Ελεγξιμότητα / Παρατηρησιμότητα συστημάτων πολλαπλών εισόδων / εξόδων

Έστω $\Sigma(A,B)$: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(m>1)$, πλήρως ελέγξιμο. Πώς γενικεύονται τά αποτελέσματα ανάδρασης σε αυτήν την περίπτωση;

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο. Τότε υπάρχει $F_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ καί $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$: $\Sigma(A+BF_0, B\underline{v})$ πλήρως ελέγξιμο.

<u>Απόδειξη:</u>

Αν $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο, τότε $\exists\, \underline{v} \in \mathbb{R}^m : B\underline{v} \neq \underline{0}$. Θά δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ (πού ορίζεται επαγωγικά γιά κάποια $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_{n-1}\} \subseteq \mathbb{R}^m$) ως:

$$\underline{e}_1 = B\underline{v}\ , \quad \underline{e}_{j+1} = A\underline{e}_j + B\underline{u}_j\ , \qquad j = 1,2,\dots, n-1$$

πού είναι βάση του $\mathbb{R}^n$. Έστω ότι η ακολουθία δέν μπορεί να ολοκληρωθεί. Τότε γιά κάποιο $k \geq 0$ υπάρχουν διανύσματα $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots \underline{e}_k\}$ (πού αντιστοιχούν σε διανύσματα $\{\underline{u}_1, \dots \underline{u}_k\}$) τά οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα καί γιά κάθε $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$ τό διάνυσμα $A\underline{e}_k + B\underline{u} \in \mathrm{span}\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\} =: E_0$. Επιλέγοντας $\underline{u} = \underline{0} \Rightarrow A\underline{e}_k \in E_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow B\underline{u} \in E_0 \ \forall\, \underline{u} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow A\underline{e}_j := \underline{e}_{j+1} - B\underline{u}_j \in E_0 \ \forall\, j = 1,2,\dots,k-1$.
Άρα ~~$A\underline{e}_k$~~ $A\underline{e}_j \in E_0 \ \forall\, j = 1,2,\dots,k$

Εφόσον $B\underline{u} \in E_0 \ \forall\, \underline{u} \in \mathbb{R}^m$ καί $A\underline{e}_j \in E_0 \ \forall\, j = 1,2,\dots,k$ ο υπόχωρος E_0 είναι A-αναλλοίωτος καί περιέχει $\mathcal{R}(B)$ καί άρα, από προηγούμενο αποτέλεσμα, $\mathcal{X}_c \subseteq E_0$, όπου $\mathcal{X}_c$ είναι ο ελέγξιμος υπόχωρος του $\Sigma(A,B)$. Λόγω πλήρους ελεγξιμότητας του $\Sigma(A,B)$:

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{X}_c \subseteq E_0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = \mathbb{R}^n$$

δηλαδή $k=n$ καί $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ βάση του $\mathbb{R}^n$ (καί ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται).

Ορίζουμε γραμμικό μετασχηματισμό: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $F_0 \underline{e}_j = \underline{u}_j$ $(j=1,2,..n)$
Τότε

$$\underline{e}_{j+1} = A\underline{e}_j + B\underline{u}_j = (A+BF_0)\underline{e}_j$$

$$= \cdots = (A+BF_0)^j e_1$$

$$= (A+BF_0)^j B\underline{v} \qquad j=0,1,\ldots,n-1$$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του $\Sigma(A+BF_0, B\underline{v})$ είναι:

$$\Gamma_c = [B\underline{v} \vdots (A+BF_0)B\underline{v} \vdots \cdots \vdots (A+BF_0)^{n-1}B\underline{v}] = [\underline{e}_1\, \underline{e}_2 \cdots \underline{e}_n]$$

Καί επομένως $\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = n$ εφόσον $\{\underline{e}_i\}_{i=1}^n$ βάση του $\mathbb{R}^n$.
Συνεπώς $\Sigma(A+BF_0, B\underline{v})$ είναι πλήρως ελέγξιμο

<u>Θεώρημα:</u>
Έστω $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καί $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
Τότε $\exists\, F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοια ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A+BF$, $\chi_{A+BF}(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_0$, $d_i \in \mathbb{R}$, $i=0,1,\ldots,n-1$, νά επιλέγεται αυθαίρετα.

<u>Απόδειξη:</u>
Εφόσον $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο $\exists\, F_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ καί $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$: $\Sigma(A+BF_0, B\underline{v})$ πλήρως ελέγξιμο. Επομένως $\exists\, \underline{f}^T \in \mathbb{R}^n$ ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A+BF_0+B\underline{v}\underline{f}^T$ νά επιλέγεται αυθαίρετα.
Επιλέγοντας $F := F_0 + \underline{v}\underline{f}^T$ αποδεικνύεται το Θεώρημα.

Ορισμός: Τό σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι σταθεροποιήσιμο αν υπάρχει $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $\sigma(A+BF) \subseteq \mathbb{C}_-$.

Θεώρημα: Τό σύστημα $\Sigma(A,B)$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ είναι σταθεροποιήσιμο (stabilisable) αν καί μόνο αν:

$$\operatorname{Rank}([sI_n - A \,\vdots\, B]) = n \qquad \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_+ = \{s\in\mathbb{C} : Re(s)\geq 0\}$$

Απόδειξη:

Έστω $\Sigma(A,B) \overset{T^{-1}}{\sim} \Sigma(\hat{A},\hat{B})$ όπου $\Sigma(\hat{A},\hat{B})$ η κανονική μορφή Kalman, δηλ. $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$ καί

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\dim(\hat{A}_{11}) = n_c$ καί $\Sigma(\hat{A}_{11},\hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο. Εφόσον:

$$A+BF = T^{-1}\hat{A}T + T^{-1}\hat{B}F := T^{-1}\hat{A}T + T^{-1}\hat{B}\underbrace{\hat{F}T}_{F} = T^{-1}(\hat{A}+\hat{B}\hat{F})T$$

όπου $F = \hat{F}T$. Το σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι σταθεροποιήσιμο αν καί μόνο αν $\Sigma(\hat{A},\hat{B})$ είναι σταθεροποιήσιμο. Έστω $\hat{F} = [\hat{F}_1 \,\vdots\, \hat{F}_2]$, $\hat{F}_1 \in \mathbb{R}^{m\times n_c}$, $\hat{F}_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-n_c)}$. Τότε:

$$\hat{A}+\hat{B}\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} [F_1 \,\vdots\, F_2]$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \hat{B}_1F_1 & \hat{A}_{12} + \hat{B}_1F_2 \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

καί $\sigma(\hat{A}+\hat{B}\hat{F}) = \sigma(\hat{A}_{11}+\hat{B}_1F_1) \cup \sigma(\hat{A}_{22})$. Εφόσον $\Sigma(A_{11},\hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο $\exists F_1 : \sigma(\hat{A}_{11}+\hat{B}_1F_1) \subseteq \mathbb{C}_-$ καί επομένως :

$\Sigma(A,B)$ σταθεροποιήσιμο αν και μόνο αν $\sigma(\hat{A}_{22}) \subseteq \mathbb{C}_-$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Rank}\left(\left[\begin{array}{cc:c} sI_{n_c} - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & \hat{B}_1 \\ 0 & sI_{n-n_c} - \hat{A}_{22} & 0 \end{array} \right] \right) = n \quad \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_+$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Rank}\left([\, sI_n - \hat{A} \; \vdots \; \hat{B} \,] \right) = n \quad \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_+$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Rank}\left([\, sI_n - TAT^{-1} \; \vdots \; TB \,] \right) = n \quad \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_+$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Rank}\left([\, sI_n - A \; \vdots \; B \,] \right) = n \quad \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_+ \qquad \square$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα ότι $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του πίνακα $A+BF$ μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα. ~~Το αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί μόνο για την ειδική περίπτωση κατά την οποία το σύστημα έχει μία είσοδο (δηλ. $B = \underline{b} \in \mathbb{R}^n$). Η γενική περίπτωση θα αποδειχθεί αργότερα.~~

<u>"Παρατηρητές" / Εκτιμητές κατάστασης (Observers).</u>

Έστω το σύστημα:

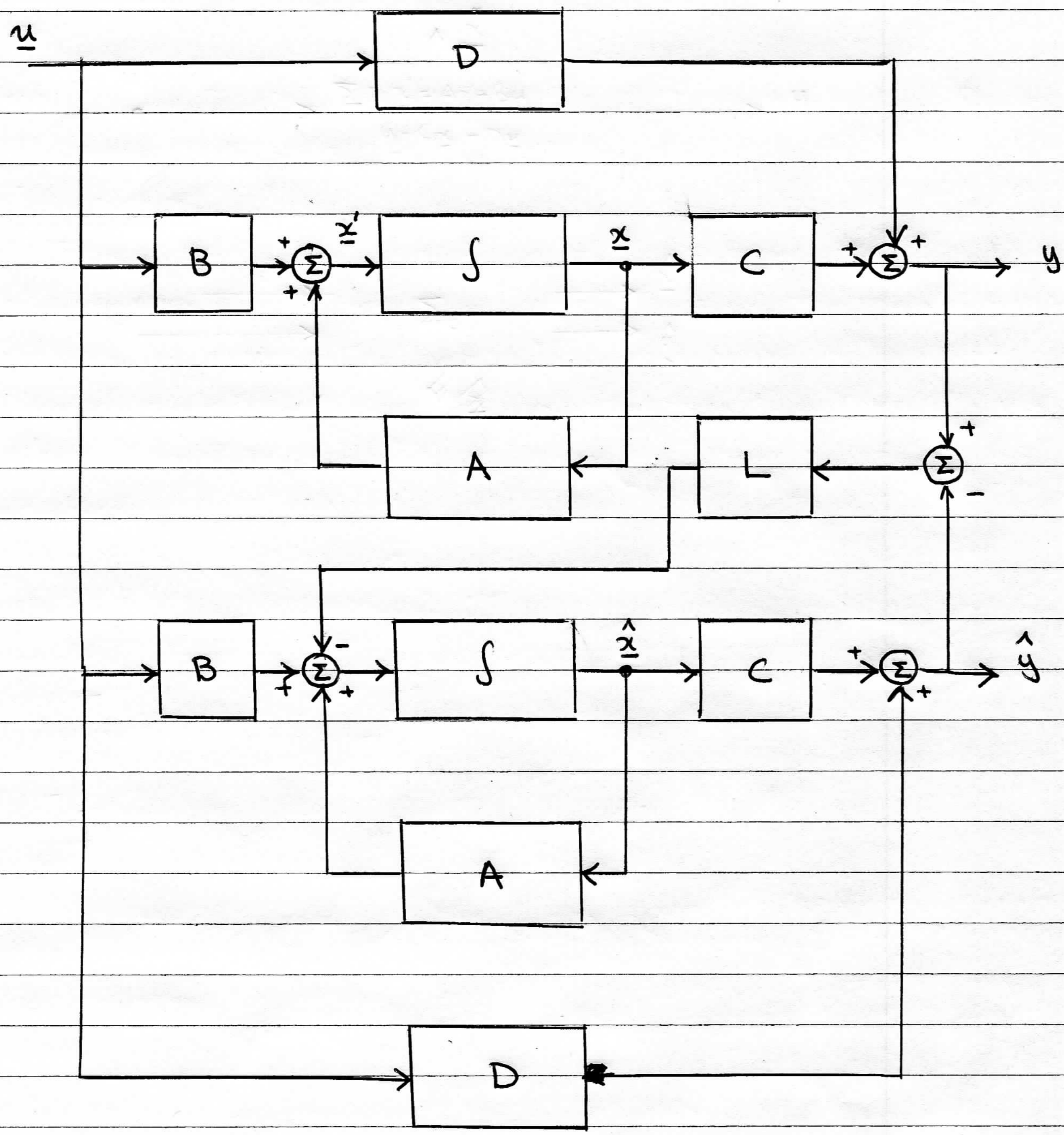
$$\Sigma : \; \underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}, \quad \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$$

με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Ένας γραμμικός παρατηρητής κατασκευάζει μία εκτίμηση της κατάστασης, $\hat{\underline{x}}(t)$, $t>0$, χρησιμοποιώντας την είσοδο και έξοδο του συστήματος στο διάστημα $[0, t_1]$, δηλ. την "πληροφορία" $\{(\underline{u}(\tau), \underline{y}(\tau)) : \tau \in [0, t_1]\}$. Ο παρατηρητής είναι δυναμικό σύστημα που ορίζεται από τις

Εξισώσεις:

$$\Sigma_o : \hat{\underline{x}}' = A\hat{\underline{x}} + B\underline{u} - L(\underline{y}-\hat{\underline{y}}) \quad , \quad \hat{\underline{y}} = C\hat{\underline{x}} + D\underline{u}$$

Ο πίνακας L είναι ο πίνακας "ενίσχυσης" του παρατηρητή. Θα επιλέξουμε τον L ώστε $\hat{\underline{x}} \to \underline{x}$ καθώς $t \to \infty$.



Ορίζουμε τό σφάλμα εκτίμησης $\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$ καί έχουμε:

$$\underline{e}'(t) = \underline{x}'(t) - \hat{\underline{x}}'(t) = A\underline{x} + \cancel{B\underline{u}} - [A\hat{\underline{x}} + \cancel{B\underline{u}} - L(C\underline{x} + \cancel{D\underline{u}} - C\hat{\underline{x}} - \cancel{D\underline{u}})]$$

$$= (A+LC)(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) = (A+LC)\,\underline{e}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{e}(t) = \exp\{(A+LC)t\}\,\underline{e}_0, \qquad \underline{e}_0 := \underline{e}(0) = \underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}(0)$$

Επομένως $\underline{e}(t) \to \underline{0}$ γιά κάθε $\underline{e}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν καί μόνο αν $\sigma(A+LC) \subseteq \mathbb{C}_-$

Στήν περίπτωση πού $p=1$, $C = \underline{c} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $L = \underline{\ell} \in \mathbb{R}^n$ καί
$\sigma(A+LC) = \sigma(A^T + \underline{c}^T \underline{\ell}^T)$

Ορισμός: Έστω $\Sigma(A,C)$: $\underline{x}' = Ax$, $\underline{y} = C\underline{x}$. Το σύστημα $\Sigma(A,C)$ λέγεται detectable αν τό σύστημα $\Sigma(A^T, C^T)$: $\underline{x}' = A^T\underline{x} + C^T\underline{u}$ είναι σταθεροποιήσιμο, δηλ. αν υπάρχει L^T: $\sigma(A^T + C^T L^T) \subseteq \mathbb{C}_-$
($\Leftrightarrow \sigma(A+LC) \subseteq \mathbb{C}_-$).

Συμπεραίνουμε γιά την περίπτωση $p=1$ ότι $\exists\, \underline{\ell} \in \mathbb{R}^n$: $\underline{e}(t) \to \underline{0}$ γιά κάθε $\underline{e}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν καί μόνο αν το σύστημα $\Sigma(A^T, \underline{c}^T)$: $\underline{x}' = A^T\underline{x} + \underline{c}^T\underline{u}$ είναι σταθεροποιήσιμο. Στήν περίπτωση πού η αυστηρότερη συνθήκη πλήρους ελεγξιμότητας του $\Sigma(A^T, \underline{c}^T)$ ικανοποιείται (ισοδύναμα πλήρους παρατηρησιμότητας του $\Sigma(A,\underline{c})$: $\underline{x}' = A\underline{x}$, $\underline{y} = \underline{c}\underline{x}$), τότε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A + \underline{\ell}\,\underline{c}$ μπορούν νά επιλεγούν αυθαίρετα (υπό τόν περιορισμό συζυγούς συμμετρίας). Τα αποτελέσματα ισχύουν καί στήν γενική περίπτωση $p \geq 1$. Συνεπώς:

(i) $\underline{e}(t) \to \underline{0}$ γιά κάθε $\underline{e}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν καί μόνο αν $\Sigma(A,C)$ detectable.

(ii) Οι ιδιοτιμές $\sigma(A+LC)$ μπορούν νά επιλεγούν αυθαίρετα (υπό τόν περιορισμό συζυγούς συμμετρίας) αν καί μόνο αν $\Sigma(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

Ανάδραση εξόδου και αρχή διαχωρισμού

Συνδιασμός παρατηρητή και ανάδρασης κατάστασης (με χρήση εκτίμησης $\hat{\underline{x}}(t)$) πού έχει ως αποτέλεσμα έναν δυναμικό αντισταθμιστή ανάδρασης εξόδου. Οι δυναμικές εξισώσεις:

Σ_p : σύστημα υπό έλεγχο (plant) $\Big\}$ $\quad \underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$

$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$

Σ_o : Παρατηρητής (εκτιμητής) observer $\Big\}$ $\quad \hat{\underline{x}}' = A\hat{\underline{x}} + B\underline{u} - L(\underline{y} - \hat{\underline{y}})$, $\hat{\underline{x}}(0) = \hat{\underline{x}}_0$

$\hat{\underline{y}} = C\hat{\underline{x}} + D\underline{u}$

Ανάδραση κατάστασης εκτίμησης: $\}$ $\quad \underline{u}(t) = K\hat{\underline{x}} + \underline{r}(t)$, όπου $\underline{r}(t)$ εξωτερικό σήμα

Οι εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$\underline{x}' = A\underline{x} + BK\hat{\underline{x}} + B\underline{r}$$

$$\hat{\underline{x}}' = A\hat{\underline{x}} + BK\hat{\underline{x}} + B\underline{r} - LC(x - \hat{x})$$

$$= -LC\underline{x} + (A + BK + LC)\hat{\underline{x}} + B\underline{r}$$

$$\underline{y} = C\underline{x} + D(K\hat{\underline{x}} + \underline{r}) = C\underline{x} + DK\hat{\underline{x}} + \cancel{\underline{x}}D\underline{r}$$

ή

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x}' \\ \hat{\underline{x}}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+BK+LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \underline{r} \\ y &= \left[\, C \;\vdots\; DK \,\right] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + [D]\, \underline{r} \end{aligned}\right\}$$

Κάνουμε χρήση αλλαγής μεταβλητών κατάστασης $(\underline{x}^T, \hat{\underline{x}}^T)^T \to (\underline{x}^T, \underline{e}^T)^T$ δηλ.

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & -I_n \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{x}' \\ \underline{e}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+LC+BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \underline{r}(t)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{x}' \\ \underline{e}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ A+LC & -(A+LC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \underline{r}(t)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{x}' \\ \underline{e}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \underline{r}(t)$$

και

$$\underline{y} = \left[C \,\vdots\, DK \right] \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} + D\underline{r}$$

$$\Rightarrow \underline{y} = \left[C+DK \,\vdots\, -DK \right] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{e} \end{bmatrix} + D\underline{r}$$

Και επομένως:

$$\Sigma_{ce} : \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix}}_{A_c}, \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_c}, \underbrace{\left[C+DK \,\vdots\, -DK \right]}_{C_c}, \underbrace{D}_{D_c} \right)$$

Παρατηρούμε: (1) $\sigma(A_c) = \sigma(A+BK) \cup \sigma(A+LC)$ (αρχή "διαχωρισμού") και επομένως η σχεδίαση ανάδρασης καταστάσεων και παρατηρητή είναι ανεξάρτητα προβλήματα. Οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στον παρατηρητή $\sigma(A+LC)$ είναι μη ελέγξιμες από την είσοδο, δηλ. το υπο-σύστημα "σφάλματος εκτίμησης" είναι αυτόνομο:

$$\underline{e}' = (A+LC)\,\underline{e} \;\Rightarrow\; \underline{e}(t) = \exp\left[(A+LC)t\right]\underline{e}_0$$

Στην πράξη οι ιδιοτιμές $\sigma(A+LC)$ επιλέγονται συνήθως 3-5 φορές μεγαλύτερες σε απόλυτη τιμή από τις ιδιοτιμές $\sigma(A+BK)$.

Παράδειγμα:

Έστω σύστημα "διπλού ολοκληρωτή": $y'' = u$,

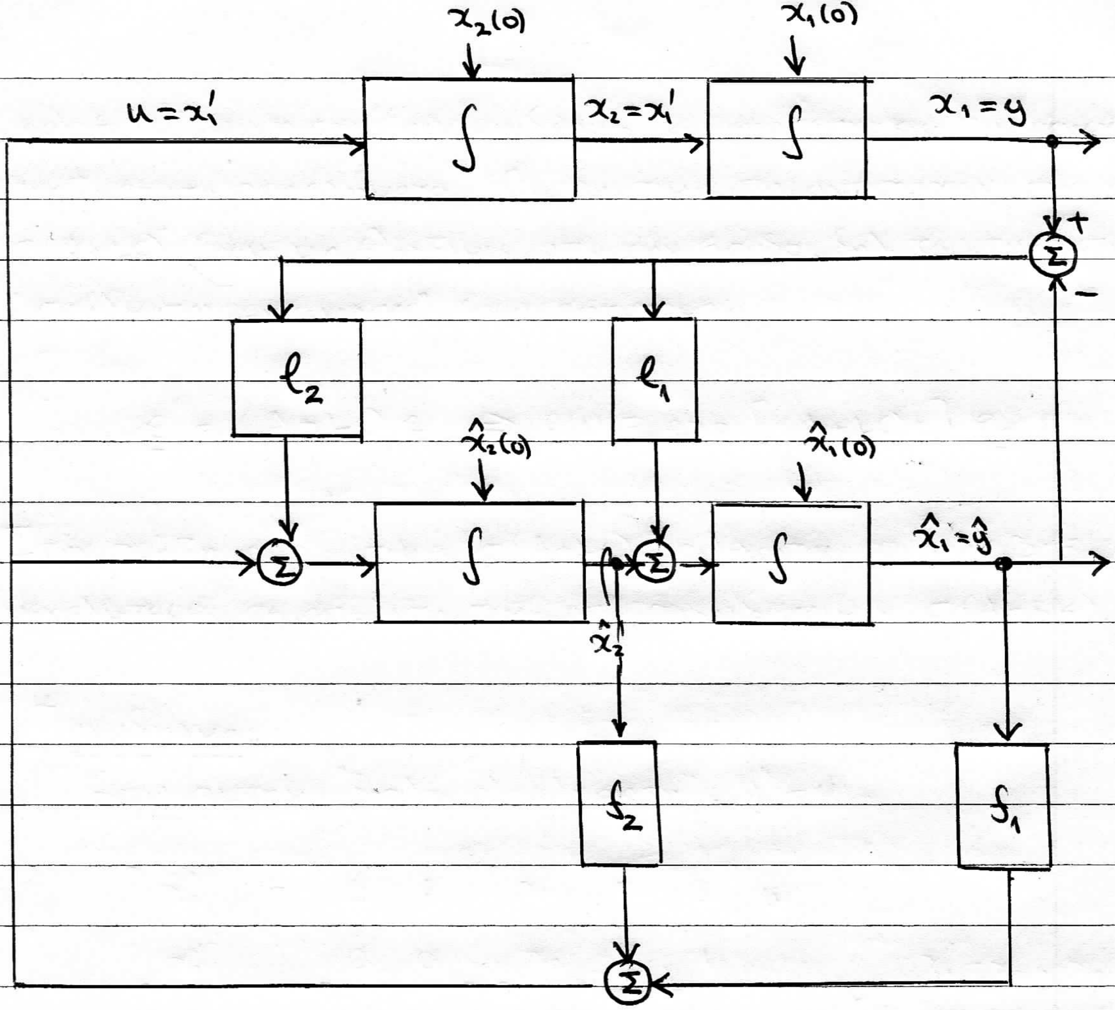
$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]\,u \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x_1' = x_2,\ x_2' = u \\ &y = x_1 \end{aligned}$$

Παρατηρητής:

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_1' \\ \hat{x}_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}(y-\hat{y}) \\ \hat{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + [0]\,u \end{aligned}\right\}$$

Ανάδραση καταστάσεων:

$$u = [f_1 \; \vdots \; f_2]\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$



Ορίζουμε μεταβλητές $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$:

$$e_1' = x_1' - \hat{x}_1' = \underbrace{x_2 - \hat{x}_2}_{e_2} + l_1 \underbrace{(x_1 - \hat{x}_1)}_{e_1} = e_2 + l_1 e_1$$

$$e_2' = x_2' - \hat{x}_2' = \cancel{u} - \cancel{u} + l_2 \underbrace{(x_1 - \hat{x}_1)}_{e_1} = l_2 e_1$$

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = f_1 \hat{x}_1 + f_2 \hat{x}_2 = f_1 (x_1 - e_1) + f_2 (x_2 - e_2) = f_1 x_1 + f_2 x_2 - f_1 e_1 - f_2 e_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline e_1' \\ e_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & -f_1 & -f_2 \\ \hline 0 & 0 & l_1 & 1 \\ 0 & 0 & l_2 & 0 \end{array}\right]}_{A_c} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I_4 - A_c) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -f_1 & \lambda - f_2 \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - \ell_1 & -1 \\ -\ell_2 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (\lambda^2 - f_2\lambda - f_1)(\lambda^2 - \ell_1\lambda - \ell_2)$$

και οι 4 ιδιοτιμές των A_c επιλέγονται αυθαίρετα μέσω των παραμέτρων f_1, f_2, ℓ_1, ℓ_2.