Τό πρόβλημα γραμμικού-τετραγωνικού ρυθμιστή (LQR)

Εισαγωγή: Μεταφορά κατάστασης μέ είσοδο ελάχιστης "ενέργειας"

Έστω $\mathcal{U}$ ο χώρος όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $u \in [0,t_1] \times \mathbb{R}^m$ μέ εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{t_1} \underline{g}^T(t)\, \underline{f}(t)\, dt$$

και νόρμα:

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \int_0^{t_1} \underline{u}^T \underline{u}(t)\, dt = \int_0^{t_1} \sum_i u_i^2(t)\, dt$$

Έστω $\Sigma(A,B)$ τό σύστημα: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, πλήρως ελέγξιμο, μέ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Έστω $\hat{W}_c(0,t_1)$ ο πίνακας Gramian του συστήματος

$$\hat{W}_c(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau}\, d\tau > 0$$

Θεώρημα: Η συνάρτηση εισόδου $\underline{u}_1(\tau) = -B^T e^{-A^T\tau} \hat{W}_c^{-1}(0,t_1)\, \underline{x}_0$, $\tau \in [0,t_1]$ έχει τις ιδιότητες: (i) $\underline{u}_1 \in \mathcal{U}$, (ii) Η $\underline{u}_1$ μεταφέρει τήν κατάσταση $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ στήν κατάσταση $\underline{x}(t_1) = \underline{0}$, (iii) Η $\|\underline{u}_1\|$ είναι ελάχιστη από τή νόρμα κάθε $\underline{u} \in \mathcal{U}$ μέ τήν ιδιότητα (ii).

Απόδειξη: (i) Η (i) είναι προφανής.

(ii)
$$\underline{x}(t_1) = e^{At_1}\underline{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$$

$$= e^{At_1}\underline{x}_0 - \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} BB^T e^{-A^T\tau} \hat{W}_c^{-1}(0,t_1)\, \underline{x}_0\, d\tau$$

$$= e^{At_1}\underline{x}_0 - e^{At_1} \int_0^{t_1} e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau} d\tau \cdot \hat{W}_c^{-1}(0,t_1)\, \underline{x}_0$$

$$= e^{At_1}\underline{x}_0 - e^{At_1}\underline{x}_0 = \underline{0}$$

(iii) Έστω $\underline{u} \in \mathcal{U}$ αυθαίρετη είσοδος με την ιδιότητα (ii). Τότε:

$$\underline{0} = e^{At_1} \underline{x_0} + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B \left(\underline{u}(\tau) - \underline{u}_1(\tau) \right) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B \left(\underline{u}(\tau) - \underline{u}_1(\tau) \right) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x_0}^T \hat{W}_c^{-T}(0,t_1) \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B \left(\underline{u}(\tau) - \underline{u}_1(\tau) \right) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \underbrace{\underline{x_0}^T \hat{W}_c^{-T}(0,t_1)\, e^{-A\tau} B}_{\underline{u}_1^T(\tau)} \left(\underline{u}(\tau) - \underline{u}_1(\tau) \right) d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \langle u - u_1, u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, u_1 \rangle = \|u_1\|^2$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$|\langle \underline{u}, u_1 \rangle| \leq \|u\| \cdot \|u_1\| \Rightarrow \|u_1\|^2 \leq \|u\| \cdot \|u_1\|$$

$$\Rightarrow \|u_1\| \leq \|u\| \quad \forall\, u \in \mathcal{U} \qquad \square$$

<u>Θεώρημα</u> (Ανισότητα Cauchy-Schwatz)

Έστω χώρος $\mathcal{V}$ (επί του $\mathbb{R}$) με εσωτερικό γινόμενο. Τότε $u, v \in \mathcal{V} \Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $a = \langle u, v \rangle \neq 0$, διαφορετικά απόδειξη προφανής. Τότε $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \|u - \lambda a v\| = \langle u - \lambda a v, u - \lambda a v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - \lambda a \langle u, v \rangle - \lambda a \langle v, u \rangle + \lambda^2 a^2 \langle v, v \rangle$$

$$= \|u\|^2 - 2\lambda a \langle u,v\rangle + \lambda^2 a^2 \|v\|^2 \quad := f(\lambda)$$

όπου: $f(\lambda) = \|u\|^2 - 2\lambda \langle u,v\rangle^2 + \lambda^2 \langle u,v\rangle^2 \|v\|^2 \geq 0$

Η συνάρτηση $f(\lambda)$ ελαχιστοποιείται όταν

$$f'(\lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda \langle u,v\rangle^2 \|v\|^2 = 2 \langle u,v\rangle^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\|v\|^2}$$

$$\Rightarrow \|u\|^2 - \frac{2\langle u,v\rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{1}{\|v\|^4} \langle u,v\rangle^2 \|v\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \|u\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|v\|^2} \geq 0 \Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \qquad \square$$

Τό πρόβλημα LQR

Έστω $\Sigma(A,B)$: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
Ορίζουμε τό τετραγωνικό συναρτησιακό:

$$J(\underline{x_0}, \underline{u}) = \int_0^\infty \left(\underline{x}^T(t)\, Q\, \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t)\, R\, \underline{u}(t) \right) dt \qquad (*)$$

όπου $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$. Υποθέτουμε ότι:

<u>Υπ1</u>: $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο. (Εγγυάται ύπαρξη λύσης)

<u>Υπ2</u>: $\Sigma(A,Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο. (Εγγυάται ευστάθεια λύσης).

Οι υποθέσεις Υπ1 και Υπ2 μπορούν νά χαλαρωθούν (σέ stabilisability / detectability). Τό πρόβλημα είναι "απείρου ορίζοντα" (γενικεύεται σέ προβλήματα πεπερασμένου ορίζοντα, χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, κλπ).

Πρόβλημα LQR: Νά βρεθεί (αν υπάρχει) βέλτιστη συνάρτηση ελέγχου $\hat{\underline{u}} \in C([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J(\underline{x_0},\underline{u})$, δηλ. $J(\underline{x_0}, \hat{\underline{u}}) \le J(\underline{x_0},\underline{u}) \;\; \forall u \in C([0,\infty),\mathbb{R}^m)$.

Λήμμα: (i) $\inf\{J(\underline{x_0},\underline{u}) : \underline{u} \in C([0,\infty),\mathbb{R}^m)\} < \infty$. (ii) Αν $J(\underline{x_0},\underline{u}) < \infty$, τότε $\underline{u} \in \mathcal{U} := \{\underline{u} \in C([0,\infty),\mathbb{R}^m) : \|x(t)\| \to 0$ καθώς $t \to \infty\}$.

Απόδειξη: (i) Εφόσον $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο, τότε αν $t_1 > 0$, $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, \underline{u} \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m) : \underline{x}(t_1) = \underline{0}\}$. Ορίζουμε

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= u(t), & 0 \le t \le t_1 \\ &= 0, & t > t_1 \end{aligned}\right\}.$$

Τότε $J(\underline{x_0},\tilde{\underline{u}}) = \int_0^{t_1} (\underline{x}^T(\tau) Q \underline{x}(\tau) + \underline{u}^T(\tau) R u(\tau))\, d\tau < \infty$ και επομένως

$$\inf\{J(\underline{x_0},\underline{u}) : u \in C([0;\infty),\mathbb{R}^m)\} < \infty.$$

(ii) Ορίζουμε τό σύστημα:

$$\Sigma(A,B,Q): \left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u}, \quad \underline{x}(0) = \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{y} &= Q^{1/2}\underline{x} \end{aligned}\right\}.$$

Τότε: $J(\underline{x_0},u) = \int_0^\infty (\|\underline{y}(\tau)\|^2 + \underline{u}^T(\tau) R\, u(\tau))\, d\tau$.

Εφόσον $J(\underline{x_0},u) < \infty \Rightarrow \int_0^\infty \|\underline{y}(\tau)\|^2 d\tau < \infty$ καί $\int_0^\infty \|u(\tau)\|^2 d\tau < \infty$ $(R = R^T > 0)$, και επομένως $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ και $\lim_{t\to\infty} \underline{u}(t) = 0$

Λόγω πλήρους παρατηρησιμότητας του $\Sigma(A, Q^{1/2})$, $\exists\, L \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\sigma(A - LQ^{1/2}) \subseteq \mathbb{C}_-$ και οι δυναμικές εξισώσεις του συστήματος γράφονται:

$$\underline{x}' = (A - LQ^{1/2})\underline{x} + L\underline{y} + B\underline{u}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}' = (A - LQ^{1/2})\underline{x} + [L \,\vdots\, B]\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{u} \end{bmatrix}.$$

Εφόσον $\sigma(A - LQ^{1/2}) \subseteq \mathbb{C}_-$ και $\underline{y} \to 0$, $\underline{u} \to 0$ καθώς $t \to \infty$, έχουμε και $\underline{u} \to 0$ καθώς $t \to \infty$, δηλ. $\underline{u} \in \mathcal{U}$. $\square$

Θεώρημα: Η βέλτιστη λύση του προβλήματος LQR (κάτω από τις Υπ1 και Υπ2) υπάρχει, είναι μοναδική και ορίζεται ως ανάδραση καταστάσεων:

$$\hat{\underline{u}}(t) = -R^{-1}B^T P \underline{x}(t)$$

όπου $P = P^T > 0$ είναι η μοναδική, θετικά ορισμένη ($P > 0$) λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \qquad (**)$$

για την οποία $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$, $A_c := A - BR^{-1}B^T P$. Επιπλέον $J(\underline{x_0}, \hat{\underline{u}}) = \underline{x_0}^T P \underline{x_0}$.

Απόδειξη: Χωρίς περιορισμό γενικότητας λόγω του προηγούμενου Λήμματος περιορίζουμε την αναζήτηση της βέλτιστης συνάρτησης στο σύνολο $\mathcal{U} := \{ \underline{u} \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^m) : \underline{x}(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty \}$. Είναι:

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\underline{x}^T(t) P \underline{x}(t)\right) dt = \lim_{t \to \infty} x^T(t) P \underline{x}(t) - \underline{x_0}^T P \underline{x_0}$$

$$= -\underline{x_0}^T P \underline{x_0}$$

και επομένως $\forall\, \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \underline{u} \in \mathcal{U}$:

$$J(\underline{x_0}, \underline{u}) - \underline{x_0}^T P \underline{x_0} = \int_0^\infty \left(\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u} + (\underline{x}^T P \underline{x})'\right) dt$$

$$\Rightarrow J(\underline{x_0},\underline{u}) - \underline{x_0}^T P \underline{x_0} = \int_0^{\infty} (\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u} + (\underline{x}')^T P \underline{x} + \underline{x}^T P \underline{x}')\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u} + (\underline{x}^T A^T + \underline{u}^T B^T) P \underline{x} + x^T P (A\underline{x} + B\underline{u}) \right) dt$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\underline{x}^T \underbrace{(Q + A^T P + PA)}_{PBR^{-1}B^T P} \underline{x} + \underline{u}^T B^T P \underline{x} + \underline{x}^T P B \underline{u} + \underline{u}^T R \underline{u} \right) dt$$

$$= \int_0^{\infty} (\underline{u} + R^{-1} B^T P \underline{x})^T R (\underline{u} + R^{-1} B^T P \underline{x})\, dt$$

$$\geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \Rightarrow J(\underline{x_0},\underline{u}) \geq \underline{x_0}^T P \underline{x_0} \quad \forall \underline{u} \in \mathcal{U}$$

$$\Rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} J(\underline{x_0},\underline{u}) \geq \underline{x_0}^T P \underline{x_0}$$

Έστω $\hat{\underline{u}} = -R^{-1} B^T P \underline{x}(t)$. Τότε $J(\underline{x_0},\hat{\underline{u}}) = \underline{x_0}^T P \underline{x_0}$. Θα δείξουμε ότι $\hat{u} \in \mathcal{U}$, δηλαδή

$$(\underline{x}' = A\underline{x} + B\hat{\underline{u}},\ \underline{x}(0) = \underline{x_0}) \Rightarrow \|x(t)\| \to 0 \text{ καθώς } t \to \infty$$

για κάθε $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Είναι:

$$\underline{x}' = (\underbrace{A - BR^{-1}B^T P}_{A_c}) \underline{x}(t) := A_c \underline{x}(t) \Rightarrow \underline{x}(t) = e^{A_c t} \underline{x_0}$$

Επομένως $\|\underline{x}(t)\| \to 0$ $\forall \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$.
Η εξίσωση Riccati γράφεται:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \Leftrightarrow A_c^T P + PA_c + PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Έστω $\lambda \in \mathbb{C}\ \sigma(A_c)$, $A_c \underline{\xi} = \lambda \underline{\xi}$, $\underline{\xi} \neq \underline{0}$. Τότε

$$\underline{\xi}^* (A_c^T P + P A_c + PBR^{-1}B^T P + Q) \underline{\xi} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$(\lambda+\bar{\lambda})\underbrace{\underline{\xi}^* P \underline{\xi}}_{>0} + \underbrace{\underline{\xi}^* P B R^{-1} B^T P \underline{\xi}}_{\geq 0} + \underbrace{\underline{\xi}^* Q \underline{\xi}}_{\geq 0} = 0$$

$\Rightarrow$ $Re(\lambda) < 0$ ή $\left(Re(\lambda) = 0 , B^T P \underline{\xi} = \underline{0} , Q\underline{\xi} = \underline{0} \right)$. Στην δεύτερη περίπτωση:

$$B^T P \cancel{*} \underline{\xi} = \underline{0} \Rightarrow \underbrace{(A - BR^{-1}B^T P)}_{A_c} \underline{\xi} = A\underline{\xi} = \lambda \underline{\xi}$$

και επομένως:

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \hdashline Q \end{bmatrix} \underline{\xi} = \underline{0}$$

άτοπο, καθώς $\underline{\xi} \neq \underline{0}$ και $\Sigma(A,Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο. Άρα $Re(\lambda) < 0$ $\forall \lambda \in \sigma(A_c) \Rightarrow \sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$. Επομένως $\hat{\underline{u}} \in \mathcal{U}$ και

$$\min \{ J(x_0, \underline{u}) : \underline{u} \in C([0,\infty), \mathbb{R}^m) \} =$$

$$= \min \{ J(\underline{x_0}, \underline{u}) : \underline{u} \in \mathcal{U} \} = \cancel{\max} J(\underline{x_0}, \hat{\underline{u}}) =$$

$$= \underline{x_0}^T P \underline{x_0} .$$

Η $\hat{\underline{u}}$ είναι η μοναδική βέλτιστη είσοδος λόγω της (#). □

__Παρατήρηση:__ Οι υποθέσεις Υπ1 και Υπ2 μπορούν νά χαλαρωθούν σέ $\Sigma(A,B)$ ~~ευ~~ stabilisable (σταθεροποιήσιμο) και $\Sigma(A,Q)$ detectable. Η λύση της εξίσωσης Riccati γιά την οποία $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$ είναι σέ αυτή την περίπτωση θετικά ημιορισμένη ($P \geq 0$) και όχι απαραίτητα θετικά ορισμένη ($P > 0$).

Συνοψίζουμε τό αποτέλεσμα ως εξής:

Λύση βέλτιστου προβλήματος LQR:

Σύστημα: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Τετραγωνικό συναρτησιακό "κόστους":

$$J(\underline{x}_0, \underline{u}) = \int_0^\infty (\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u})\, dt$$

όπου $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$, $\Sigma(A, B, Q)$ πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο. Τότε, $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ το συναρτησιακό $J(\underline{x}_0, \underline{u})$ ελαχιστοποιείται μονοσήμαντα από την γραμμική ανάδραση καταστάσεων:

$$\hat{\underline{u}}(t) = K\underline{x}(t), \quad K = -R^{-1}B^T P$$

όπου $P = P^T$ η μοναδική θετικά ορισμένη $(P > 0)$ λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Επιπλέον: $J(\underline{x}_0, \hat{\underline{u}}) = \underline{x}_0^T P \underline{x}_0$ και το σύστημα κλειστού βρόχου $\underline{x}' = A_c \underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$, όπου $A_c = A + BK = A - BR^{-1}B^T P$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλ. $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$.

Παράδειγμα: Έστω σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

και

$$J = \int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t))\, dt$$

Έχουμε: $Q = I_2$, $R = 1$. Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$\Gamma_c = [B \,\vdots\, AB] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Rank}(\Gamma_c) = 2 \Rightarrow \Sigma(A,B) \text{ πλήρως ελέγξιμο.}$$

και $Q = I_2 \Rightarrow \Sigma(A,Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο. Επομένως, $\exists\, P = P^T > 0$: $\sigma(A - BR^{-1}B^TP) \subseteq \mathbb{C}_-$. Έστω:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = P^T > 0 \Rightarrow P_1 > 0,\ P_2 > 0,\ P_1P_3 - P_2^2 > 0.$$

Η εξίσωση Riccati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T}\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q} - \underbrace{\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}[P_2 \,\vdots\, P_3]}_{PBR^{-1}B^TP} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 - P_2^2 = 0 \\ P_1 - P_2P_3 = 0 \\ 2P_2 + 1 - P_3^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P_2 = 1 \quad (P > 0 \Rightarrow P_2 \neq -1, P_1 \,\&\, P_3 \text{ ομόσημα}). \\ P_1 = P_2P_3 \\ P_3^2 = 3 \Rightarrow P_3 = \sqrt{3} \quad (P > 0 \Rightarrow P_3 > 0) \end{array}$$

$$\Rightarrow P_1 = P_3 = \sqrt{3},\ P_2 = 1$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \hat{u} = -R^{-1}B^TP\underline{x} = -[0 \,\vdots\, 1]\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_1(t) - \sqrt{3}x_2(t)$$

και:

$$A_c = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{[0 \ 1]}_{B^T}\underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix},\ \mathcal{X}_{A_c}(\lambda) = \lambda^2 + \sqrt{3}\lambda + 1$$

Επίλυση εξίσωσης Riccati

Η αλγεβρική εξίσωση Riccati ορίζεται ως:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \qquad (AEP)$$

όπου $\Sigma(A,B,Q)$ είναι πλήρως ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

<u>Ορισμός</u>: Ο πίνακας Hamiltonean πού σχετίζεται μέ την AEP είναι:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

Θά δείξουμε ότι:

(1) Η AEP γράφεται ως:

$$\left[P \,\vdots\, -I \right] \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \hdashline P \end{bmatrix} = 0$$

(2) $\lambda \in \sigma(H) \Leftrightarrow -\lambda \in \sigma(H)$

(3) $\lambda \in \sigma(H) \Rightarrow Re(\lambda) \neq 0$ καί επομένως ο H έχει n ιδιοτιμές στό $\mathbb{C}_-$ καί n (συμμετρικές) ιδιοτιμές στό $\mathbb{C}_+$. Επομένως $\exists$ T, Λ :

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}}_{T} \Lambda$$

$T_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(i=1,2)$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\sigma(\Lambda) \subseteq \mathbb{C}_-$ (π.χ οι στήλες του T είναι η ιδιοδιανύσματα του H).

(4) $\det(T_1) \neq 0$ (δεν θα αποδειχθεί)

(5) $P = T_2 T_1^{-1}$ είναι η μοναδική θετικά ορισμένη λύση της AEP για την οποία $\sigma(A - BR^{-1}B^T P) \subseteq \mathbb{C}_-$.

Λήμμα: $\lambda \in \sigma(H) \Leftrightarrow -\lambda \in \sigma(H)$

Απόδειξη: Έστω:

$$\mathcal{J} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathcal{J}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right] = -\mathcal{J}$$

Τότε:

$$\mathcal{J}^{-1} H \mathcal{J} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} -A^T & Q \\ BR^{-1}B^T & A \end{bmatrix} = -H^T.$$

(ο πίνακας H έχει "συμπλεκτική" δομή). Επομένως:

$\sigma(\mathcal{J}^{-1} H \mathcal{J}) = \sigma(-H^T) \Rightarrow \sigma(H) = -\sigma(H)$ και επομένως $\lambda \in \sigma(H) \Rightarrow -\lambda \in \sigma(H)$, δηλ. τό φάσμα του H είναι συμμετρικό ως πρός τον άξονα των φανταστικών. □

Λήμμα: $\lambda \in \sigma(H) \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$

Απόδειξη: Έστω $H\underline{v} = \lambda \underline{v}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$. Τότε:

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \neq \underline{0}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A\underline{v}_1 - BR^{-1}B^T\underline{v}_2 &= \lambda \underline{v}_1 \\ -A^T\underline{v}_2 - Q\underline{v}_1 &= \lambda \underline{v}_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &① \\ &② \end{aligned}$$

$$① \Rightarrow (A - \lambda I)\underline{v}_1 = BR^{-1}B^T\underline{v}_2$$

$$\Rightarrow \underline{v}_2^* A\underline{v}_1 - \lambda \underline{v}_2^*\underline{v}_1 = \underline{v}_2^* BR^{-1}B^T\underline{v}_2 \qquad ③$$

$$② \Rightarrow (A^T + \lambda I)\underline{v}_2 = -Q_* \underline{v}_1$$

$$\Rightarrow \underline{v}_1^* A^T\underline{v}_2 + \lambda \underline{v}_1^*\underline{v}_2 = -\underline{v}_1^* Q_* \underline{v}_1$$

$$\Rightarrow \underline{v}_2^* A\underline{v}_1 + \bar{\lambda}\, \underline{v}_2^*\underline{v}_1 = -\underline{v}_1^* Q_* \underline{v}_1 \qquad ④$$

$$④ - ③ \quad (\lambda + \bar{\lambda})\underline{v}_2^*\underline{v}_1 = -\underline{v}_1^* Q_* \underline{v}_1 - \underline{v}_2^* BR^{-1}B^T\underline{v}_2 \leq 0$$

Έστω $\lambda + \bar{\lambda} = 2\,\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. Τότε $\underline{v}_1^* Q \underline{v}_1 = 0$ καί $\underline{v}_2^* BR^{-1}B^T\underline{v}_2 = \underline{0}$.

$$\left.\begin{aligned} &\underline{v}_1^* Q\underline{v}_1 = 0 \Rightarrow Q\underline{v}_1 = 0 \qquad (Q = Q^T \geq 0) \\ &\underline{v}_2^* BR^{-1}B^T\underline{v}_2 = 0 \Rightarrow B^T\underline{v}_2 = 0 \overset{①}{\Rightarrow} A\underline{v}_1 = \lambda\underline{v}_1 \end{aligned}\right\} \quad ⑤$$

Αν $\underline{v}_1 \neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ Q \end{bmatrix} \underline{v}_1 = \underline{0} \Rightarrow \Sigma(A, Q)$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο (άτοπο)

Επομένως $\underline{v}_1 = 0 \Rightarrow \underline{v}_2 \neq \underline{0}$ καί

$$A^T\underline{v}_2 = -\lambda\underline{v}_2 \Rightarrow \underline{v}_2^* A = -\bar{\lambda}\underline{v}_2^* \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{v}_2^* [-\bar{\lambda} I - A \,\vdots\, B] = 0 \Rightarrow \Sigma(A, B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο (άτοπο). □

Έστω ότι $T \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ καί ότι οί στήλες του είναι βάση του ευσταθούς υπόχωρου του H (π.χ. ιδιοδιανύσματα / γενικευμένα ιδιοδιανύσματα πού αντιστοιχούν στις n ιδιοτιμές του H που βρίσκονται στό $\mathbb{C}_-$).
Τότε:

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \hline T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ \hline T_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

όπου $\sigma(\Lambda) \subseteq \mathbb{C}_-$ $(\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n})$. Μπορούμε νά δείξουμε ότι $\det(T_1) \neq 0$.
Έχουμε

$$AT_1 - BR^{-1}B^T T_2 = T_1 \Lambda \Rightarrow A - BR^{-1}B^T T_2 T_1^{-1} = T_1 \Lambda T_1^{-1}, \text{ καί}$$

$$-QT_1 - A^T T_2 = T_2 \Lambda \Rightarrow -Q - A^T T_2 T_1^{-1} = T_2 \Lambda T_1^{-1}$$

$$\Rightarrow -Q - A^T T_2 T_1^{-1} = T_2 T_1^{-1} \cdot T_1 \Lambda T_1^{-1}$$

$$\Rightarrow -Q - A^T T_2 T_1^{-1} = T_2 T_1^{-1} (A - BR^{-1}B^T T_2 T_1^{-1})$$

$$= T_2 T_1^{-1} A - T_2 T_1^{-1} BR^{-1}B^T T_2 T_1^{-1}$$

Θέτοντας $P = T_2 T_1^{-1}$ έχουμε:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad \text{καί} \quad \sigma(A - BR^{-1}B^T P) = \sigma(\Lambda) \subseteq \mathbb{C}_-$$

καί επομένως $P =: T_2 T_1^{-1}$ είναι η επιδιοκόμενη λύση της (AEP). Μπορούμε νά δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι συμμετρική καί θετικά ορισμένη. (δέν δίνεται απόδειξη).

<u>Παράδειγμα:</u> Ορίζουμε τό σύστημα:

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad R=1 \ , \ Q = C^T C , \quad C = [1 \vdots 0]$$

Έχουμε: $\Gamma_c = [B \vdots AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

καί επομένως $\Sigma(A,B,C)$ πλήρως ελέγξιμο καί παρατηρήσιμο. Έστω:

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

η μοναδική θετικά ορισμένη λύση της AEP:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q} - \underbrace{\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} [P_2 \vdots P_3]}_{PBR^{-1}B^TP} = 0$$

Έχουμε
$$\left.\begin{aligned} (1,1) &\Rightarrow P_2^2 = 1 \Rightarrow P_2 = 1 \\ (1,2) &\Rightarrow P_1 = P_2 P_3 \Rightarrow P_1 = \sqrt{2} \\ (2,2) &\Rightarrow 2P_2 = P_3^2 \Rightarrow P_3 = \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

καί
$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \vdots 1] \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

μέ $\chi_{A_c}(\lambda) = \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ο πίνακας Hamiltonean:

$$H = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & -BB^T \\ \hline \underbrace{-C^TC}_{-Q} & -A^T \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \chi_H(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = e^{\pm i\pi/4} \quad \text{καί} \quad \lambda_{3,4} = e^{\pm i3\pi/4}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\underline{u} = [x \ y \ z \ w]^T$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \lambda x = y, \quad \lambda y + w = 0, \quad x + \lambda z = 0, \quad z + \lambda w = 0$$

$$\Rightarrow [x \ y \ z \ w] = [1 \ \lambda \ \lambda^3 \ -\lambda^2]\, x \qquad (x \neq 0)$$

Ο ευσταθής H-αναλλοίωτος υπόχωρος είναι η εικόνα (Range) τού πίνακα:

$$T = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ -\lambda_3^2 & -\lambda_4^2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 1 \\ e^{3i\pi/4} & e^{-3i\pi/4} \\ e^{9i\pi/4} & e^{-9i\pi/4} \\ -e^{6i\pi/4} & -e^{-6i\pi/4} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} 1 & 1 \\ e^{3i\pi/4} & e^{-3i\pi/4} \\ \hline e^{i\pi/4} & e^{-i\pi/4} \\ e^{2i\pi/4} & e^{-2i\pi/4} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P_1 \\ \hline P_2 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ -\lambda_3^2 & -\lambda_4^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_1^{-1} = \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} \begin{bmatrix} \lambda_4 & -\lambda_3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} \begin{bmatrix} \lambda_4 & -1 \\ -\lambda_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = P_2 P_1^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ -\lambda_3^2 & -\lambda_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_4 & -1 \\ -\lambda_3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3}$$

$$= \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} \begin{bmatrix} \lambda_3^3 \lambda_4 - \lambda_4^3 \lambda_3 & \lambda_4^3 - \lambda_3^3 \\ -\lambda_3^2 \lambda_4 + \lambda_4^2 \lambda_3 & \lambda_3^2 - \lambda_4^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_4-\lambda_3} \begin{bmatrix} \lambda_3\lambda_4(\lambda_3+\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4^2+\lambda_3\lambda_4+\lambda_3^2) \\ -\lambda_3\lambda_4(\lambda_3-\lambda_4) & (\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3+\lambda_4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\lambda_3\lambda_4(\lambda_3+\lambda_4) & \lambda_4^2+\lambda_3\lambda_4+\lambda_3^2 \\ \lambda_3\lambda_4 & -(\lambda_3+\lambda_4) \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = e^{3i\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_4 = e^{-3i\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \lambda_3\lambda_4 = 1, \quad \lambda_3+\lambda_4 = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\lambda_3^2 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4^2 = e^{6i\pi/4} + 1 + e^{-6i\pi/4} = e^{-2i\pi/4} + 1 + e^{2i\pi/4}$$
$$= -i + 1 + i = 1$$

$$\Rightarrow P = \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{2} & 1 \\ \hline 1 & \sqrt{2} \end{array}\right]$$ όπως προηγουμένως.

Ο εκτιμητής Kalman και έλεγχος LQG

Έστω ότι τό σύστημα περιγράφεται από τίς εξισώσεις:

$$\Sigma_p: \quad \left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} + G\underline{v} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + \underline{w} \end{aligned}\right\}$$

όπου $\underline{v}(t)$ καί $\underline{w}(t)$ στοχαστικά σήματα θορύβου ("process" καί "measurement", αντίστοιχα), πού ικανοποιούν τίς παρακάτω εξισώσεις

$$E[\underline{v}(t)] = 0 \ , \ E[\underline{w}(t)] \qquad \text{μηδενική μέση τιμή}$$

$$\left.\begin{aligned} E[\underline{v}(t)\underline{v}^T(\tau)] &= V\,\delta(t-\tau) \ , \quad V = V^T \geq 0 \\ E[\underline{w}(t)\underline{w}^T(\tau)] &= W\,\delta(t-\tau) \ , \quad W = W^T > 0 \end{aligned}\right\} \text{Στατιστικά ασυσχέτιστες μεταβλητές γιά } t \neq \tau$$

$$E[\underline{w}(t)\underline{v}^T(\tau)] = 0 \qquad \text{Στατιστικά ασυσχέτιστα σήματα θορύβου "process" καί "measurement" } \forall\, t,\tau$$

$$E[\underline{x}_0] = \underline{\xi}_0 \ , \ E[\underline{x}_0\underline{v}^T(\tau)] = 0 \ , \ E[\underline{x}_0\underline{w}^T(\tau)] = 0$$

$$E[(\underline{x}_0 - \underline{\xi}_0)(\underline{x}_0 - \underline{\xi}_0)^T] = P_0 = P_0^T > 0$$

όπου $E[\cdot]$ είναι οτελεστής στατιστικής προσδοκίας. Ο "βέλτιστος" εκτιμητής που ελαχιστοποιεί τήν ασυμπτωτική νόρμα του σφάλματος εκτίμησης:

$$J[\hat{x}] = \lim_{t\to\infty} E\left[\|\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)\|^2\right]$$

είναι γραμμικός καί έχει δομή:

$$\hat{\underline{x}}'(t) = A\hat{\underline{x}}(t) + B\underline{u}(t) + L[\underline{y}(t) - C\hat{\underline{x}}(t)]$$

όπου $L = -SC^T W^{-1}$, $S = S^T > 0$ η θετικά ορισμένη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$AS + SA^T - SC^T W^{-1} C S + G V G^T = 0$$

και όπου $\sigma(A - SC^T W^{-1} C) \subseteq \mathbb{C}_-$

Τό φίλτρο Kalman μπορεί νά συνδιαστεί μέ την ανάδραση καταστάσεων LQR γιά να δώσει την βέλτιστη λύση στό πρόβλημα LQG. Έστω σύστημα Σ_p όπως ορίστηκε παραπάνω. Η βέλτιστη λύση ελέγχου πού ελαχιστοποιεί την συνάρτηση κόστους

$$J[u] = E\left[\int_0^\infty \left(\underline{x}^T(t) Q \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) R \underline{u}(t)\right) dt \right]$$

όπου $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ (και κάτω από τίς υποθέσεις ελεγξιμότητας και παρατηρισιμότητας LQR) προκύπτει από τόν συνδιασμό:

- Βέλτιστου εκτιμητή (φίλτρου "Kalman")

- Ανάδραση καταστάσεων μέ βέλτιστη ενίσχυση πού αντιστοιχεί στην επίλυση του προβλήματος LQR (χωρίς τους στοχαστικούς όρους) που εφαρμόζεται στό διάνυσμα εκτίμησης $\hat{\underline{x}}$ (και όχι στό $\underline{x}$ που δεν είναι προσβάσιμο).

(Αρχή του "στοχαστικού διαχωρισμού" / "Separation" η "Certainty Equivalence principle")