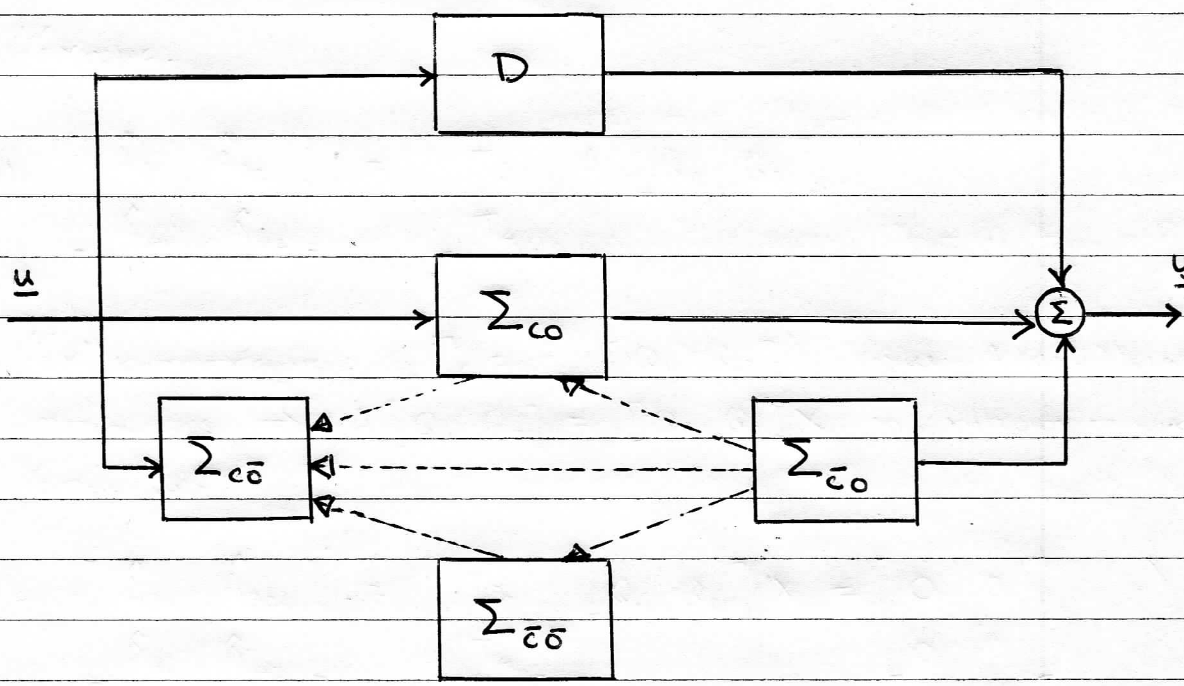
$$[\hat{A}_{12} \vdots \hat{A}_{14}] = T_1 A [Q_2 \vdots Q_4] = T_1 [Q_2 \vdots Q_4] Z = [0 \vdots 0]$$

(δ) $$\hat{A}_{34} = T_3 A Q_4 = T_3 [Q_2 \vdots Q_4] W = [0]$$

(ε) $[\hat{C}_2 \vdots \hat{C}_4] = C\,[Q_2 \vdots Q_4]$

Όμως $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{R}([Q_2 \vdots Q_4]) \subseteq \mathcal{N}_r(C)$

$\Rightarrow [\hat{C}_2 \vdots \hat{C}_4] = C\,[Q_2 \vdots Q_4] = [0 \vdots 0]$. □



Παρατηρήσεις:

(i) Εκτός από τον "δρόμο" μέσω της D ο μόνος "δρόμος" από την είσοδο $\underline{u}$ στην έξοδο $\underline{y}$ είναι μέσω της Σ_{co}

(ii) Η είσοδος u επηρεάζει μόνο τα υποσυστήματα Σ_{co} και $\Sigma_{c\bar{o}}$.

(iii) Η έξοδος $\underline{y}$ επηρεάζεται μόνο από τα υποσυστήματα Σ_{co} και $\Sigma_{\bar{c}o}$

(iv) Το μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο σύστημα $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$ είναι αποκομμένο τόσο από την είσοδο όσο και την έξοδο.