

Θεωρία Ελέγχου: Συστήματα καταστάσεων χώρου

1.1 Γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα καταστάσεων χώρου

Μη-γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα καταστάσεων χώρου περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

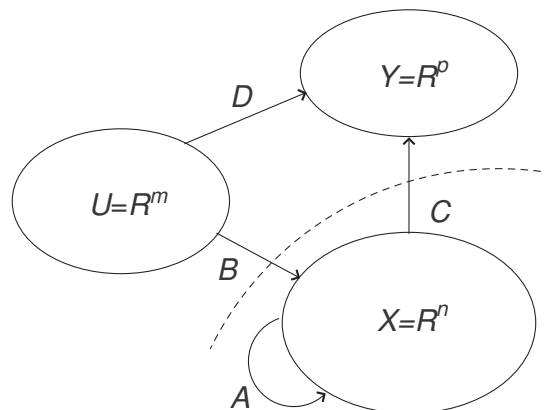
όπου $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ (διάνυσμα κατάστασης), $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ (διάνυσμα εισόδου), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ (διάνυσμα εξόδου) και $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$. Το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο αν η μεταβλητή του χρόνου δεν είναι ανεξάρτητη μεταβλητή των συναρτήσεων $\mathbf{f}$ και $\mathbf{h}$, δηλ.

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Στην περίπτωση αυτή η αρχική κατάσταση ορίζεται χωρίς βλάβη γενικότητας στο σημείο $t_0 = 0$. Σε γραμμικά συστήματα οι συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{h}$ είναι γραμμικές. Γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής:

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t)$$

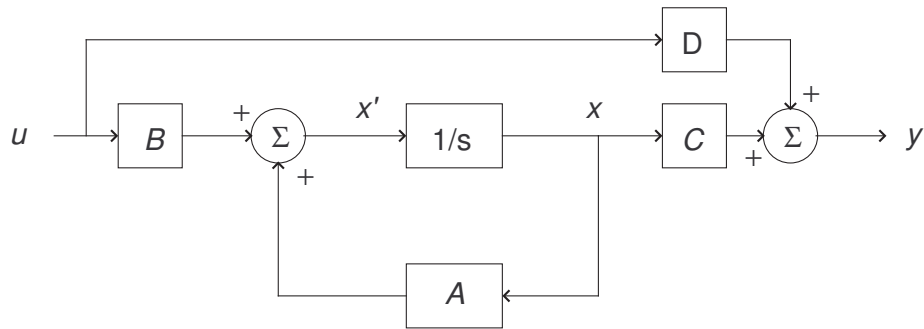
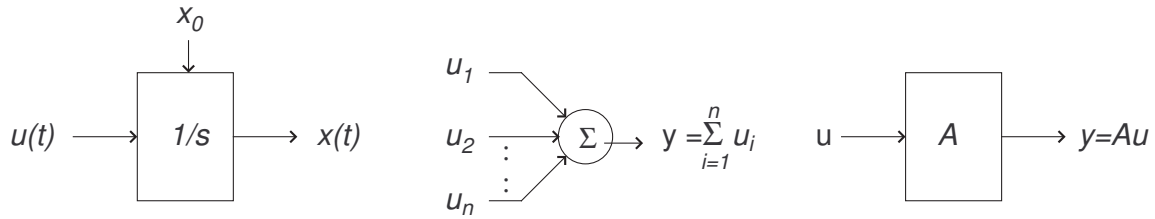
όπου οι πίνακες $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ και $D(t)$ συνήθως θεωρούνται συνεχείς συναρτήσεις του t . Σε γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα συστήματα έχουμε $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (σύστημα με n μεταβλητές κατάστασης, m εισόδους και p εξόδους. Διαγραμματικά:



1.2 Διαγράμματα βαθμίδων

Τα διαγράμματα βαθμίδων χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της συνδεσμολογίας συστημάτων και (σε προηγούμενα χρόνια) τη προσομοίωση τους μέσω αναλογικού υπολογιστή. Για γραμμικά συστήματα τα τρία βασικά στοιχεία διαγράμματος βαθμίδων είναι: (α) Ολοκληρωτής, (β) Αθροιστής και (γ) Πολλαπλασιαστής.

- Ολοκληρωτής: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{u}(\tau) d\tau$ όπου $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Αν $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, τότε $\hat{\mathbf{x}}(s) = \frac{\hat{\mathbf{u}}(s)}{s}$.
- Αθροιστής: Η έξοδος είναι $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i$, όπου $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, m$.
- Πολλαπλασιαστής: Αν η είσοδος είναι $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ και $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ η έξοδος είναι $\mathbf{y} = A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$.



Το διάγραμμα βαθμίδων του γενικού γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος καταστάσεων χώρου είναι ως εξής:

1.3 Στοιχεία μοντελοποίησης

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε το πρόβλημα κατασκευής μοντέλου καταστάσεων χώρου που αντιστοιχεί σε φυσικά συστήματα (μηχανικά, ηλεκτρικά, κλπ).

Παράδειγμα: Κύκλωμα RC:

όπου: $i(t)$ ηλεκτρικό ρεύμα, $v_i(t)$ τάση εισόδου και $v_o(t)$ τάση εξόδου. Από τον νόμο Kirchhoff έχουμε:

$$i(t) = \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R} = C \frac{dv_o}{dt} \Rightarrow \frac{dv_o(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_i(t)$$

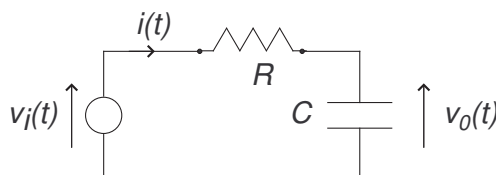
Ορίζοντας: $x(t) = y(t) = v_o(t)$ και $u(t) = v_i(t)$ έχουμε:

$$x'(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t), \quad y(t) = x(t)$$

και άρα $A = -\frac{1}{RC}$, $B = \frac{1}{RC}$, $C = 1$ και $D = 0$.

Παράδειγμα: Μηχανικό σύστημα ανάρτησης (1/4 αυτοκινήτου)

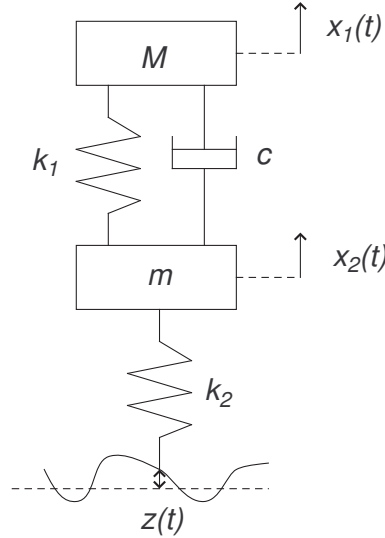
Εδώ M μάζα 1/4 οχήματος, m μάζα συστήματος τροχού, k_1 και k_2 σταθερές Hook ελατηρίων, c συντελεστής απόσβεσης. Επίσης: x_1 και x_2 μετατόπιση μάζας M και m , αντίστοιχα, από θέσεις



ισορροπίας. z η διαταραχή δρόμου. Δυναμικές εξισώσεις:

$$Mx_1'' = -k_1(x_1 - x_2) - c(x_1' - x_2'), \quad mx_2'' = k_1(x_1 - x_2) + c(x_1' - x_2') - k_2(x_2 - z)$$

Ορίζοντας διάνυσμα κατάστασης: $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_1' \ x_2 \ x_2']$ και εσοόδου διαταραχής $u = z$:



$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_1''(t) \\ x_2'(t) \\ x_2''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{c}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m} & \frac{c}{m} & -\frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ x_2(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m} \end{bmatrix} z$$

που είναι της μορφής $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d z(t)$. Οι πίνακες εξόδου εξαρτώνται από ποιούς αισθητήρες έχουμε. Έστω ότι μετράμε: (α) Σχετική μετατόπιση $x_1 - x_2$ και (β) επιτάχυνση μάζας m_1 . Τότε:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{c}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ x_2(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} z$$

που είναι της μορφής $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}z$.

2.1 Μεταχηματισμός Laplace:

Ορισμός: Έστω $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Ο μεταχηματισμός Laplace της συνάρτησης y ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$

αν αυτό συγκλίνει για κάποιο $s \in \mathbb{C}$. Αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $s \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, τότε το Ω είναι περιοχή σύγκλισης του μεταχηματισμού. (Ισοδύναμοι συμβολισμοί για τον μεταχηματισμό $\hat{y}(s)$ είναι $Y(s)$ και $\mathcal{L}(y(t))$.)

Παράδειγμα: Έστω $y(t) = 1, t \geq 0$ (συνάρτηση μοναδιαίου βήματος). Τότε:

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{s} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{s} = \frac{1}{s}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Omega = \{s : \operatorname{Re}(s) > 0\}$.

Παράδειγμα: Έστω $y(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ (εκθετική συνάρτηση). Τότε:

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = - \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right|_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{s-a} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} = \frac{1}{s-a}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Omega = \{s : \operatorname{Re}(s) > a\}$.

Ένας πίνακας μετασχηματισμού Laplace συνηθισμένων συναρτήσεων είναι ο παρακάτω:

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
1	$1/s$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
t	$1/s^2$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
t^2	$2/s^3$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ αν και μόνο αν υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές M , c και T τέτοιες ώστε $|f(t)| \leq M e^{ct}$ για κάθε $t \geq T$. Η σταθερά c ονομάζεται εκθέτης φραγής.

Το επόμενο Θεώρημα δίνει μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace:

Θεώρημα: Εάν η συνάρτηση $f(t)$, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $f(s)$ υπάρχει. Ειδικότερα, αν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ με εκθέτη φραγής c , τότε η $\hat{f}(s)$ υπάρχει για κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(s) > c$.

Μερικές χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace δίνονται στην συνέχεια αυτής της ενότητας (χωρίς αποδείξεις):

Θεώρημα: Ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός τελεστής, δηλ. $\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$ και $\mathcal{L}(cf) = c\mathcal{L}(f)$, $c \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ (και άρα οι συναρτήσεις $\hat{f}(s)$ και $\hat{g}(s)$ υπάρχουν). Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\hat{f}(s) = \hat{g}(s)$ για κάθε s σε περιοχή $\operatorname{Re}(s) > c$, τότε $f(t) = g(t)$ σε όλα τα υποδιαστήματα του $[0, \infty)$ στα οποία οι f και g είναι συνεχείς.

Παρατήρηση: Από το παραπάνω Θεώρημα, δύο τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις f και g με $\hat{f} = \hat{g}$ μπορεί να διαφέρουν μόνο στα σημεία ασυνέχειας. Επομένως στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$, ο μετασχηματισμός Laplace είναι 1-1 και ο αντίστροφος μετασχηματισμός υπάρχει (και είναι επίσης γραμμικός τελεστής).

Θεώρημα (μετασχηματισμός Laplace παραγώγου): Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $f'(t)$ είναι συνεχείς και τμηματικά συνεχείς, αντίστοιχα, στο διάστημα $[0, T]$ για όλα τα $T > 0$. Έστω ακόμα ότι η f είναι εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$. Τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f'(t)$ και δίνεται από την σχέση: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$.

Παρατήρηση: Αν οι υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος ισχύουν για την συνάρτηση $g(t) = f'(t)$, τότε με διπλή εφαρμογή του Θεωρήματος έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

και γενικά, κάτω από αντίστοιχη υπόθεση:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Η μέθοδος μετασχηματισμού των παραγώγων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μετατρέποντας την διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, επιλύοντας την αλγεβρική εξίσωση ως προς $\mathcal{L}\{f(t)\}$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό.

Παράδειγμα: Έστω το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών: $y'' + 3y' + 2y = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Λόγω γραμμικότητας και εφόσον η (μοναδική) λύση είναι εκθετικής τάξης και κλάσης $\mathcal{C}^\infty$,

$$(s^2\hat{y}(s) - s) + 3(s\hat{y}(s) - 1) + 2\hat{y}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow (s^2 + 3s + 2)\hat{y} = \frac{1}{s} + s + 3 \Rightarrow (s+1)(s+2)\hat{y} = \frac{1}{s} + s + 3$$

Ισοδύναμα,

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$\hat{y}(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1/2}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1/2}{s+2}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό,

$$y(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

για $t \geq 0$.

Θεώρημα (μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος): Αν $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση για $t \geq 0$ και εκθετικής τάξης, δηλ. $|f(t)| \leq Me^{ct}$, για $t \geq T$, τότε

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}, \quad \text{για } \operatorname{Re}(s) > c,$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, η ισοδύναμα

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Θεώρημα (μετατόπισης): Αν για μία συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $\operatorname{Re}(s) > c$, τότε ο $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ υπάρχει για $\operatorname{Re}(s) > a + c$ και $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$.

Θεώρημα: Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$.

Θεώρημα: Έστω ότι $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ και $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Τότε $\hat{f}(s) \rightarrow 0$ καθώς $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$.

Ορισμός (συνέλιξη συναρτήσεων): Η συνέλιξη δύο τμηματικά συνεχών συναρτήσεων $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως: $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$.

Παρατήρηση: Η συνέλιξη είναι μεταθετική, δηλ. $f * g = g * f$.

Θεώρημα (συνέλιξης): Αν οι συναρτήσεις $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε η συνέλιξη $f * g$ είναι εκθετικής τάξης και $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$.

Θεώρημα (αρχικής τιμής): Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s)$ υπάρχει. Αν η f είναι φραγμένη στο διάστημα $(0, \infty)$ και το όριο $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ υπάρχει, τότε $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s)$.

Θεώρημα (τελικής τιμής): Έστω ότι $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και ότι η $\hat{f}(s)$ υπάρχει. Έστω ότι κάθε πόλος της $\hat{f}(s)$ είναι στο $\mathbb{C}_- = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) < 0\}$ η στο σημείο $s = 0$ και ότι αν η $\hat{f}(s)$ έχει πόλο στο σημείο $s = 0$, τότε ο πόλος αυτός είναι απλός. Τότε $s \hat{f}(s) \rightarrow L \in \mathbb{R}$ καθώς $s \rightarrow 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$.

Θεώρημα: Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ με μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(s)$, $\operatorname{Re}(s) \geq c$. Τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$ δίνεται ως:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} \hat{f}(s) ds$$

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στην ευθεία $\operatorname{Re}(s) = \gamma$ του μιγαδικού επιπέδου, όπου το γ είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό μέρος κάθε ιδιάζοντος σημείου της $\hat{f}(s)$ και όπου η $\hat{f}$ είναι φραγμένη πάνω στην ευθεία (π.χ. η ευθεία ανήκει στην περιοχή σύγκλισης).

Η προηγούμενη μέθοδος υπολογισμού βασίζεται στο Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy. Για ρητές συναρτήσεις ο υπολογισμός μέσω απλών κλασμάτων είναι απλούστερος.

Παρατήρηση: Στην συνέχεια θα εξετάσουμε συναρτήσεις $f(t)$ (συναρτήσεις Bohl) ο μετασχηματισμός Laplace των οποίων $\hat{f}(s)$ ορίζει ρητές και κανονικές συναρτήσεις. (Μία συνάρτηση $\hat{f}(s)$ είναι ρητή αν είναι το πηλίκο δύο πολυωνύμων $p(s)$ και $q(s)$, δηλ. αν $\hat{f}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$. Στη περίπτωση αυτή η συνάρτηση λέγεται κανονική αν $\partial p(s) \leq \partial q(s)$, δηλ. αν ο βαθμός του πολυωνύμου $p(s)$ δεν υπερβαίνει το βαθμό του $q(s)$ - και αυστηρά κανονική αν $\partial p(s) < \partial q(s)$. Η κλάση αυτή συναρτήσεων μπορεί να περιγράψει την συμπεριφορά όλων των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων δυναμικών συστημάτων.

Έστω $\hat{f}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ ρητή και κανονική συνάρτηση, όπου p και q είναι πρώτα μεταξύ τους. Τότε, ένας μιγαδικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ λέγεται πόλος της $\hat{f}(s)$ αν $\lim_{s \rightarrow \lambda} \hat{f}(s) = \infty$. Λέμε επίσης ότι ο $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι πόλος τάξης m της $\hat{f}$ αν είναι πόλος της $\hat{f}$ και ο m είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε ο λ δεν είναι πόλος της $(s - \lambda)^m \hat{f}(s)$.

Ορισμός (Συναρτήσεις Bohl): Συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γραμμικός συνδιασμός συναρτήσεων της μορφής: $t^k e^{\lambda t}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ονομάζεται συνάρτηση Bohl. Οι αριθμοί λ που εμφανίζονται στον γραμμικό συνδιασμό (δεν απαλείφονται) λέγονται χαρακτηριστικοί εκθέτες της συνάρτησης. Το σύνολο των χαρακτηριστικών εκθετών συνάρτησης Bohl $p(t)$ ονομάζεται το φάσμα της συνάρτησης και συμβολίζεται ως $\sigma(p)$.

Θεώρημα: Αν p και q συναρτήσεις Bohl, τότε $p + q$, pq και p' είναι επίσης συναρτήσεις Bohl. Επίσης: $\sigma(pq) \subseteq \sigma(p) + \sigma(q)$, $\sigma(p + q) \subseteq \sigma(p) \cup \sigma(q)$ και $\sigma(p') \subseteq \sigma(p)$. Επιπλέον, $r(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau$ είναι συνάρτηση Bohl και $\sigma(r) \subseteq \sigma(p) \cup \{0\}$.

Παρατήρηση: Κάθε συνάρτηση Bohl είναι κλάσης $\mathcal{C}^\infty$ και εκθετικής τάξης. Άρα οι υποθέσεις των Θεωρημάτων της ενότητας αυτομάτως ικανοποιούνται.

Παράδειγμα: Έστω $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) = e^{at}$. Από προηγούμενο Θεώρημα:

$$u'(t) = au(t) \Rightarrow s \hat{u}(s) - u(0) = a \hat{u}(s) \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{1}{s - a}$$

Γενικότερα, αν $u_k(t) := t^k e^{at}$, $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, τότε

$$u'_k(t) = kt^{k-1}e^{at} + at^k e^{at} \Rightarrow u'_k(t) = ku_{k-1}(t) + au_k(t)$$

και επομένως

$$s\hat{u}_k(s) = k\hat{u}_{k-1}(s) + a\hat{u}_k(s) \Rightarrow \hat{u}_k(s) = \frac{k}{s-a}\hat{u}_{k-1}(s)$$

$$\text{Επαγωγικά, } \hat{u}_k(s) = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}.$$

Θεώρημα: Μία συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ είναι συνάρτηση Bohl αν και μόνο αν η $\hat{u}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση, δηλ. πηλίκο δύο πολυωνύμων.

Απόδειξη: Από το προηγούμενο παράδειγμα $\mathcal{L}\{t^k e^{at}\} = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}$ που είναι ρητή συνάρτηση. Επομένως, λόγω γραμμικότητας, κάθε συνάρτηση Bohl έχει ρητό μετασχηματισμό Laplace. Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ και ότι η $\hat{f}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση. Τότε, από προηγούμενη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace: $\hat{f}(s) \rightarrow 0$ καθώς $\text{Re}(s) \rightarrow \infty$, δηλαδή ο βαθμός του πολυωνύμου στον αριθμητή της $\hat{f}(s)$ είναι αυστηρά μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου στον παρονομαστή της $\hat{f}(s)$. Συνεπώς η $\hat{f}(s)$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός κλασμάτων της μορφής $c(s-a)^{-k}$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Κάθε όρος αυτού του αθροίσματος είναι συνάρτηση Bohl (της μορφής $ct^{k-1}e^{at}/(k-1)!$) και επομένως το ίδιο ισχύει για τον γραμμικό συνδιασμό τους. $\square$

Στην συνέχεια εξετάζουμε την εκθετική συνάρτηση e^{At} όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Η συνάρτηση προκύπτει από τη λύση $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ του αυτόνομου γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Από την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace και την ιδιότητα της παραγώγου προκύπτει ότι (εφόσον $e^{At} \in \mathcal{C}^\infty$): $s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = A\hat{\mathbf{x}}(s)$, και επομένως $\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}_0$, $\text{Re}(s) > \max\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Θεώρημα: Τα στοιχεία της συνάρτησης e^{At} , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, είναι συναρτήσεις Bohl.

Απόδειξη: Από την επόμενη ενότητα προκύπτει ότι:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}, \quad \text{Re}(s) > \max\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Επομένως,

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \frac{\text{adj}(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)} := \frac{N(s)}{\det(sI - A)}, \quad \text{Re}(s) > \max\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

και

$$\mathcal{L}\{(e^{At})_{ij}\} = \frac{N_{ij}(s)}{\det(sI - A)} = \frac{N_{ij}(s)}{\phi(s)}, \quad \text{Re}(s) > \max\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

όπου $\phi(s)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A . Έχουμε $\partial N_{ij}(s) < \partial \phi(s) = n$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, και από το προηγούμενο Θεώρημα κάθε στοιχείο της e^{At} είναι συνάρτηση Bohl. Εφόσον το πολυώνυμο $\phi(s)$ εμφανίζεται στον παρονομαστή κάθε στοιχείου του $(sI_n - A)^{-1}$, οι χαρακτηριστικοί εκθέτες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A . $\square$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την (γενικευμένη) συνάρτηση κρούσης $\delta(t)$ και τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$.

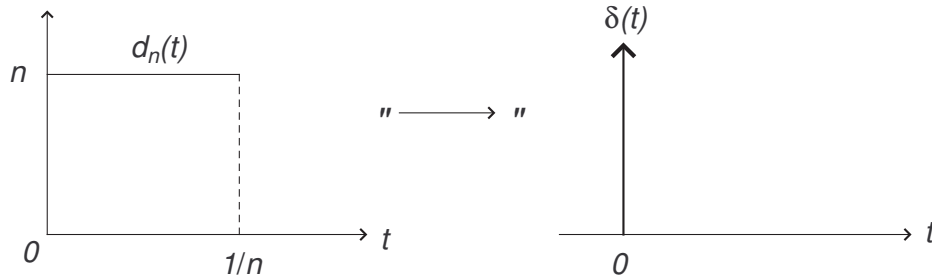
Ορισμός (Ακολουθία Dirac): Μία ακολουθία συναρτήσεων (d_n) , $d_n : \text{PC}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (τμηματικά συνεχών συναρτήσεων από το $[0, \infty)$ στο $\mathbb{R}$), τέτοια ώστε:

- (i) $d_n(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Υπάρχει ακολουθία (τ_n) , $\tau_n > 0$ και $\tau_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $d_n(t) = 0$ αν $t > \tau_n$ και $\int_0^\infty d_n(\tau) d\tau = 1$

Ένα παράδειγμα ακολουθίας Dirac είναι η εξής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$d_n(t) = \begin{cases} n & \text{αν } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & t > \frac{1}{n} \end{cases}$$



Η ακολουθία $d_n(t)$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες του ορισμού. Επίσης:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty d_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n} = 1$$

Συμβολικά γράφουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty d_n(t) dt = 1 \quad " = " \quad \int_0^\infty " \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(t) " dt = \int_0^\infty \delta(t) dt$$

Η έκφραση αυτή έχει αυστηρά συμβολικό χαρακτήρα. Η εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος δεν έχει νόημα καθώς το όριο " $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(t)$ " δεν ορίζει συνάρτηση. Η $\delta(t)$ ορίζεται ως γενικευμένη συνάρτηση (κατανομή).

Αν $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t) d_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n f(t) dt$$

Από το Θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, υπάρχει $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \int_0^{\frac{1}{n}} n dt = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(0)$$

εφόσον η f είναι συνεχής και $t_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Συμβολικά πάλι γράφουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t) d_n(t) dt = " = " \quad \int_0^\infty f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

Παρόμοια για $a \in \mathbb{R}_+$ συμβολικά γράφουμε: $\int_0^\infty f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$.

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $\delta(t)$. Έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} d_n(t) dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

και συμβολικά γράφουμε $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ με περιοχή σύγκλισης όλο το $\mathbb{C}$.

Άσκηση: Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων

$$\hat{g}_1(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}, \quad \hat{g}_2(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}, \quad \hat{g}_3(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$$

με την μέθοδο των απλών κλασμάτων.

Άσκηση: Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{(s+a)^2(s+b)}$$

με την μέθοδο Fourier-Mellin.

Άσκηση: Να λύθει η εξίσωση: $y(t) = t + \int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau$, $t \geq 0$. (Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα είναι συνέλιξη συναρτήσεων).

Άσκηση: Να λυθούν τα Προβλήματα Αρχικών Τιμών: (α) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. (β) $y''(t) - y(t) = t$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Άσκηση: Να αποδείξετε το Θεώρημα συνέλιξης και το Θεώρημα μετατόπισης.

3.1. Απόκριση γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων καταστάσεων χώρου

Έστω το αυτόνομο σύστημα $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Είναι γνωστό (Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις) ότι η λύση του συστήματος είναι μοναδική σε όλο το $\mathbb{R}$ και δίνεται από την εξίσωση $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$. (Επαλήθευση: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης e^{At} έχουμε: $\mathbf{x}' = Ae^{At}\mathbf{x}_0 = A(e^{At}\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}(t)$ και επομένως $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ είναι λύση του διαφορικού συστήματος. Επιπλέον, αφού $e^{At}\mathbf{x}_0|_{t=0} = e^{A0}\mathbf{x}_0 = I_n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$, η λύση αυτή ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη και άρα είναι (η μοναδική) λύση του Π.Α.Τ.)

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace:

$$s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(s) \Rightarrow (sI_n - A)\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0$$

και άρα

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0, \quad \operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Επομένως,

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathcal{L}\{e^{At}\}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}$$

εφόσον το $\mathbf{x}_0$ είναι αυθαίρετο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Από αποτέλεσμα της προηγούμενης ενότητας, τα στοιχεία του πίνακα $e^{At} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συναρτήσεις Bohl (και τα στοιχεία του $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}$ ρητές, αυστηρά κανονικές συναρτήσεις).

Στη συνέχεια εξετάζουμε το συνολικό σύστημα καταστάσεων χώρου (με είσοδο και έξοδο):

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Η λύση του συστήματος προκύπτει με την μέθοδο “μεταβολής σταθερών”:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \Rightarrow e^{-At}\mathbf{x}'(t) - e^{-At}A\mathbf{x}(t) = e^{-At}B\mathbf{u}(t) \Rightarrow (e^{-At}\mathbf{x}(t))' = e^{-At}B\mathbf{u}(t)$$

Ολοκληρώνοντας:

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) = e^{-At}\mathbf{x}(t)|_{t=0} + \int_0^t e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

και επομένως:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{At}\mathbf{x}_0 + e^{At}B * \mathbf{u}(t)$$

όπου “ $*$ ” συμβολίζει την συνέλιξη συναρτήσεων. Επίσης

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t)$$

Ισοδύναμα

$$\mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + Ce^{At}B * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

3.2 Συνάρτηση μεταφοράς

Εξετάζουμε το σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 = A\hat{\mathbf{x}}(s) + B\hat{\mathbf{u}}(s) \Rightarrow (sI_n - A)\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + B\hat{\mathbf{u}}(s)$$

και επομένως

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0 + (sI_n - A)^{-1}B\hat{\mathbf{u}}(s), \operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

και

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = C(sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0 + (C(sI_n - A)^{-1}B + D)\hat{\mathbf{u}}(s)$$

Έστω $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Τότε

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s), \hat{G}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

όπου $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι χρήσιμη στην Θεωρία γραμμικών συστημάτων και γραμμικού ελέγχου για δύο κυρίως λόγους: (i) Μετατρέπει το πρόβλημα σχεδίασης αντισταθμιστή ανάδρασης σε αλγεβρικό πρόβλημα, και (ii) επιτρέπει την ανάλυση του προβλήματος στο πεδίο των συχνοτήτων.

Γράφουμε:

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)} = \frac{\operatorname{adj}(sI_n - A)}{\phi(s)}$$

όπου $\phi(s)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A . Επομένως:

$$\hat{G}(s) = \frac{C\operatorname{adj}(sI_n - A)B}{\phi(s)} + D = \frac{C\operatorname{adj}(sI_n - A)B + \phi(s)D}{\phi(s)} := \frac{N(s)}{\phi(s)}$$

όπου $N(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$. Έχουμε: $\partial\phi(s) = n$ και $\partial[\operatorname{adj}(sI_n - A)]_{ij} \leq n - 1$, $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$. Επομένως:

$$D_{ij} \neq 0 \Rightarrow \partial N_{ij}(s) = n = \partial\phi(s), \quad D_{ij} = 0 \Rightarrow \partial N_{ij}(s) \leq n - 1 < \partial\phi(s) = n$$

Αν για κάθε ζεύγος $(i, j) \in \{1, 2, \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, m\}$, έχουμε $D_{ij} = 0$, τότε $\partial N_{ij}(s) < \partial\phi(s) = n$ για κάθε (i, j) και η συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s)$ λεγεται αυστηρά κανονική. Αν για ένα τουλάχιστον ζεύγος $(i, j) \in \{1, 2, \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ έχουμε $D_{ij} \neq 0$, τότε για αυτό το ζεύγος έχουμε $\partial N_{ij}(s) = \partial\phi(s) = n$ και η συνάρτηση μεταφοράς λεγεται (απλά) κανονική

Παράδειγμα: Έστω σύστημα $\Sigma(A, B, C, 0)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$\phi(s) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{2} & s + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2} = (s+1)(s+\frac{1}{2}) \text{ και } \text{adj}(sI_2 - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{1/2}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{1}{(s+1)(2s+1)}$$

Παρατηρούμε ότι οι πόλοι του συστήματος $\{-1, -\frac{1}{2}\}$ ταυτίζονται με το $\sigma(A)$ (στην γενική περίπτωση $\{\text{πόλοι του } \hat{G}(s)\} \subseteq \sigma(A)$).

3.3 Κρουστική απόκριση: Εξετάζουμε πάλι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Από προηγούμενη ανάλυση η λύση του συστήματος είναι:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{At}\mathbf{x}_0 + (e^{At}B) * \mathbf{u}(t)$$

και

$$\mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + (Ce^{At}B) * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

Έστω ότι $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Τότε:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^{(1)}(t) + \mathbf{y}^{(2)}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = (Ce^{At}B) * \mathbf{u}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t) = D\mathbf{u}(t)$$

Εξετάζουμε πρώτα την συνάρτηση $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ που είναι η συνάρτηση εξόδου του συστήματος όταν $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ και $D = 0$. Έστω $G(t) = Ce^{At}B$. Τότε:

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \int_0^t G(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Έστω ότι $\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}_l\delta(t)$ όπου $\mathbf{e}_l$ η l -στήλη του μοναδιαίου πίνακα I_m (δηλ. $\mathbf{e}_l = (I_m)_l$). Τότε:

$$\hat{\mathbf{y}}^{(1)}(s) = \mathcal{L}\{[G(t)]\} \cdot \mathcal{L}\{\mathbf{e}_l\delta(t)\} = C(sI - A)^{-1}B\mathbf{e}_l, l = 1, 2, \dots, m$$

Επομένως η k -συνιστώσα της $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ είναι:

$$y_k^{(1)}(t) = [G(t)]_{kl} := g_{kl}(t) = \mathbf{C}_k^T e^{At} \mathbf{B}_l(t), k \in \{1, 2, \dots, p\}, l \in \{1, 2, \dots, m\}$$

όπου $\mathbf{C}_k^T$ η k -γραμμή του πίνακα C και $\mathbf{B}_l$ η l -στήλη του πίνακα B .

Με την επιλογή $\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}_l\delta(t)$ έχουμε $\mathbf{y}^{(2)}(t) = D\mathbf{e}_l\delta(t) = \mathbf{D}_l\delta(t)$ όπου $\mathbf{D}_l$ η l -στήλη του πίνακα D και επομένως $y_k^{(2)}(t) = D_{lk}\delta(t)$.

Συνεπώς, η k συνάρτηση εξόδου όταν εφαρμόζουμε κρουστική συνάρτηση εισόδου $\delta(t)$ στην l -είσοδο (και με $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$) είναι

$$y_k^{(1)}(t) + y_k^{(2)}(t) = \mathbf{C}_k^T e^{At} \mathbf{B}_l(t) + D_{lk}\delta(t), t \geq 0, k \in \{1, 2, \dots, p\}, l \in \{1, 2, \dots, m\}$$

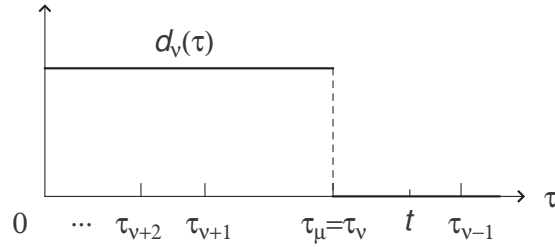
Η συνάρτηση $Ce^{At}B + D\delta(t)$, $t \geq 0$, είναι ο πίνακας κρουστικής απόκρισης του συστήματος (με $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$).

Παρατήρηση: Επισημαίνεται ότι οι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται η συνάρτηση $\delta(t)$ ερμηνεύονται συμβολικά (δείτε προηγούμενη ενότητα μετασχηματισμού Laplace). Μία αυστηρή διατύπωση της κρουστικής απόκρισης γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων καταστάσεων χώρου δίνεται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω (d_ν) ακολουθία συναρτήσεων Dirac (π.χ. $d_\nu(t) = \nu$ για $t \in [0, \frac{1}{\nu}]$ και $d_\nu(t) = 0$ για $t > \frac{1}{\nu}$). Ορίζουμε: $\delta_{\nu,l} \in PC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$, $\delta_{\nu,l}(t) = d_\nu(t)\mathbf{e}_l$ όπου $\mathbf{e}_l$ η l -στήλη του πίνακα I_m . Τότε αν $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ και $\mathbf{u}(t) = \delta_{\nu,l}(t)$,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} y_k^{(1)}(t) = [G(t)]_{kl} := g_{kl}(t), \quad t > 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad l \in \{1, 2, \dots, m\}$$

όπου $y_k^{(1)}(t)$ η k -συνιστώσα της $\mathbf{y}^{(1)}(t)$.



Απόδειξη: Έστω $t > 0$ σταθεροποιημένο αλλά αυθαίρετο. Επιλέγουμε ακέραιο μ τέτοιον ώστε $\tau_\nu \leq t$ για κάθε $\nu \geq \mu$. Τότε, για κάθε $\nu \geq \mu$:

$$y_k^{(1)}(t) = \int_0^t g_{kl}(t-\tau)d_\nu(\tau)d\tau = \int_0^{\tau_\nu} g_{kl}(t-\tau)d_\nu(\tau)d\tau$$

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητών: $\xi = t-\tau$, $\tau = 0 \Rightarrow \xi = t$, $\tau = \tau_\nu \Rightarrow \xi = t-\tau_\nu$, $d\xi = -d\tau$. Επομένως:

$$y_k^{(1)}(t) = \int_t^{t-\tau_\nu} g_{kl}(\xi)d_\nu(t-\xi)(-d\xi) = \int_{t-\tau_\nu}^t g_{kl}(\xi)d_\nu(t-\xi)d\xi$$

Επομένως, από το Θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, υπάρχει $t_\nu \in [t-\tau_\nu, t]$ τέτοιο ώστε:

$$y_k^{(1)}(t) = g_{kl}(t_\nu) \int_{t-\tau_\nu}^t d_\nu(t-\xi)d\xi$$

Εφαρμόζουμε πάλι αλλαγή μεταβλητών: $\tau = t-\xi$, $\xi = t-\tau_\nu \Rightarrow \tau = \tau_\nu$, $\xi = t \Rightarrow \tau = 0$, $d\tau = -d\xi$. Επομένως:

$$y_k^{(1)}(t) = g_{kl}(t_\nu) \int_{\tau_\nu}^0 d_\nu(\tau)(-d\tau) = g_{kl}(t_\nu) \int_0^{\tau_\nu} d_\nu(\tau)d\tau = g_{kl}(t_\nu) \int_0^\infty d_\nu(\tau)d\tau = g_{kl}(t_\nu)$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας το όριο $\nu \rightarrow \infty$ στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης, αφού $t_\nu \rightarrow t$ καθώς $\nu \rightarrow \infty$ και λόγω συνέχειας της συνάρτησης g_{kl} . $\square$

3.4 Παράμετροι Markov: Έστω $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ συνάρτηση μεταφοράς γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος καταστάσεων χώρου. Αν $|s| > \|A\|$ όπου $\|A\|$ μία επαγόμενη νόρμα του A (π.χ. $\|A\| = \sqrt{\rho(A^T A)}$ όπου $\rho(\cdot)$ η φασματική ακτίνα), τότε:

$$\hat{G}(s) = D + C \left[\frac{1}{s} \left(I - \frac{A}{s} \right) \right] B = D + C \left[\frac{1}{s} \left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \dots \right) \right] B = D + \frac{CB}{s} + \frac{CAB}{s^2} + \frac{CA^2B}{s^3} + \dots$$

που αντιστοιχεί στην σειρά Laurent στο $\{s : |s| > \|A\|\}$. (Παρατηρούμε ότι αν περιορίσουμε την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace στο σύνολο: $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \|A\|\}$, τότε:

$$\begin{aligned} s \in \Omega &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(s) > \|A\| \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(s) > \rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} \end{aligned}$$

καθώς και

$$s \in \Omega \Leftrightarrow \operatorname{Re}(s) > \|A\| \Rightarrow |s| > \|A\|$$

και επόμενως οι δύο ιδιότητες σύγκλισης ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{G}(s)\} = G(t) = D\delta(t) + C \left[I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots \right] B = D\delta(t) + Ce^{At}B, \quad t \geq 0$$

όπως περιμένουμε).

Η ακολουθία πινάκων $(G_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $G_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$ όπου $G_0 = D$, $G_k = CA^{k-1}B$, $k \geq 1$ ονομάζεται ακολουθία Markov. Οι όροι της ακολουθίας σχετίζονται με τη χρονιστική απόκριση του συστήματος μέσω της σχέσης:

$$G_k = CA^{k-1}B = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} G(t)|_{t=0} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} Ce^{At}B|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Άσκηση: Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$\hat{g}(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Δείξτε ότι η ακολουθία Markov παράγεται από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} g_0 &= b_n \\ g_1 &= b_{n-1} - g_0 a_{n-1} \\ g_2 &= b_{n-2} - g_1 a_{n-1} - g_0 a_{n-2} \\ &\vdots \\ g_n &= b_0 - g_{n-1} a_{n-1} - \dots - g_0 a_0 \end{aligned}$$

3.5 Συνάρτηση συχνότητων

Μία ιδιότητα γραμμικών χρονικά-αναλλοίωτων συστημάτων αφορά την απόκριση των συστημάτων αυτών σε μονοχρωματικές (δηλ. μοναδικής συχνότητας) ημιτονοειδείς ταλαντώσεις. Κάτω από την υπόθεση ασυμπτωτικής ευστάθειας του συστήματος, το όριο (καθώς $t \rightarrow \infty$) της απόκρισης της εξόδου σε συναρτήσεις εισόδου αυτού του είδους, είναι μία ημιτονοειδής ταλάντωση της ίδιας συχνότητας, αλλά με διαφορετικού πλάτους ταλάντωσης και γωνίας φάσης, σε σχέση με τα χαρακτηριστικά αυτά της συνάρτησης εισόδου. Η ιδιότητα αυτή έχει σημαντικές επιπτώσεις, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Το βασικό αποτέλεσμα συνοψίζεται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω ότι $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$. Για $\omega \in \mathbb{R}$ ορίζουμε συνάρτηση εισόδου $\mathbf{u}_{l,\omega}(t) = \sin(\omega t)\mathbf{e}_l$ όπου $\mathbf{e}_l$ η l -στήλη του πίνακα I_m . Τότε, για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t) - |g_{kl}(i\omega)| \sin(\omega t + \phi_{kl})) = 0$$

όπου $\phi_{kl} = \arg(g_{kl}(i\omega))$, $0 \leq \phi_{kl} < 2\pi$.

Απόδειξη: Από προηγούμενη ανάλυση η έξοδος του συστήματος είναι:

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + (Ce^{At}B) * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

(ο νέος συμβολισμός δίνει έμφαση στην εξάρτηση της $\mathbf{y}$ από την αρχική κατάσταση και την συνάρτηση εισόδου). Εφόσον $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_- = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) < 0\}$ έχουμε $e^{At} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ (απόδειξη σε επόμενη ενότητα!) και επομένως μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη γενικότητας ότι $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Επομένως:

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{0}, \mathbf{u}) = \int_0^t G(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t) = G(t) * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $G(t) = Ce^{At}B$. Έστω $\mathbf{u}(t) = \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l$, $t \geq 0$. Τότε η k συνιστώσα της συνάρτησης εξόδου είναι:

$$y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) = g_{kl}(t) * \exp(i\omega t) + D_{kl} \exp(i\omega t)$$

όπου $g_{kl} = [Ce^{At}B]_{kl}$ και D_{kl} το (k, l) στοιχείο του πίνακα D . Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) &= \int_0^t g_{kl}(\tau) \exp(i\omega(t-\tau))d\tau + D_{kl} \exp(i\omega t) \\ &= \exp(i\omega t) \left[\int_0^t g_{kl}(\tau) \exp(-i\omega\tau)d\tau + D_{kl} \right] \end{aligned}$$

Όμως:

$$\hat{g}_{kl}(s) = \int_0^\infty g_{kl}(\tau)e^{-s\tau}d\tau \Rightarrow \hat{g}_{kl}(i\omega) = \int_0^\infty g_{kl}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \hat{g}_{kl}(s)|_{s=i\omega}$$

και επομένως,

$$\begin{aligned} y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) &= \exp(i\omega t) \left[\int_0^\infty g_{kl}(\tau) \exp(-i\omega\tau)d\tau - \int_t^\infty g_{kl}(\tau) \exp(-i\omega\tau)d\tau + D_{kl} \right] \\ &= \exp(i\omega t) \left[\hat{g}_{kl}(i\omega) - \int_t^\infty g_{kl}(\tau) \exp(-i\omega\tau)d\tau + D_{kl} \right] \end{aligned}$$

Άρα,

$$y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - \hat{g}_{kl}(i\omega) \exp(i\omega t) = - \int_t^\infty g_{kl}(\tau) \exp(i\omega(t-\tau))d\tau$$

Όμως

$$\left| \int_t^\infty g_{kl}(\tau) \exp(i\omega(t-\tau))d\tau \right| \leq \int_t^\infty |g_{kl}(\tau)| \cdot |\exp(i\omega(t-\tau))|d\tau = \int_t^\infty |g_{kl}(\tau)|d\tau \rightarrow 0$$

καθώς $t \rightarrow \infty$ και επομένως,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - \hat{g}_{kl}(i\omega) \exp(i\omega t)) = 0$$

Έστω $\hat{g}_{kl}(i\omega) = |\hat{g}_{kl}(i\omega)| \exp(i\phi_{kl})$ όπου $\phi_{kl} = \arg(\hat{g}_{kl}(i\omega))$. Τότε,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - |\hat{g}_{kl}(i\omega)| \exp(i(\omega t + \phi_{kl}))) = 0$$

Εφόσον η παραπάνω μιγαδική συνάρτηση συγχλίνει, το ίδιο συμβαίνει για το φανταστικό (και το πραγματικό) της μέρος, και άρα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t; \mathbf{0}, \text{Im}(\exp(i\omega t))\mathbf{e}_l) - |\hat{g}_{kl}(i\omega)| \text{Im}(\exp(i(\omega t + \phi_{kl})))) = 0$$

η

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t; \mathbf{0}, \sin(\omega t)\mathbf{e}_l) - |\hat{g}_{kl}(i\omega)| \sin(\omega t + \phi_{kl})) = 0$$

□

Η συνάρτηση $\omega \mapsto \hat{G}(i\omega)$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times m}$, λέγεται συνάρτηση συχνοτήτων του συστήματος. Στις μεθόδους σχεδίασης που βασίζονται στο πεδίο των συχνοτήτων χρησιμοποιούμε τα γραφήματα των συναρτήσεων:

$$\omega \mapsto m_{kl}(\omega) := |\hat{G}_{kl}(i\omega)|, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (\text{συνάρτηση μέτρου συχνοτήτων})$$

και

$$\omega \mapsto \phi_{kl}(\omega) := \arg \hat{G}_{kl}(i\omega), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (\text{συνάρτηση φάσης συχνοτήτων})$$

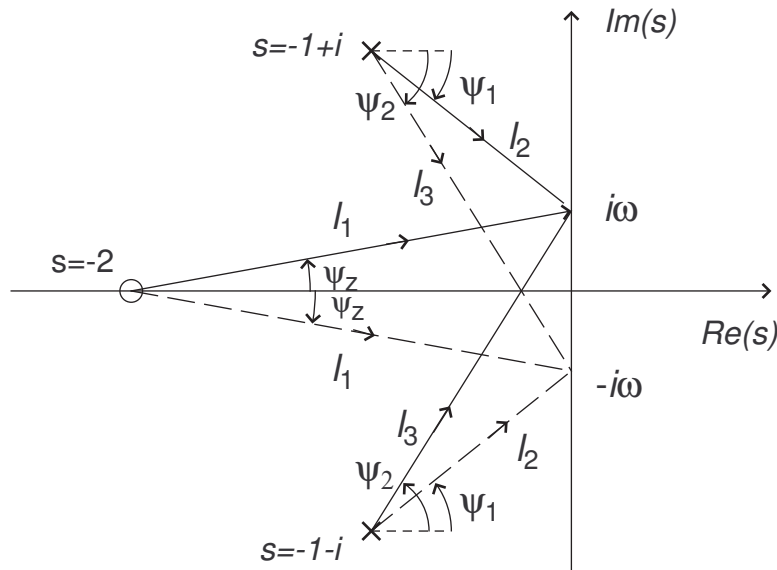
Εφόσον η $G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ είναι πραγματική (γενικευμένη) συνάρτηση του t ,

$$\hat{G}(i\omega) = \int_0^\infty G(t)e^{-i\omega t} dt \Rightarrow \hat{G}(-i\omega) = \int_0^\infty G(t)e^{i\omega t} dt = \overline{\int_0^\infty G(t)e^{-i\omega t} dt} = \overline{\hat{G}(i\omega)}$$

Άρα, αν $\hat{g}_{kl}(i\omega) = m_{kl}(\omega)e^{i\phi_{kl}(\omega)}$, τότε $\overline{\hat{g}_{kl}(i\omega)} = m_{kl}(\omega)e^{i(-\phi_{kl}(\omega))}$ και $\hat{g}_{kl}(-i\omega) = m_{kl}(-\omega)e^{i\phi_{kl}(-\omega)}$ και άρα $m_{kl}(-\omega) = m_{kl}(\omega)$ (άρτια συνάρτηση του ω) και $\phi_{kl}(\omega) = -\phi_{kl}(-\omega)$ (περιττή συνάρτηση του ω). Επομένως τα γραφήματα των συναρτήσεων συχνοτήτων μέτρου και φάσης στην πράξη ορίζονται στο διάστημα $\omega \in [0, \infty)$ (και σχεδιάζονται συνήθως σε λογαριθμική κλίμακα).

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$\hat{g}(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{s+2}{(s+1+i)(s+1-i)}$$



Γεωμετρικά, η τιμή της συνάρτησήςω μέτρου και φάσης σε συχνότητα $\omega \in \mathbb{R}_+$ είναι:

$$m(\omega) = |\hat{g}(i\omega)| = \frac{l_1}{l_2 l_3} = |\hat{g}(-i\omega)| = m(-\omega) \quad \text{και} \quad \phi(\omega) = \arg \hat{g}(i\omega) = \psi_z - (-\psi_1 + \psi_2) = -\phi(-\omega)$$

και άρα η $m(\omega)$ είναι άρτια και η $\phi(\omega)$ περιττή συνάρτηση.

Παράδειγμα: Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{1}{s+1}$. Η συνάρτηση συχνοτήτων είναι

$$\hat{G}(i\omega) = \frac{1}{i\omega + 1} = m(\omega)e^{i\phi(\omega)}, \quad \text{όπου} \quad m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \quad \text{και} \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega)$$

και επομένως αν $u(t) = \sin(\omega t)$, $t \geq 0$, έχουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - m(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(y(t) - \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega)) \right) = 0$$

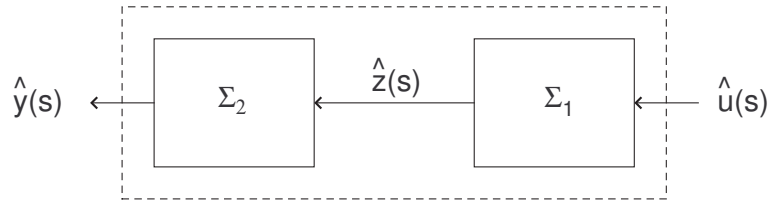
(συμβατικά πολλές φορές γράφουμε: $y_{ss}(t) = m(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$) (η έξοδος σε συνθήκες steady-state). Τα χαρακτηριστικά μέτρου και φάσης της συνάρτησης συχνοτήτων είναι αυτά φίλτρου low-pass: Το μέτρο φθίνει μονοτονικά από την τιμή $m(0) = 1$ και τείνει όριο $\lim_{\omega \rightarrow \infty} m(\omega) = 0$. Η φάση είναι μονοτονικά φθίνουσα για $\omega \in \mathbb{R}_+$ από την τιμή $\phi(0) = 0$ και τείνει στο όριο $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ rads (καθυστέρηση φάσης).

Άσκηση: Περιγράψτε τα χαρακτηριστικά μέτρου και φάσης της συνάρτησης συχνοτήτων κάθε συστήματος από τα παρακάτω που έχει συνάρτηση μεταφοράς: $\hat{g}(s) = \frac{1}{s}$, $\hat{g}(s) = \frac{1}{s^2}$, $\hat{g}(s) = \frac{s+1}{1+s/10}$, $\hat{g}(s) = \frac{1+s/10}{s+1}$, $\hat{g}(s) = \frac{1}{(s+1)(1+s/10)}$, $\hat{g}(s) = \frac{s-1}{s+1}$ και $\hat{g}(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$.

3.6 Συνδεσμολογία συστημάτων

Η έννοια της συνάρτησης μεταφοράς επιτρέπει την ανάλυση συνδεδεμένων συστημάτων με αλγεβρικές μεθόδους:

1. Συστήματα σε σειρά $\Sigma = \Sigma_2 \Sigma_1$:



Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων Σ_1 και Σ_2 , αντίστοιχα. Τότε:

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{G}_2(s)\hat{\mathbf{z}}(s) = \hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) = (\hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s))\hat{\mathbf{u}}(s) := \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s)$$

όπου $\hat{G}(s) := \hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος $\Sigma := \Sigma_2 \Sigma_1$. Αν $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1, 2$, τα αντίστοιχα μοντέλα καταστάσεων χώρου, δηλ.

$$\Sigma_1 : \mathbf{x}'_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u}, \mathbf{z}_1 = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u}$$

και

$$\Sigma_2 : \mathbf{x}'_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{z}, \mathbf{y} = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{z}$$

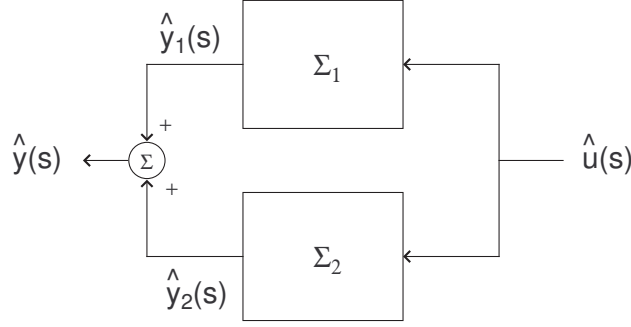
τότε

$$\Sigma_2 : \mathbf{x}'_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2(C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u}), \mathbf{y} = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2(C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u})$$

και το σύστημα Σ έχει πραγματοποίηση:

$$\Sigma = \Sigma_2 \Sigma_1 : \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 \mathbf{u}$$

2. Συστήματα σε παραλληλία $\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$:



Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων Σ_1 και Σ_2 , αντίστοιχα. Τότε:

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{\mathbf{y}}_1(s) + \hat{\mathbf{y}}_2(s) = \hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) + \hat{G}_2(s)\hat{\mathbf{u}}(s) = (\hat{G}_1 + \hat{G}_2)(s)\hat{\mathbf{u}}(s) := \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s)$$

όπου $\hat{G}(s) := \hat{G}_1(s) + \hat{G}_2(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος $\Sigma := \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$. Αν $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1, 2$, τα αντίστοιχα μοντέλα καταστάσεων χώρου, δηλ.

$$\Sigma_1 : \quad \mathbf{x}'_1 = A_1\mathbf{x}_1 + B_1\mathbf{u}, \quad \mathbf{y}_1 = C_1\mathbf{x}_1 + D_1\mathbf{u}$$

και

$$\Sigma_2 : \quad \mathbf{x}'_2 = A_2\mathbf{x}_2 + B_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C_2\mathbf{x}_2 + D_2\mathbf{u}$$

τότε το σύστημα Σ έχει πραγματοποίηση:

$$\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2 : \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + (D_1 + D_2)\mathbf{u}$$

3. Σύνδεση αρνητικής ανάδρασης $\Sigma = (\Sigma_1, -\Sigma_2)$:

Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων Σ_1 και Σ_2 , αντίστοιχα. Τότε:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(s) &= \hat{G}_1(s)(\hat{\mathbf{u}}(s) - \hat{G}_2(s)\hat{\mathbf{y}}(s)) \Rightarrow (I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \\ &\Rightarrow \hat{\mathbf{y}}(s) = (I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}\hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) = \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \end{aligned}$$

όπου $\hat{G}(s) = (I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}\hat{G}_1(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος $\Sigma := (\Sigma_1, -\Sigma_2)$. Υποθέτουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση μεταφοράς $(I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}$ υπάρχει ως ρητή κανονική συνάρτηση, ισοδύναμα ότι $\det(I + \hat{G}_1(\infty)\hat{G}_2(\infty)) \neq 0$ (στην περίπτωση αυτή το σύστημα ανάδρασης (κλειστού βρόγχου) λέγεται καλά τοποθετημένο (well posed).)

Αν $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1, 2$, τα αντίστοιχα μοντέλα καταστάσεων χώρου, δηλ.

$$\Sigma_1 : \quad \mathbf{x}'_1 = A_1\mathbf{x}_1 + B_1\mathbf{e}, \quad \mathbf{y} = C_1\mathbf{x}_1 + D_1\mathbf{e}$$

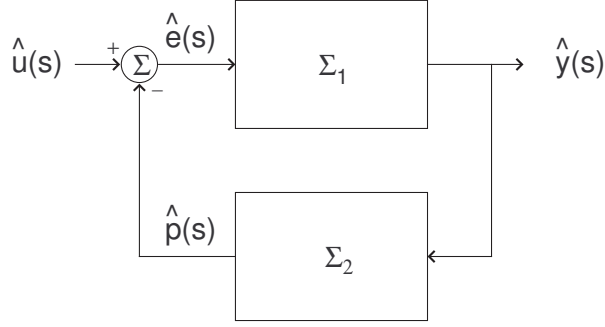
και

$$\Sigma_2 : \quad \mathbf{x}'_2 = A_2\mathbf{x}_2 + B_2\mathbf{y}, \quad \mathbf{p} = C_2\mathbf{x}_2 + D_2\mathbf{y}$$

Ισχύει επίσης: $\mathbf{e}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{p}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να υπολογίσουμε μία πραγματοποίηση του Σ ως εξής:

Εφόσον $\mathbf{e}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{p}(t)$, έχουμε:

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{x}_1 + D_1(\mathbf{u} - \mathbf{p}) = C_1\mathbf{x}_1 + D_1\mathbf{u} - D_1(C_2\mathbf{x}_2 + D_2\mathbf{y}) = C_1\mathbf{x}_1 + D_1\mathbf{u} - D_1C_2\mathbf{x}_2 - D_1D_2\mathbf{y}$$



Ισοδύναμα:

$$(I + D_1 D_2) \mathbf{y} = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u} - D_1 C_2 \mathbf{x}_2$$

και επομένως αν $\det(I + D_1 D_2) \neq 0$,

$$\mathbf{y} = L_1 C_1 \mathbf{x}_1 - L_1 D_1 C_2 \mathbf{x}_2 + L_1 D_1 \mathbf{u} \quad \text{όπου} \quad L_1 := (I + D_1 D_2)^{-1}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{y} = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 (L_1 C_1 \mathbf{x}_1 - L_1 D_1 C_2 \mathbf{x}_2 + L_1 D_1 \mathbf{u}) \\ &= D_2 L_1 C_1 \mathbf{x}_1 + (I - D_2 L_1 D_1) C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 L_1 D_1 \mathbf{u} \end{aligned}$$

Επομένως οι εξισώσεις για το Σ_1 γράφονται:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u} - B_1 \mathbf{p} \\ &= A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u} - B_1 [D_2 L_1 C_1 \mathbf{x}_1 + (I - D_2 L_1 D_1) C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 L_1 D_1 \mathbf{u}] \\ &= (A_1 - B_1 D_2 L_1 C_1) \mathbf{x}_1 - B_1 (I - D_2 L_1 D_1) C_2 \mathbf{x}_2 + B_1 (I - D_2 L_1 D_1) \mathbf{u} \end{aligned}$$

και για το Σ_2 :

$$\mathbf{x}'_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{y} = B_2 L_1 C_1 \mathbf{x}_1 + (A_2 - B_2 L_1 D_1 C_2) \mathbf{x}_2 + B_2 L_1 D_1 \mathbf{u}$$

Σε διανυσματική μορφή:

$$\Sigma = (\Sigma_1, -\Sigma_2) : \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 L_1 C_1 & -B_1 (I - D_2 L_1 D_1) C_2 \\ B_2 L_1 C_1 & A_2 - B_2 L_1 D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 (I - D_2 L_1 D_1) \\ B_2 L_1 D_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

και

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} L_1 C_1 & -L_1 D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + L_1 D_1 \mathbf{u}$$

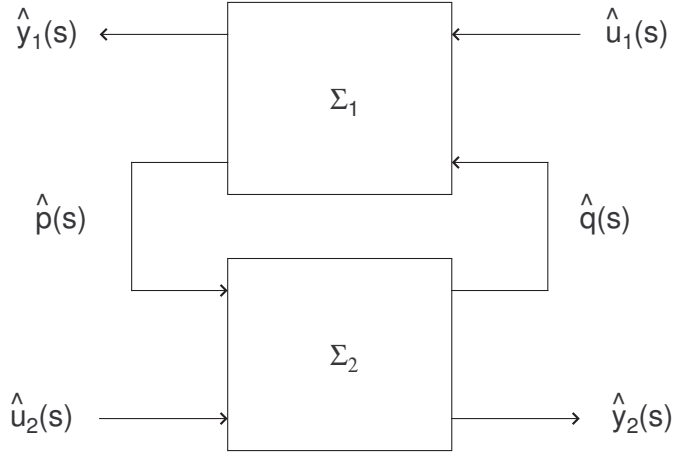
όπου $L_1 := (I + D_1 D_2)^{-1}$.

Άσκηση: Αν τα συστήματα Σ_1 και Σ_2 έχουν συναρτήσεις μεταφοράς $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$, αντίστοιχα, όπου

$$\hat{G}_i(s) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}^{(i)}(s) & \hat{G}_{12}^{(i)}(s) \\ \hat{G}_{21}^{(i)}(s) & \hat{G}_{22}^{(i)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(i)} & D_{12}^{(i)} \\ D_{21}^{(i)} & D_{22}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1^{(i)} & B_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2$, υπολογίστε την συνάρτηση μεταφοράς και μία πραγματοποίηση του συνδεδεμένου συστήματος (για το δεύτερο υποθέστε ότι $D_{ij}^{(k)} = 0$, $(i, j, k \in \{1, 2\})$).

Άσκηση: Έστω $D_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ και $D_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Δείξτε ότι $\det(I_p + D_1 D_2) \neq 0$ αν και μόνο αν $\det(I_m + D_2 D_1) \neq 0$.



Λύση: Από γνωστό Θεώρημα Sylvester $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$. Επομένως $\sigma(I + D_1 D_2) \setminus \{-1\} = \sigma(I + D_2 D_1) \setminus \{-1\}$ και επομένως $0 \in \sigma(I + D_1 D_2) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(I + D_2 D_1)$.

Άσκηση: Έστω $\hat{G}_1(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ και $\hat{G}_2(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ρητές κανονικές συναρτήσεις και έστω ότι $\det(I_p + \hat{G}_1(\infty)\hat{G}_2(\infty)) \neq 0$. Δείξτε ότι $(I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}\hat{G}_1(s) = \hat{G}_1(s)(I + \hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s))^{-1}$.

Λύση: Από την προηγούμενη άσκηση $(I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}\hat{G}_1(s)$ ρητή κανονική συνάρτηση αν και μόνο αν $\hat{G}_1(s)(I + \hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s))^{-1}$ ρητή κανονική συνάρτηση, αν και μόνο αν $\det(I + \hat{G}_1(\infty)\hat{G}_2(\infty)) \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή,

$$(I + \hat{G}_1\hat{G}_2)^{-1}\hat{G}_1 - \hat{G}_1(I + \hat{G}_2\hat{G}_1)^{-1} = (I + \hat{G}_1\hat{G}_2)^{-1}[\hat{G}_1(I + \hat{G}_2\hat{G}_1) - (I + \hat{G}_1\hat{G}_2)\hat{G}_1](I + \hat{G}_2\hat{G}_1)^{-1} = 0$$

Άσκηση: Έστω συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$. Βρείτε μια πραγματοποίηση του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}^T(s)$.

Λύση: $\hat{G}^T(s) = [D + C(sI - A)^{-1}B]^T = D^T + B^T((sI - A)^T)^{-1}C^T = D^T + B^T(sI - A^T)^{-1}C^T$.

3.7 Ισοδύναμα συστήματα

Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$. Θέλουμε να ορίσουμε νέο διάνυσμα κατάστασης $\tilde{\mathbf{x}}$ ώστε η σχέση εισόδου-εξόδου να μείνει αναλλοίωτη.

Ορίζουμε γραμμικό μετασχηματισμό $\mathbf{x} = P\tilde{\mathbf{x}}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(P) \neq 0$. Τότε $\tilde{\mathbf{x}}' = P^{-1}\mathbf{x}'$ και

$$\tilde{\mathbf{x}}' = P^{-1}(A\mathbf{x} + B\mathbf{u}) = P^{-1}AP\tilde{\mathbf{x}} + P^{-1}B\mathbf{u} := \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{B}\mathbf{u}$$

Επίσης

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} = CP\tilde{\mathbf{x}} + D\mathbf{u}$$

Τα συστήματα $\Sigma(A, B, C, D)$ και $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ λέγονται ισοδύναμα και γράφουμε: $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$. Τα παρακάτω χαρακτηριστικά παραμένουν αναλλοίωτα από τον μετασχηματισμό:

- $\sigma(A) = \sigma(P^{-1}AP)$: Το φάσμα πίνακα παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμό ομοιότητας (καθώς και οι αλγεβρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής). Επομένως το ίδιο ισχύει και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\tilde{\phi}(s) = \det(sI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(sI - A) \det(P) = \det(sI - A) = \phi(s)$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς, ως συνάρτηση μεταξύ εισόδου και εξόδου παραμένει αναλλοίωτη:

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D = CP[sI - P^{-1}AP]^{-1} + D \\ &= CPP^{-1}(sI - A)^{-1}PP^{-1} + D \\ &= C(sI - A)^{-1} + D = \hat{G}(s)\end{aligned}$$

- Η ακολουθία Markov, ως συνάρτηση μεταξύ εισόδου και εξόδου παραμένει αναλλοίωτη:

$$\tilde{G}_0 = G_0 = D, \quad \tilde{G}_k = \tilde{C}\tilde{A}^{k-1}\tilde{B} = CP(P^{-1}AP)^{k-1}P^{-1}B = CP(P^{-1}A^{k-1}P)P^{-1}B = CA^{k-1}B,$$

για $k \geq 1$.

Άσκηση: Δείξτε ότι η σχέση $\sim$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) $\Sigma \sim \Sigma$ (ανακλαστική), (β) $\Sigma_1 \sim \Sigma_2 \Leftrightarrow \Sigma_2 \sim \Sigma_1$ (συμμετρική) και (γ) $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ και $\Sigma_2 \sim \Sigma_3 \Rightarrow \Sigma_1 \sim \Sigma_3$ (μεταβατική) και άρα είναι σχέση ισοδυναμίας.

Λύση: Έστω $\Sigma_1(A, B, C, D) \underset{P}{\sim} \Sigma_2(P^{-1}AP, P^{-1}B, CP, D)$. Τότε

$$(\alpha) \quad \Sigma_1 \underset{I}{\sim} \Sigma_1.$$

$$(\beta) \quad \Sigma_1 \underset{P}{\sim} \Sigma_2 \Leftrightarrow \Sigma_2 \underset{P^{-1}}{\sim} \Sigma_1.$$

$$(\gamma) \quad \text{Αν } \Sigma_1 \underset{P_1}{\sim} \Sigma_2 \text{ και } \Sigma_2 \underset{P_2}{\sim} \Sigma_3, \text{ τότε } \Sigma_1 \underset{P_1 P_2}{\sim} \Sigma_3.$$

Άσκηση: Δείξτε με παράδειγμα ότι δύο συστήματα μπορούν να έχουν την ίδια συνάστηση μεταφοράς χωρίς να είναι ισοδύναμα.

Λύση: Παραδείγματος χάριν:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot 1 = \frac{1}{s+1}$$

και επομένως η συνάρτηση μεταφοράς $\frac{1}{s+1}$ έχει πραγματοποιήσεις:

$$\Sigma_1 \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, 0 \right), \quad \Sigma_2(1, -1, 1, 0)$$

που δεν είναι ισοδύναμες (δεν έχουν καν την ίδια διάσταση).

Άσκηση: Έστω συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}(s)$, $\hat{G}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$, $\det D \neq 0$. Δείξτε ότι: $\hat{G}^{-1}(s) = D^{-1} - D^{-1}C(sI - A + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$. Υπόδειξη: Υπολογίστε μία πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{G}^{-1}\hat{G}(s)$ με εφαρμόστε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό ισοδυναμίας.

Λύση: Έστω συστήματα $\Sigma_1(A, B, C, D)$ και $\Sigma_2 = (A - BD^{-1}C, -D^{-1}C, BD^{-1}, D^{-1})$. Έστω $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ και $\hat{Q}(s) = D^{-1} - D^{-1}C(sI - A + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$. Το σύστημα $\Sigma_2\Sigma_1$ έχει πραγματοποίηση (A_s, B_s, C_s, D_s) όπου:

$$A_s = \begin{bmatrix} A & 0 \\ BD^{-1}C & A - BD^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \quad C_s = \begin{bmatrix} D^{-1}C & -D^{-1}C \end{bmatrix} \text{ και } D_s = D^{-1}D = I_p$$

Εξετάζουμε το ισοδύναμο σύστημα $\tilde{\Sigma}_2\tilde{\Sigma}_1 \sim \Sigma_2\Sigma_1$ με πραγματοποίηση $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, I_p)$, $\tilde{A}_s = P^{-1}A_sP$, $\tilde{B}_s = P^{-1}B_s$ και $\tilde{C}_s = C_sP$, όπου

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$\tilde{A}_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ BD^{-1}C & A - BD^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A - BD^{-1}C \end{bmatrix}$$

και

$$\tilde{B}_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_s = \begin{bmatrix} D^{-1}C & -D^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -D^{-1}C \end{bmatrix}$$

Οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι αναλλοίωτες κάτω απο μετασχηματισμούς ισοδυναμίας. Επομένως:

$$Q(s)\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -D^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A + BD^{-1}C)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + I_p = I_p$$

και άρα $Q(s) = \hat{G}^{-1}(s)$.

Άσκηση: Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα $\Sigma(A, B, C, D)$ όπου $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ και έστω ότι υπάρχουν μοναδικές λύσεις $P = P^T \succ 0$ και $Q = Q^T \succ 0$ των αλγεβρικών εξισώσεων Lyapunov

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad \text{και} \quad A^T Q + QA + C^T C = 0$$

αντίστοιχα. (Οι πίνακες P και Q ονομάζονται πίνακας Gramian ελεγχιμότητας και πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας, αντίστοιχα). Έστω το ισοδύναμο σύστημα $\tilde{\Sigma}(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$. Δείξτε ότι στις νέες συντεταγμένες οι πίνακες P και Q μετασχηματίζονται σε $\tilde{P} = T^{-1}PT^{-T} = \tilde{P}^T \succ 0$ και $\tilde{Q} = T^TQT = \tilde{Q}^T \succ 0$ και επομένως το φάσμα του πίνακα PQ είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας. (Ο πίνακας T^{-T} ορίζεται ως $(T^{-1})^T$, ισοδύναμα $(T^T)^{-1}$).

Λύση: Στις νέες συντεταγμένες η πρώτη εξίσωση Lyapunov γράφεται:

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}PT^{-T}) + (T^{-1}PT^{-T})(T^T A^T T^{-T}) + (T^{-1}B)(B^T T^{-T}) = 0$$

και άρα $P \rightarrow T^{-1}PT^{-T}$. Παρόμοια, στις νέες συντεταγμένες η δευτερη εξίσωση γράφεται:

$$(T^T A^T T^{-T})(T^T QT) + (T^T QT)(T^{-1}AT) + (T^T C^T)(CT) = 0$$

και άρα $Q \rightarrow T^TQT$. Άρα $PQ \rightarrow T^{-1}PT^{-T}T^TQT = T^{-1}PQT$ και επομένως το $\sigma(PQ)$ παραμένει αναλλοίωτο,

Άσκηση: Συνάρτηση μεταφοράς $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}(s)$ λέγεται all-pass αν $G^T(-s)G(s) = I_p$. Έστω Q ο πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας (δείτε την προηγούμενη άσκηση) και έστω ότι $QB + C^T D = 0$ και $D^T D = I_p$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $G(s)$ είναι all-pass.

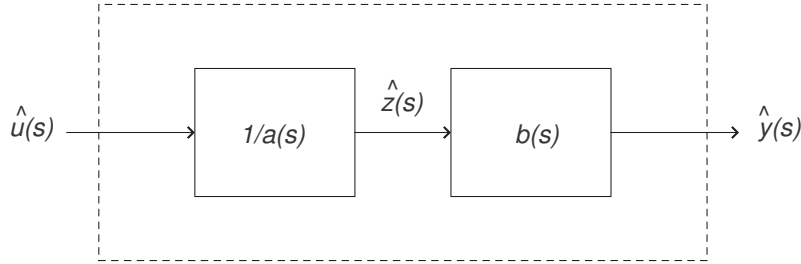
3.8 Πραγματοποίηση Συστημάτων καταστάσεων χώρου: Το πρόβλημα καθορισμού μιας τετράδας πινάκων (A, B, C, D) , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, από δοσμένη ρητή κανονική συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$. Εδώ δεν απαιτούμε η πραγματοποίηση να είναι ελάχιστου βαθμού, δηλαδή η διάσταση n του πίνακα A να είναι η ελάχιστη δυνατή (πρόβλημα ελάχιστης πραγματοποίησης που θα αναλύσουμε αργότερα).

Γνωρίζουμε από την προηγούμενη ενότητα ότι το πρόβλημα δεν έχει μοναδική λήση - αν $\Sigma(A, B, C, D)$ είναι λύση του προβλήματος, τότε κάθε ισοδύναμο σύστημα $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ με $\tilde{A} = P^{-1}AP$, $\tilde{B} = P^{-1}B$, $\tilde{C} = CP$, $\tilde{D} = D$, $\det(P) \neq 0$, είναι επίσης λύση. Αρχίζουμε την ανάλυση από προβλήματα μίας εισόδου και μίας εξόδου ($m = p = 1$).

Έστω $\hat{g}(s) \in \mathbb{R}(s)$, $\hat{g}(s) = \frac{\tilde{b}(s)}{a(s)}$, όπου $\tilde{b}, a \in \mathbb{R}[s]$ με $\partial \tilde{b}(s) \leq \partial a(s)$. Αν έχουμε $\partial \tilde{b}(s) = \partial a(s)$, τότε διαιρώντας τα δύο πολυώνυμα έχουμε $\hat{g}(s) = D + \hat{g}_1(s)$, όπου $D = \hat{g}(\infty) \in \mathbb{R}$ και $\hat{g}_1(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ όπου

$b(s) \in \mathbb{R}[s]$ και $\partial b(s) < \partial a(s) = n$. Θα βρούμε μία πραγματοποίηση $(A, B, C, 0)$ της $\hat{g}_1(s)$ - τότε μία πραγματοποίηση της $\hat{g}(s)$ θα είναι (A, B, C, D) .

Έστω $a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ και $b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0$. (Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $a(s)$ είναι μονικό. Επίσης ο βαθμός ∂b μπορεί να είναι μικρότερος από $n - 1$ αν οι πρώτοι συντελεστές του πολυωνύμου είναι ίσοι με 0). Γράφουμε το $\hat{g}_1(s)$ σαν σειρά δύο συστημάτων όπως δείχνει το διάγραμμα.



Αρχικά εξετάζουμε την συνάρτηση μεταφοράς $\frac{1}{a(s)}$ μεταξύ των $\hat{u}(s)$ και $\hat{z}(s)$. Έχουμε ότι

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)\hat{z}(s) = \hat{u}(s) \Rightarrow z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \dots + a_1z'(t) + a_0z(t) = u(t)$$

αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace και θεωρώντας ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Ορίζουμε μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = z, x_2 = x'_1 = z', \dots, x_{n-1} = x'_{n-2} = z^{(n-2)}, x_n = x'_{n-1} = z^{(n-1)}$$

Τότε

$$x'_n = z^{(n)} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u$$

Διανυσματικά:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

που είναι της μορφής: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + Bu$. Παρατηρούμε:

- Ο πίνακας A είναι σε μορφή Companion. Οι εξισώσεις στις $n - 1$ πρώτες γραμμές του συστήματος $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + Bu$ αντιστοιχούν σε διαδοχική ολοκλήρωση των μεταβλητών κατάστασης $x_i = \int x_{i+1}dt$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ και η εξίσωση στην n -στη γραμμή αντιστοιχεί στην διαφορική εξίσωση που προκύπτει από την σχέση $a(s)\hat{z}(s) = \hat{u}(s)$. Παρατηρούμε επίσης ότι τα στοιχεία στην τελευταία γραμμή του πίνακα A είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου $a(s)$ (εκτός από τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου s^n) με αντεστραμμένη σειρά και αρνητικά πρόσημα. Ο πίνακας B είναι διάνυσμα στήλης (μία είσοδος) και κάθε στοιχείο του είναι 0 εκτός από το τελευταίο (n -στο) που είναι 1.
- Το ζεύγος (A, b) είναι σε κανονική μορφή ελεγχιμότητας. (Θα αναλύσουμε την έννοια αυτή σε άλλη ενότητα)

Συνεχίζουμε με την ανάλυση της (μη κανονικής) συνάρτησης μεταφοράς $b(s)$ μεταξύ της εισόδου $\hat{z}(s)$ και της εξόδου $\hat{y}(s)$ (δείτε το παραπάνω διάγραμμα). Έχουμε:

$$\hat{y}(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0)\hat{z}(s) \Rightarrow y(t) = b_{n-1}z^{(n-1)} + b_{n-2}z^{(n-2)} + \dots + b_1z' + b_0z$$

Από την προηγούμενη επιλογή μεταξλητών κατάστασης η παραπάνω εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$y(t) = b_{n-1}x_n(t) + b_{n-2}x_{n-1}(t) + \dots + b_1x_2(t) + b_0x_1(t)$$

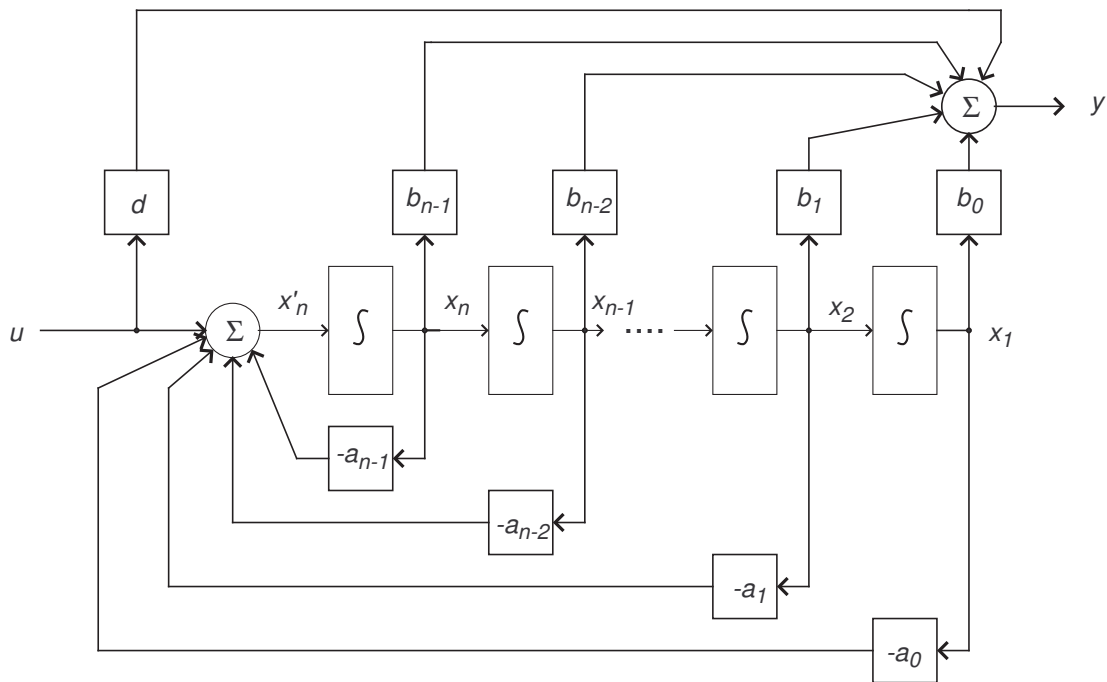
Διανυσματικά,

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [0]u$$

που είναι της μορφής $y = Cx + Du$. Παρατηρούμε ότι αν $\partial b < n - 1$ τα τελευταία στοιχεία του πίνακα C είναι μηδενικά. Συμπερασματικά μία πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{g}(s)$ είναι η τετράδα πινάκων (A, B, C, D) , όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}, D = d$$

Το ισοδύναμο διάγραμμα βαθμίδων της πραγματοποίησης είναι:



Το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι αν τα πολυώνυμα $b(s)$ και $a(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους (δηλ. δεν έχουν κοινή ρίζα), τότε η παραπάνω πραγματοποίηση είναι ελάχιστη, δηλ. η διάσταση του πίνακα A είναι η ελάχιστη δυνατή από όλες της πραγματοποιήσεις της συνάρτησης μεταφοράς.

Θεώρημα: Έστω $\hat{g}(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ρητή και αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς και όπου τα πολυώνυμα

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0$$

είναι πρώτα μεταξύ τους. Τότε η διάσταση κάθε ελάχιστης πραγματοποίησης είναι ίση με n . Επιπλέον, η τετράδα $(A, B, C, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}]$$

είναι ελάχιστη πραγματοποίηση της $\hat{g}(s)$.

Απόδειξη: Η προηγούμενη ανάλυση έχει ήδη δείξει ότι η τετράδα $(A, B, C, 0)$ είναι πραγματοποίηση του $\hat{g}(s)$. Απομένει να δείξουμε ότι είναι ελάχιστη, δηλ ότι δεν υπάρχει πραγματοποίηση με διάσταση μικρότερη του n . Έστω $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, 0)$ μια άλλη πραγματοποίηση του $\hat{g}(s)$ με διάσταση l . Τότε

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \hat{g}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \frac{1}{\det(sI - \tilde{A})} \tilde{C} \text{adj}(sI - \tilde{A}) \tilde{B}$$

και επομένως

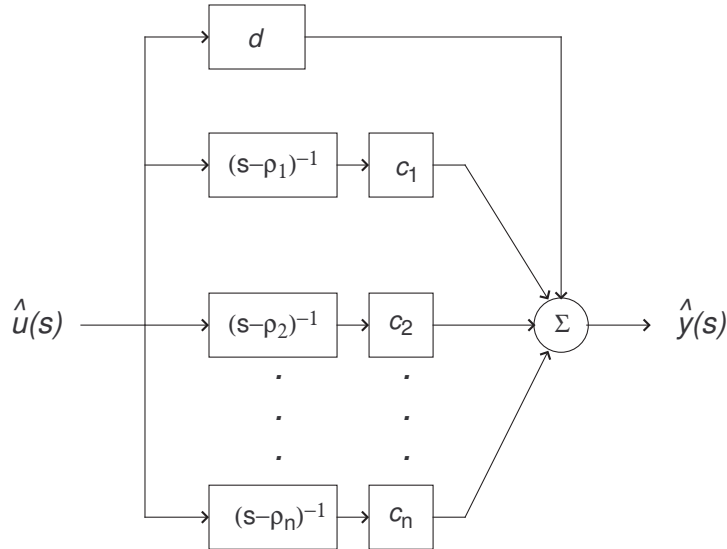
$$\frac{b(s) \det(sI - \tilde{A})}{a(s)} = \tilde{C} \text{adj}(sI - \tilde{A}) \tilde{B}$$

Ο όρος δεξιά είναι πολυώνυμο και εφόσον $(b(s), a(s))$ πρώτα μεταξύ τους, πρέπει να έχουμε ότι $a(s) | \det(sI - \tilde{A})$, δηλαδή το πολυώνυμο $a(s)$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\tilde{A}$ που έχει βαθμό l . Άρα $n \leq l$ και η πραγματοποίηση $(A, B, C, 0)$ είναι ελάχιστη. $\square$

Μία δεύτερη πραγματοποίηση βαθμωτής συνάρτησης μεταφοράς $\hat{g}(s)$ με πραγματικούς διακεκριμένους πόλους είναι η εξής. Έστω

$$\hat{g}(s) = \frac{b(s)}{a(s)} + d, \quad a(s), b(s) \in \mathbb{R}[s], \quad d \in \mathbb{R}, \quad a(s) = (s - \rho_1)(s - \rho_2) \cdots (s - \rho_n), \quad \partial b(s) < n = \partial a(s)$$

όπου $\rho_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ και $\rho_i \neq \rho_j$ αν $i \neq j$.



Αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$\hat{g}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \rho_i}, \quad c_i = \lim_{s \rightarrow \rho_i} \frac{(s - \rho_i)b(s)}{a(s)} = \frac{b(\rho_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (s - \rho_j)}$$

Το $\hat{g}(s)$ γράφεται ως άθροισμα $n + 1$ παράλληλων συστημάτων:

$$\hat{g}_i(s) = \frac{c_i}{s - \rho_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{και} \quad \hat{g}_{n+1}(s) = d$$

Επομένως μία πραγματοποίηση του $\hat{g}(s)$ είναι (A, B, C, D) όπου:

$$A = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n], \quad D = d$$

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι στην γενική περίπτωση η συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\hat{G}(s)$ ρητή και αυστηρά κανονική, έχει πραγματοποίηση $(A, B, C, 0_{p \times m})$. Η απόδειξη του Θεωρήματος ορίζει και μία συγκεκριμένη πραγματοποίηση (η οποία δεν είναι αναγκαστικά ελάχιστη). Θα αναπτύξουμε μεθόδους για την κατασκευή ελάχιστων πραγματοποιήσεων συστημάτων πολλαπλών εισόδων και εξόδων αφού εισάγουμε τις έννοιες της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας σε επόμενη ενότητα.

Θεώρημα: Κάθε ρητή, αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ έχει πραγματοποίηση, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και πίνακες $(A, B, C) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n}$ τέτοιοι ώστε $\hat{G}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$.

Απόδειξη: Έστω $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ ρητή και αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς και έστω $d(s)$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο από όλα τα πολυώνυμα των παρονομαστών των στοιχείων της $\hat{G}(s)$. Χωρίς βλάβη γενικότητας θεωρούμε ότι το $d(s)$ είναι μονικό, δηλαδή είναι της μορφής:

$$d(s) = s^l + d_{n-1}s^{l-1} + \dots + d_1s + d_0$$

Εφόσον η $\hat{G}(s)$ είναι αυστηρά κανονική,

$$d(s)\hat{G}(s) = N_{l-1}s^{l-1} + N_{l-2}s^{l-2} + \dots + N_1s + N_0, \quad N_j \in \mathbb{R}^{p \times m}, \quad j = 0, 1, \dots, l-1$$

Έστω $n = lm$. Ορίζουμε τους πίνακες : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \cdots & I_m \\ -d_0I_m & -d_1I_m & -d_2I_m & \cdots & -d_{l-1}I_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix}, \quad C = [N_0 \quad N_1 \quad \cdots \quad N_{n-1}]$$

και όπου 0_m ο μηδενικός πίνακας διαστάσεων $m \times m$. Θα δείξουμε ότι οι πίνακες (A, B, C) ορίζουν μία πραγματοποίηση της συνάρτησης $\hat{G}(s)$. Ορίζουμε:

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \\ H_{l-1}(s) \\ H_l(s) \end{bmatrix} = (sI_n - A)^{-1}B$$

Τότε $(sI_n - A)H(s) = B$. Ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} sI_m & -I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ 0_m & sI_m & -I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & sI_m & -I_m \\ d_0I_m & d_1I_m & d_2I_m & \cdots & sI_m + d_{l-1}I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \\ H_{l-1}(s) \\ H_l(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$\left. \begin{array}{l} sH_1(s) - H_2(s) = 0 \\ sH_2(s) - H_3(s) = 0 \\ \vdots \\ sH_{l-1}(s) - H_l(s) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow H_{j+1}(s) = sH_j(s), \quad j = 1, 2, \dots, l-1 \quad (*)$$

και

$$sH_l(s) + d_0H_1(s) + d_1H_2(s) + \dots + d_{l-1}H_l(s) = I_m \quad (**)$$

Εφαρμόζοντας την (*) αναδρομικά έχουμε: $H_j(s) = s^{j-1}H_1(s)$, $j = 1, 2, \dots, l$. Επομένως η εξίσωση (**) γράφεται

$$s^l H_1(s) + d_0 H_1(s) + d_1 s H_1(s) + \dots + d_{l-1} s^{l-1} H_1(s) = I_m \Rightarrow (s^l + d_{l-1} s^{l-1} + \dots + d_1 s + d_0) H_1(s) = I_m$$

και επομένως $d(s)H_1(s) = I_m$ και

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \\ H_{l-1}(s) \\ H_l(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ \vdots \\ s^{l-2}I_m \\ s^{l-1}I_m \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \dots & N_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ \vdots \\ H_{l-1}(s) \\ H_l(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \dots & N_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ \vdots \\ s^{l-2}I_m \\ s^{l-1}I_m \end{bmatrix}$$

και συνεπώς $C(sI_n - A)^{-1}B = \frac{1}{d(s)}(N_0 + N_1s + \dots + N_{l-1}s^{l-1}) = \hat{G}(s)$. □

Άσκηση: Βρείτε πραγματοποίηση (διάστασης 2) της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{g}(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$. Δείξτε ότι οι δύο πραγματοποιήσεις είναι ισοδύναμες και βρείτε τον αντίστοιχο πίνακα μετασχηματισμού.

Λύση: Πραγματοποίηση με (A, B) σε κανονική μορφή ελεγχιμότητας $(A, B, C, 0)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Πραγματοποίηση με πίνακα A διαγώνιο, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, 0)$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Για να έχουμε $\Sigma(A, B, C, 0) \sim \Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, 0)$ πρέπει να υπάρχει πίνακας $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det(P) \neq 0$ (ισοδύναμα $\hat{P} = P^{-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$), τέτοιος ώστε: $\tilde{A}\hat{P} = \hat{P}A$, $\tilde{B} = \hat{P}B$ και $\tilde{C}\hat{P} = C$. Έστω

$$\hat{P} = P^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 & \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 & \hat{p}_4 \end{bmatrix}$$

Τότε: $\tilde{B} = \hat{P}B \Rightarrow \hat{p}_2 = \hat{p}_4$. Επίσης: $\tilde{A}\hat{P} = \hat{P}A \Rightarrow \hat{p}_1 = 2$, $\hat{p}_3 = 1$ και οι άλλες δύο εξισώσεις ικανοποιούνται. Επίσης με αυτές τις τιμές οι εξισώσεις $\tilde{C}\hat{P} = C$ ικανοποιούνται. Άρα

$$\hat{P} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

και τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.

Άσκηση: Έστω $\Sigma(A, B, C) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n}$ πραγματοποίηση γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, όπου

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

με $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $A_{33} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $B_3 \in \mathbb{R}^{n_3 \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}$ και $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$. Δείξτε ότι $Ce^{At}B = C_1e^{A_{11}t}B_1$, $k \in \mathbb{N}_0$ και ότι επομένως $\Sigma(A, B, C)$ δεν είναι ελάχιστη πραγματοποίηση.

Λύση: Έχουμε

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^2 & * & 0 \\ 0 & A_{22}^2 & 0 \\ * & * & A_{33}^2 \end{bmatrix}$$

και επαγωγικά,

$$A^k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & * & 0 \\ 0 & A_{22}^k & 0 \\ * & * & A_{33}^k \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$CA^k B = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^k & * & 0 \\ 0 & A_{22}^k & 0 \\ * & * & A_{33}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^k B_1 \\ 0 \\ * \end{bmatrix} = C_1 A_{11}^k B_1$$

και επομένως τα δύο συστήματα έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς. Άρα η πραγματοποίηση $\Sigma(A, B, C)$ δεν είναι ελάχιστη.

Άσκηση: Έστω $\hat{g}(s) = \frac{s+\beta}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ συνάρτηση μεταφοράς γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος όπου $\beta, \zeta, \omega_n \in \mathbb{R}$, $\omega_n > 0$ και $0 \leq \zeta < 1$. Να βρεθεί πραγματοποίηση της $\hat{g}(s)$, $(A, B, C) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 1} \times \mathbb{R}^{1 \times 2}$.

Γ. Χαλικιάς, 10-3-2025