Ανάδραση καταστάσεων χώρου (State-feedback)

Διαμόρφωση εισόδων μέσω μεταβλητών κατάστασης ώστε να μεταβάλλουμε τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος (ευστάθεια, ταχύτητα απόκρισης, υπερακοντισμός απόκρισης, απόσβεση ταλαντώσεων).

Έστω σύστημα μίας εισόδου:

$$\Sigma(A,\underline{b}) : \underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}u \ , \ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ , \ \underline{b} \in \mathbb{R}^{n}$$

Θέτουμε $u = \underline{f}^T \underline{x}$ (ανάδραση καταστάσεων, $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$). Υποθέτουμε ότι $\Sigma(A,\underline{b})$ είναι πλήρως ελέγξιμο, δηλ.

$$\Gamma_c = [\,\underline{b} \,\vdots\, A\underline{b} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}\underline{b}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n} \ , \ \det(\Gamma_c) \neq 0$$

Έστω ότι $\varphi(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, δηλ.

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Ορίζουμε: τα διανύσματα $\underline{q}_n, \underline{q}_{n-1}, \ldots, \underline{q}_1$ ως εξής:

(i) $\underline{q}_n = \underline{b}$

(ii) $\underline{q}_{n-1} = A\underline{q}_n + a_{n-1}\underline{b} = A\underline{b} + a_{n-1}\underline{b}$

(iii) $\underline{q}_{n-2} = A\underline{q}_{n-1} + a_{n-2}\underline{b} = A^2\underline{b} + a_{n-1}A\underline{b} + a_{n-2}\underline{b}$

$\vdots$

(n) $\underline{q}_1 = A\underline{q}_2 + a_1\underline{b} = A^{n-1}\underline{b} + a_{n-1}A^{n-2}\underline{b} + \cdots + a_1\underline{b}$

Λήμμα: (i) $A\underline{q}_1 + a_0\underline{b} = 0$. (ii) Ο πίνακας $Q = [\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_n]$ είναι μη ιδιάζων αν και μόνο αν $\Sigma(A,\underline{b})$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη:

(i) $$A\underline{q}_1 + a_0\underline{b} = A\left(A^{n-1}\underline{b} + a_{n-1}A^{n-2}\underline{b} + \cdots + a_1\underline{b}\right) + a_0\underline{b}$$

$$= A^n\underline{b} + a_{n-1}A^{n-1}\underline{b} + \cdots + a_1 A\underline{b} + a_0\underline{b}$$

$$= \left(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I\right)\underline{b}$$

$$= \varphi(A)\,\underline{b} = 0 \qquad (\text{Cayley-Hamilton})$$

(ii) Οι σχέσεις που ορίζουν τά $\underline{q}_i$ γράφονται:

$$\underbrace{\left[\,\underline{q}_1 \,\vdots\, \underline{q}_2 \,\vdots\, \cdots \,\underline{q}_n\,\right]}_{Q} = \underbrace{\left[\,\underline{b} \,\vdots\, A\underline{b} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-2}\underline{b} \,\vdots\, A^{n-1}\underline{b}\,\right]}_{\Gamma_c} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \iddots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_{n-2} & \iddots & & \iddots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{H_a}$$

Έχουμε: $$Q = \Gamma_c H_a \Rightarrow \det(Q) = \det(\Gamma_c)\cdot\det(H_a)$$

$$\Rightarrow \det(Q) = (-1)^{n+1}\det(\Gamma_c)$$

Επομένως $\det(Q) \neq 0 \Leftrightarrow \Sigma(A,\underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο. □

Θεώρημα:

Τό σύστημα $\Sigma(A,\underline{b})$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν καί μόνο αν υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας $\Sigma(A,\underline{b}) \overset{T^{-1}}{\sim} \Sigma(TAT^{-1}, T\underline{b})$, $\tilde{\underline{x}} = T\underline{x}$, όπου $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(T) \neq 0$, ώστε οι πίνακες $\tilde{A} = TAT^{-1}$ καί $\tilde{B} = TB$ νά ικανοποιούν τίς σχέσεις:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Σημείωση:</u> Τό σύστημα $\Sigma(A, \underline{b})$ είναι σέ μορφή "companion" ή "κανονική μορφή ελεγξιμότητας" (controllable canonical form).

<u>Απόδειξη:</u>

($\Rightarrow$): Έστω ότι $\Sigma(A, \underline{b})$ είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε $\det(\Gamma_c) \neq 0$. Ορίζουμε τόν πίνακα Q όπως στό προηγούμενο Λήμμα καί επιλέγουμε μετασχηματισμό ισοδυναμίας $T = Q^{-1}$. Θά επαληθεύσουμε τίς σχέσεις: $\tilde{A} = Q^{-1} A Q$ καί $\tilde{\underline{b}} = Q^{-1} \underline{b}$. Έχουμε

$$\underline{q}_n = \underline{b} \Rightarrow \underbrace{[\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_{n-1}\ \underline{q}_n]}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{b}}} = \underline{b}$$

καί από τίς σχέσεις:

$$A\underline{q}_n = \underline{q}_{n-1} - a_{n-1}\underline{b} = \underline{q}_{n-1} - a_{n-1}\underline{q}_n$$

$$A\underline{q}_{n-1} = \underline{q}_{n-2} - a_{n-2}\underline{b} = \underline{q}_{n-2} - a_{n-2}\underline{q}_n$$

$$\vdots$$

$$A\underline{q}_2 = \underline{q}_1 - a_1\underline{b} = \underline{q}_1 - a_1\underline{q}_n$$

Σε αυτές προσθέτουμε τήν σχέση:

$$A\underline{q}_1 = -a_0\underline{b} = -a_0\underline{q}_n \qquad (\text{Λήμμα μέρος (ii)})$$

Οι σχέσεις γράφονται ως:

$$A\underbrace{[\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_{n-1}\ \underline{q}_n]}_{Q} = \underbrace{[\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_{n-1}\ \underline{q}_n]}_{Q}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}}$$

δηλ. $AQ = Q\tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} = Q^{-1}AQ$, $\tilde{\underline{b}} = Q^{-1}\underline{b}$

($\Leftarrow$): Έστω ότι υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας T^{-1} ώστε $\Sigma(A,B) \overset{T^{-1}}{\sim} \Sigma(\tilde{A},\tilde{\underline{b}})$ όπου $\Sigma(\tilde{A},\tilde{\underline{b}})$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας. Ο πίνακας ελεγξιμότητας του $\Sigma(\tilde{A},\tilde{\underline{b}})$ είναι:

$$\tilde{\Gamma}_c = [\,\tilde{\underline{b}} \,\vdots\, \tilde{A}\tilde{\underline{b}} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \tilde{A}^{n-1}\tilde{\underline{b}}\,]$$

όπου: $\tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\tilde{A}\tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}$, $\tilde{A}^2\tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \\ * \end{bmatrix}$, κλπ

δηλαδή:

$$\tilde{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \iddots & * \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 1 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\tilde{\Gamma}_c) = (-1)^{n+1} \neq 0$$

Επομένως $\Sigma(\tilde{A},\tilde{\underline{b}})$ πλήρως ελέγξιμο $\Rightarrow \Sigma(A,\underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο αφού ιδιότητες ελεγξιμότητας παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμό ισοδυναμίας. □

Τό σύστημα ελέγχεται μέ ανάδραση καταστάσεως χώρου $\underline{u} = \underline{f}^T \underline{x}$
Η ανάδραση μετατρέπει τό σύστημα "ανοικτού βρόγχου" σέ σύστημα "κλειστού βρόγχου":

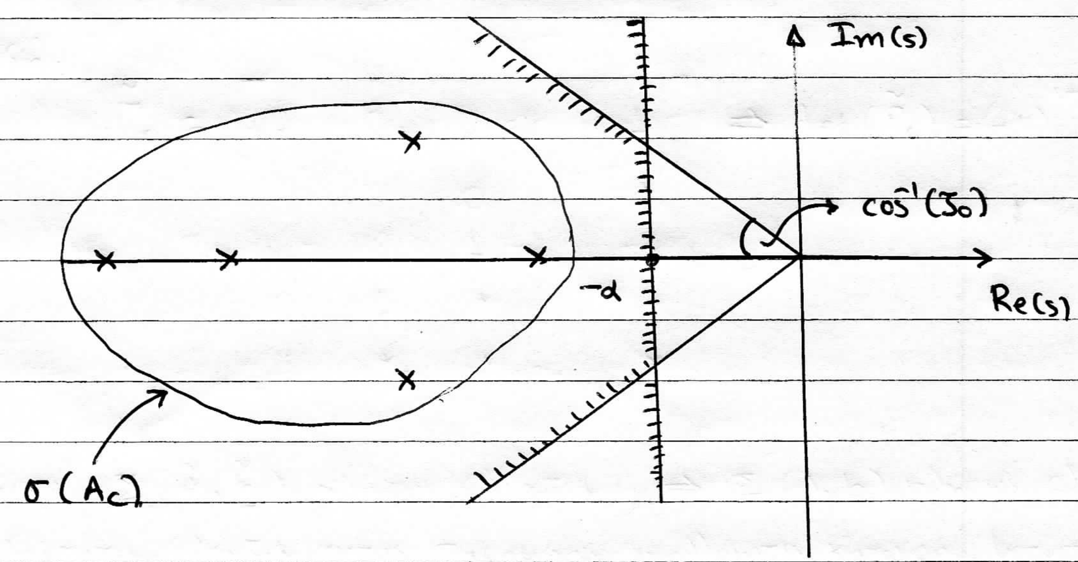
$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}\,u = A\underline{x} + \underline{b}(\underline{f}^T\underline{x}) = \underbrace{(A + \underline{b}\underline{f}^T)}_{A_c}\underline{x}$$

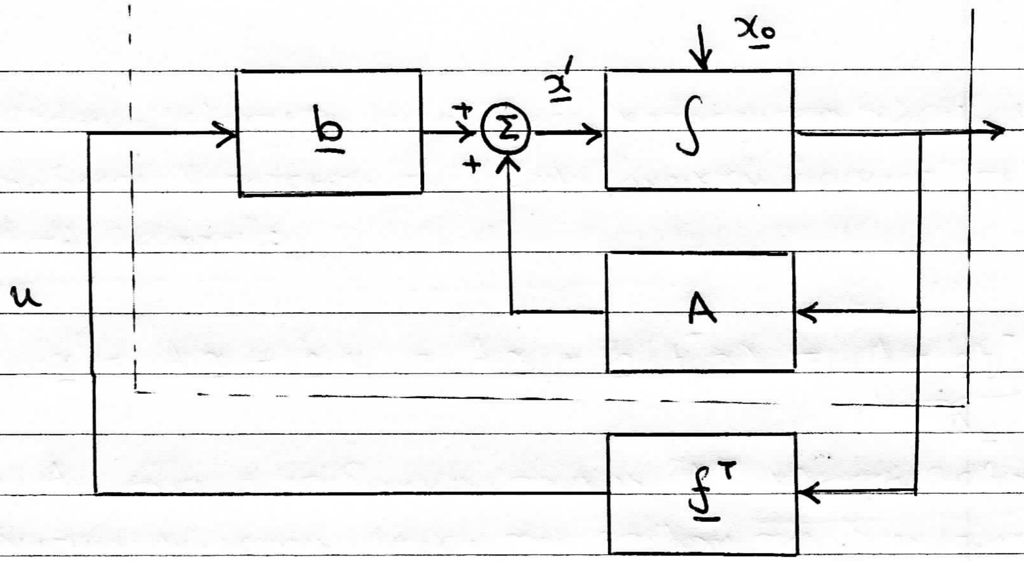
όπου A_c είναι ο ισοδύναμος πίνακας "A" κλειστού βρόγχου. Ο σχεδιασμός ανάδρασης αφορά τήν επιλογή του διανύσματος $\underline{f}$ ώστε ο πίνακας A_c νά έχει κατάλληλες ιδιότητες. Οι ιδιότητες συνήθως εκφράζονται σέ σχέση μέ τό φάσμα του A_c ($\sigma(A_c)$) καί περιλαμβάνουν:

(i) Ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος $\underline{x}' = A_c\underline{x}$ (δηλ. $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$ ή $Re[\lambda_i(A_c)] < 0 \;\; \forall \lambda_i \in \sigma(A_c)$).

(ii) Ταχεία απόκριση σέ σήματα εισόδου (settling-time spec) $Re[\lambda_i(A_c)] \leq -\alpha \;\; \forall \lambda_i(A_c)$ όπου α κατάλληλη παράμετρος σχεδίασης

(iii) Απόσβεση ταλαντώσεων: $|Re[\lambda_i(A_c)]| / |\lambda_i(A_c)| \geq \zeta_0$ $\forall \lambda_i(A_c)$ όπου ζ_0 κατάλληλη παράμετρος σχεδίασης.





Το επόμενο θεώρημα εγγυάται ότι, αν τό σύστημα $\Sigma(A,\underline{b})$ είναι πλήρως ελέγξιμο, μπορούμε νά επιλέξουμε αυθαίρετα τίς ιδιοτιμές του πίνακα $A_c = A + \underline{b}\,\underline{f}^T$ (μέ επιλογή κατάλληλου διανύσματος $\underline{f}$) υπό τόν περιορισμό ότι γιά κάθε μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε επίσης καί την συζυγή της (καί μέ τήν ίδια πολλαπλότητα).

<u>Ορισμός</u>: Εστω $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\rho\}$ σύνολο μιγαδικών αριθμών μέ αντίστοιχο σύνολο "πολλαπλοτήτων" $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\rho\}$ $(\tau_i \in \mathbb{N})$. Τότε τό ~~σύνολο~~ ζεύγος (Λ, T) λέγεται "συζυγές συμμετρικό" αν γιά κάθε $\lambda_i \in \Lambda$ ~~\R~~ $\exists\, \lambda_j \in \Lambda : \lambda_j = \bar{\lambda}_i$ καί $\tau_j = \tau_i$.

<u>Θεώρημα</u>: Τό σύστημα $\Sigma(A,\underline{b})$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν καί μόνο αν γιά κάθε συζυγές συμμετρικό ~~σύνολο~~ ζεύγος (Λ, T),
$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho\}$, $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\rho\}$ μέ $\sum_{i=1}^{\rho} \tau_i = n = \dim(A)$
$\exists\, \underline{f} \in \mathbb{R}^n : \sigma(A + \underline{b}\,\underline{f}^T) = \Lambda$ μέ αλγεβρικές πολλαπλότητες T.
$\cancel{\#}$.

<u>Απόδειξη</u>.
Έστω $\Sigma(A,\underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο καί έστω (Λ, T) συζυγές συμμετρικό: $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\rho\}$, $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots \tau_\rho\}$. Θά δείξουμε ότι υπάρχει $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\chi_{A+\underline{b}\underline{f}^T}(\lambda) = \det(\lambda I - A - \underline{b}\,\underline{f}^T) = \prod_{i=1}^{\rho} (\lambda - \lambda_i)^{\tau_i} :=$$

$= \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\lambda + d_0$ ("επιθυμητό" χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόγχου). Από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(T) \neq 0$, τέτοιος ώστε

$$\Sigma(A, \underline{b}) \overset{T^{-1}}{\sim} \Sigma(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}) \qquad (\tilde{\underline{x}} = T\underline{x})$$

όπου $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{\underline{b}} = T\underline{b}$ και $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}})$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας, δηλ. $\tilde{\underline{x}}' = \tilde{A}\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{b}}u$, όπου

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Κατάλληλος μετασχηματισμός $T = Q^{-1}$ έχει οριστεί στο προηγούμενο Λήμμα. Στο νέο σύστημα συντεταγμένων:

$$y = \underline{f}^T\underline{x} = \underline{f}^T Q Q^{-1}\underline{x} = \tilde{\underline{f}}^T\tilde{\underline{x}} \qquad \text{όπου} \quad \tilde{\underline{f}}^T = \underline{f}^T Q$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $\tilde{\underline{x}}' = A\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{b}}u$, έχουμε:

$$\tilde{\underline{x}}' = \tilde{A}\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{b}}(\tilde{\underline{f}}^T\tilde{\underline{x}}) = (\underbrace{\tilde{A} + \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{f}}^T}_{\tilde{A}_c})\tilde{\underline{x}}$$

και

$$\tilde{A}_c = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{b}}} \underbrace{[\tilde{f}_0 \ \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_{n-1}]}_{\tilde{\underline{f}}^T}$$

δηλαδή:

$$\tilde{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0+\tilde{f}_0 & -a_1+\tilde{f}_1 & \cdots & & -a_{n-1}+\tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $\tilde{A}_c$ είναι σε μορφή companion και επομένως:

$$\chi_{\tilde{A}_c}(\lambda) = \det(\lambda I_n - \tilde{A}_c) = \lambda^n + (a_{n-1} - \tilde{f}_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_0 - \tilde{f}_0)$$

Εφόσον το "επιθυμητό" χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\lambda + d_0$$

επιλέγουμε $\tilde{f}_i = a_i - d_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, και θέτουμε

$$\underline{\tilde{f}}^T = [\tilde{f}_0 \; \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_{n-1}] \quad , \quad \underline{f}^T = \underline{\tilde{f}}^T Q^{-1} = (\underline{a}^T - \underline{d}^T)$$

όπου $\underline{a}^T = [a_0, a_1 \cdots a_{n-1}]$ και $\underline{d}^T = [d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}]$ τα διανύσματα συντελεστών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(\lambda)$ και του επιθυμητού πολυωνύμου κλειστού βρόχου, αντίστοιχα. Από προηγούμενο Λήμμα έχουμε $Q^{-1} = (\Gamma_c H_a)^{-1}$ όπου

$$\Gamma_c = [\underline{b} \,\vdots\, A\underline{b} \,\vdots \cdots \vdots\, A^{n-1}\underline{b}] \quad \text{και} \quad H_a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

και επομένως:

$$\underline{f}^T = (\underline{a}^T - \underline{d}^T)(\Gamma_c H_a)^{-1}$$

($\Leftarrow$): Εστω ότι οι n ιδιοτιμές του πίνακα $A + \underline{b}\underline{f}^T$ μπορούν νά καθοριστούν αυθαίρετα (υπό περιορισμό συζυγούς συμμετρίας). Υποθέτουμε (γιά αντίφαση) ότι τό σύστημα $\Sigma(A, \underline{b})$ δέν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας R^{-1}, $\det(R) \neq 0$, $\hat{\underline{x}} = R\underline{x}$ ώστε

$$\hat{\underline{x}}' = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} + \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Στις νέες συντεταγμένες $u = \underbrace{\underline{f}^T R^{-1}}_{\hat{\underline{f}}^T} \underbrace{R\underline{x}}_{\hat{\underline{x}}} := [\hat{f}_1^T \,\vdots\, \hat{f}_2^T]\, \hat{\underline{x}}$

και έχουμε:

$$\hat{\underline{x}}' = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} + \begin{bmatrix} \hat{\underline{b}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} [\hat{f}_1^T \,\vdots\, \hat{f}_2^T]\, \hat{\underline{x}}$$

$$= \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} \hat{A}_{11} + \hat{\underline{b}}_1 \hat{f}_1^T & \hat{A}_{12} + \hat{\underline{b}}_1 \hat{f}_2^T \\ \hdashline 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right]}_{\hat{A}_c} \hat{\underline{x}}$$

και τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόγχου

$$\chi_{\hat{A}_c}(\lambda) = \det[\lambda I - \hat{A}_{11} - \hat{b}_1 \hat{f}_1^T] \cdot \det[\lambda I - \hat{A}_{22}].$$

Παρατηρούμε ότι $\sigma(\hat{A}_{22}) \subseteq \sigma(A)$ δέν επηρεάζονται από τόν πίνακα ανάδρασης και επομένως οι ιδιοτιμές του $\hat{A}_c$ δέν μπορεί νά καθοριστούν αυθαίρετα. $\square$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω $\Sigma(A, \underline{b})$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2 = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda$$

και επομένως το $\Sigma(A, \underline{b})$ δεν είναι ευσταθές. Ζητείται να βρεθεί (αν υπάρχει) ανάδραση καταστάσεων ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόγχου να είναι $\chi_{A_c}(\lambda) = (\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$.

Ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$\Gamma_c = [\,\underline{b} \mid A\underline{b} \mid A^2\underline{b}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε $\det(\Gamma_c) = -1 \neq 0$ και επομένως $\Sigma(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο. Άρα η ζητούμενη θέση των ιδιοτιμών είναι εφικτή. Έχουμε

$$H_a = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Leftarrow \underline{a}^T = [a_0 \; a_1 \; a_2] = [0 \; 1 \; -2]$$

$$\Uparrow$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 \underbrace{-2}_{a_2}\lambda^2 + \underbrace{1}_{a_1}\lambda + \underbrace{0}_{a_0}$$

Επομένως:

$$\Gamma_c H_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\Gamma_c H_a)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{A_c}(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \Rightarrow \underline{d}^T = [\,1 \;\; 3 \;\; 3\,]$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{f}}^T = \underline{a}^T - \underline{d}^T = [\,0 \;\; 1 \;\; -2\,] - [\,1 \;\; 3 \;\; 3\,] = [\,-1 \;\; -2 \;\; -5\,]$$

$$\Rightarrow \underline{f}^T = \underline{\tilde{f}}^T (\Gamma_c H_a)^{-1} = [\,-1 \,\vdots\, -2 \,\vdots\, -5\,] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{f}^T = [\,-5 \,\vdots\, -8 \,\vdots\, -7\,]$$

Σύστημα κλειστού βρόγχου : $\underline{x}' = (A + \underline{b}\,\underline{f}^T)\underline{x} := A_c \underline{x}$

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\,-5 \,\vdots\, -8 \,\vdots\, -7\,]$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και $\chi_{A_c}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+4 & 8 & 7 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$

$$= (\lambda+4)\lambda(\lambda-1) - [-8 - 7(\lambda-1)] = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 4) - (-7\lambda - 1)$$

$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 \qquad (\text{σωστό!})$$