73ο Γραμμικά Συστήματα (ΑΚ, κεφ. 6)

Θεωρούμε τό γραμμικό σύστημα

$$\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t) \qquad (*)$$

όπου $t \in I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ καί $[A(t)]_{ij} = a_{ij}(t) \in C(I)$, $[\underline{b}]_i = b_i(t) \in C(I)$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,n$. Αν $\underline{b}(t) = \underline{0}$ $\forall t \in I$ τό σύστημα είναι ομογενές, διαφορετικά μη-ομογενές. [Συμβολισμός: $\underline{a} \equiv \vec{a}$, $C(I)$: συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται στό διάστημα I]

<u>Ορισμός</u>: Λύση του $(*)$ είναι $C^1(I)$ (συνεχώς διαφορίσιμη) διανυσματική συνάρτηση $\underline{\varphi}(t): I \to \mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε: $\underline{\varphi}' = A(t)\underline{\varphi} + \underline{b}(t)$. Το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) είναι η εύρεση λύσης $\underline{\varphi}(t)$ που επιπλέον ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{y}_0$. ($t_0 \in I$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$)

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ συνεχείς στό $I = (\alpha, \beta)$. Τότε το ΠΑΤ: $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ ($t_0 \in I$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$) έχει μοναδική λύση.

(Το θεώρημα είναι ειδική περίπτωση της γενίκευσης του Θεωρήματος Piccard-Lindelöf σε n διαστάσεις. Θά τό αποδείξουμε αργότερα σέ πιο γενική μορφή. Η ύπαρξη λύσης προκύπτει λόγω συνέχειας των $A(t)$, $\underline{b}(t)$. Θά αποδείξουμε μοναδικότητα - μετά τα προκαταρκτικά).

<u>Προκαταρκτικά</u>: Έστω $A(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε

(1) Ο $A(t)$ λέγεται συνεχής σε διάστημα $I = (\alpha, \beta)$ αν

καί μόνο αν $a_{ij}(t) \in C(I)$, δηλ. κάθε στοιχείο είναι συνεχής συνάρτηση στό I.

(ii) Ο $A(t)$ είναι διαφορίσιμος (ολοκληρώσιμος) στό I αν κάθε στοιχείο του είναι διαφορίσιμο (ολοκληρώσιμο). στο I. Ορίζουμε

$$A'(t) = [a'_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \int_\alpha^\beta A(t)\,dt = \left[\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)\,dt\right].$$

Ισχύει (γιά $\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ διαφορίσιμα στό I):

$$(1) \quad (A(t)\underline{y}(t))' = A'\underline{y} + A\underline{y}'$$
$$(2) \quad (AB)' = A'B + AB'$$

(π.χ γιά τό (1): $(A\underline{y})' = \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\right)'\right] =$

$$= \left[\sum_{j=1}^n a'_{ij}y_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}y'_j\right] = A'\underline{y} + A\underline{y}' \Big).$$

Αν $\underline{y}(t) = [y_1(t), \ldots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|\underline{y}\| = \sqrt{\underline{y}^T\underline{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad \text{(ευκλείδια νόρμα)}$$

καί αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = [a_{ij}]$,

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{trace}(A^TA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

(ευκλείδια ή Frobenius νόρμα του πίνακα A).

(Αργότερα αξιωματικός γενικός ορισμός νόρμας).

<u>Πρόταση:</u> Ισχύουν:

(α) $\|\underline{y}\| \geq 0 \quad \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{y}\| = 0 \iff \underline{y} = \underline{0}$

(β) $\|\underline{y}_1 + \underline{y}_2\| \leq \|\underline{y}_1\| + \|\underline{y}_2\|$, $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ (τριγωνική ανισότητα).

(γ) $\|c\underline{y}\| = |c| \cdot \|\underline{y}\| \quad \forall c \in \mathbb{R}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

(δ) Αν $\underline{y}(t)$ συνεχής στο $I = (\alpha, \beta)$:

$$\left\| \int_\alpha^\beta \underline{y}(s)\, ds \right\| \leq \int_\alpha^\beta \|\underline{y}(s)\|\, ds.$$

(ε) Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\|A\underline{y}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{y}\|$.

<u>Απόδειξη:</u>

(α) Προφανής.

(β) Προκύπτει από την ανισότητα Hölder: ($|\underline{x}^T\underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$). Έχουμε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \|\underline{x} - \lambda \underline{y}\|^2 = (\underline{x}^T - \lambda \underline{y}^T)(\underline{x} - \lambda \underline{y}) =$$

$$= \|\underline{x}\|^2 - 2\lambda \underline{x}^T\underline{y} + \lambda^2 \|\underline{y}\|^2$$

Ο όρος δεξιά ελαχιστοποιείται όταν

$$\frac{d}{d\lambda}(\cdot) = 0 \Rightarrow -2\underline{x}^T\underline{y} + 2\lambda \|\underline{y}\|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda := \lambda^* = \frac{\underline{x}^T\underline{y}}{\|\underline{y}\|^2}$$

Αρα:

$$0 \leq \|\underline{x}\|^2 - 2\frac{(\underline{x}^T\underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^2} + \frac{(\underline{x}^T\underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^2} = \|\underline{x}\|^2 - \frac{(\underline{x}^T\underline{y})^2}{\|\underline{y}\|^2}$$

$$\Rightarrow (\underline{x}^T\underline{y})^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{y}\|^2 \Rightarrow |\underline{x}^T\underline{y}| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

(Σημ.1: Υποθέσαμε $\underline{y} \neq \underline{0}$, αν $\underline{y} = \underline{0}$ η απόδειξη είναι προφανής. Σημ.2: Η ανισότητα ισχύει και γιά γενικά $\|\cdot\|_p$ νορμες).

Επομένως (τριγωνική ανισότητα):

$$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 = (\underline{x}^T+\underline{y}^T)(\underline{x}+\underline{y}) = \|\underline{x}\|^2 + 2\underline{x}^T\underline{y} + \|\underline{y}\|^2$$

$$\leq \|\underline{x}\|^2 + 2|\underline{x}^T\underline{y}| + \|\underline{y}\|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2$$

$$= (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2 \Rightarrow \|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|.$$

(γ) Προφανής

(δ) Έστω $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \int_\alpha^\beta \underline{y}(s)\,ds = \int_\alpha^\beta \begin{pmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_n(s) \end{pmatrix} ds$

δηλ. $v_j = \int_\alpha^\beta y_j(s)\,ds$. Τότε

$$\|\underline{v}\|^2 = \sum_{j=1}^n v_j^2 = \sum_{j=1}^n v_j \int_\alpha^\beta y_j(s)\,ds =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^n v_j y_j(s)\,ds = \int_\alpha^\beta \underline{v}^T \underline{y}\,ds.$$

$$\leq \int_\alpha^\beta \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{y}(s)\|\,ds = \|\underline{v}\| \int_\alpha^\beta \|\underline{y}(s)\|\,ds$$

$$\Rightarrow \|\underline{v}\| = \left\|\int_\alpha^\beta \underline{y}(s)\,ds\right\| \leq \int_\alpha^\beta \|\underline{y}(s)\|\,ds.$$

(ε) $\|A\underline{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}\, y_j)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\underline{a}_i^T\, \underline{y})^2$

(όπου $\underline{a}_i^T$ η i-γραμμή του πίνακα A). Άρα,

$$\|A\underline{y}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|\underline{a}_i^T\|^2 \cdot \|\underline{y}\|^2 = \|\underline{y}\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|\underline{a}_i\|$$

$$= \|\underline{y}\|^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \|\underline{y}\|^2 \|A\|^2$$

$$\Rightarrow \|A\underline{y}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{y}\|$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $A(t)$, $\underline{b}(t)$ συνεχείς (πινακο)συναρτήσεις στο $I = (\alpha, \beta)$, με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Τότε το ΠΑΤ : $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ ($t_0 \in I$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$) έχει μοναδική λύση.

<u>Απόδειξη:</u> Θα αποδείξουμε μόνο την μοναδικότητα της λύσης. Έστω $\underline{\varphi}_1(t)$, $\underline{\varphi}_2(t)$ δύο λύσεις, δηλαδή ισοδύναμα:

$$\underline{\varphi}_1(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(A(s)\,\underline{\varphi}_1(s) + \underline{b}(s)\right) ds$$

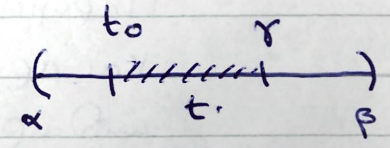
$$\underline{\varphi}_2(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(A(s)\,\underline{\varphi}_2(s) + \underline{b}(s)\right) ds$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\left(\underline{\varphi}_1(s) - \underline{\varphi}_2(s)\right) ds$$

$$\Rightarrow \|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\left(\underline{\varphi}_1(s) - \underline{\varphi}_2(s)\right) ds \right\|.$$

Έστω $\gamma \in I$, $t_0 \leq \gamma < \beta$, $t \in [t_0, \gamma]$



Η συνάρτηση $\|A(s)\|$ είναι συνεχής στο συμπαγές διάστημα $[t_0, \gamma]$ και επομένως

$$M := \max_{s\in[t_0,\gamma]} \|A(s)\|$$

είναι καλά ορισμένο. Άρα (με τον παραπάνω περιορισμό της μεταβλητής t)

$$\underbrace{\|\underline{\varphi}_1(t)-\underline{\varphi}_2(t)\|}_{:=u'(t)} \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)(\underline{\varphi}_1(s)-\underline{\varphi}_2(s))\| \, ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \cdot \|\underline{\varphi}_1(s)-\underline{\varphi}_2(s)\| \, ds$$

$$\leq M \underbrace{\int_{t_0}^{t} \|\underline{\varphi}_1(s)-\underline{\varphi}_2(s)\| \, ds}_{:=u(t)}.$$

Έστω $u(t) = \int_{t_0}^{t} \|\underline{\varphi}_1(s)-\underline{\varphi}_2(s)\| ds \Rightarrow u'(t) = \|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|$
και

$$u'(t) \leq M\, u(t), \quad t\in[t_0,\gamma].$$

$$\Rightarrow e^{-Mt}u'(t) - M e^{-Mt} u(t) \leq 0, \quad t\in[t_0,\gamma]$$

$$\Rightarrow \left(e^{-Mt}u(t)\right)' \leq 0, \quad t\in[t_0,\gamma].$$

Άρα: $e^{-Mt}u(t)$ φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[t_0,\gamma]$ και άρα $e^{-Mt}u(t) \leq e^{-Mt_0}\underbrace{u(t_0)}_{0} = 0 \quad \forall t\in[t_0,\gamma]$
$\Rightarrow u(t)\leq 0 \quad \forall t\in[t_0,\gamma]$.
Όμως εξ' ορισμού $u(t)\geq 0$. Και άρα $u(t)=0 \quad \forall t\in[t_0,\gamma]$
$\Rightarrow \|\varphi_1(s)-\underline{\varphi}_2(s)\| = 0 \quad \forall s\in[t_0,\gamma] \Rightarrow \underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t) \quad \forall t\in[t_0,\gamma]$.
Παρόμοια για ~~στο~~ διάστημα $[\delta, t_0]$, $\alpha<\delta\leq t_0$.
Και άρα $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t) \quad \forall t\in[\delta,\gamma]$. Εφόσον δ και γ αυθαίρετα έχουμε ότι $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t) \quad \forall t\in(\alpha,\beta)$. $\square$

Έστω $\mathcal{L}_0$ τό σύνολο λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος: $\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t)$. Τότε ισχύει τό παρακάτω Θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u>: Το σύνολο λύσεων $\mathcal{L}_0$ είναι διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$) διάστασης n.

<u>Απόδειξη</u>: Λόγω γραμμικότητας αν $\underline{\varphi}_1(t)$ και $\underline{\varphi}_2(t)$ είναι λύσεις, τότε $c_1\underline{\varphi}_1(t) + c_2\underline{\varphi}_2(t)$ είναι επίσης λύση για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Άρα $\mathcal{L}_0$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Η ιδιότητα $\dim(\mathcal{L}_0) = n$ προκύπτει από την μοναδικότητα λύσης του αντίστοιχου ΠΑΤ. (δείτε [AK]).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\mathcal{B} = \{\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n\}$ βάση του $\mathcal{L}_0$. Λέμε ότι $\mathcal{B}$ είναι ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων και ότι $\Phi(t) = [\underline{\varphi}_1(t) \cdots \underline{\varphi}_n(t)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων. Έχουμε:

$$\Phi'(t) = [\underline{\varphi}_1'(t)\ \underline{\varphi}_2'(t) \cdots \underline{\varphi}_n'(t)] = [A\underline{\varphi}_1(t) \cdots A\underline{\varphi}_n(t)]$$

$$= A[\underline{\varphi}_1(t) \cdots \varphi_n(t)] = A\,\Phi(t)$$

Αντίστροφα, αν $\Phi'(t) = A\,\Phi(t)$ οι στήλες του $\Phi(t)$ είναι λύσεις του συστήματος $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$.

Παρατηρούμε ότι αν $\Phi(t)$ είναι θ.π.λ., τότε

$$\mathcal{L}_0 = \{\ \Phi(t)\,\underline{c}\ :\ \underline{c} \in \mathbb{R}^n \}.$$

~~Ποιά είναι η λύση $\underline{\varphi}(t) \in \mathcal{L}_0$ που επιπλέον ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{y}_0$ (δηλαδή λύνει τό ΠΑΤ: $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$);~~

~~Πρέπει νά ισχύει: $\Phi(t)$ ς~~

<u>Ορισμός</u>: Εστω $\{\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots \underline{\varphi}_n\}$ λύσεις του συστήματος $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$. Τότε η ορίζουσα

$$W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2 \cdots \underline{\varphi}_n](t) = \det[\underline{\varphi}_1(t) \cdots \underline{\varphi}_n(t)]$$

ονομάζεται ορίζουσα Wronski των $\{\underline{\varphi}_1, \dots \underline{\varphi}_n\}$.

<u>Θεώρημα</u>: Οι λύσεις $\{\underline{\varphi}_1, \dots \underline{\varphi}_n\}$ αποτελούν θ.σ.λ. (καί ο αντίστοιχος πίνακας $\Phi = [\underline{\varphi}_1 \cdots \underline{\varphi}_n]$ θ.π.λ) αν καί μόνο αν $W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2 \cdots \underline{\varphi}_n](t) \neq 0$ γιά κάθε $t \in I$.

<u>Θεώρημα</u> (Liouville): Εστω $\{\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_n(t)\}$ λύσεις της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ καί $t_0 \in I$. Τότε, γιά κάθε $t \in I$,

$$W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \cdots \underline{\varphi}_n](t) = W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2 \cdots \underline{\varphi}_n](t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{trace}(A(s))\right)$$

<u>Απόδειξη</u>: (γιά $n=2$, η γενική περίπτωση παρόμοια)

Εστω $\underline{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $\underline{\varphi}_2(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$

Τότε:

$$W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2] = \det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

Καί

$$W'[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2] = \det \begin{bmatrix} x_1' & z_1' \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2' & z_2' \end{bmatrix}$$

Ομως $\underline{\varphi}_1' = A(t)\underline{\varphi}_1$ καί $\underline{\varphi}_2' = A(t)\underline{\varphi}_2$. Αν $A = [a_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2}$

Άρα,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{ll} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & z_1' = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 & z_2' = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \end{array} \right\}.$$

Η πρώτη ορίζουσα:

$$\det \begin{bmatrix} x_1' & z_1' \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_{11} x_1 & a_{11} z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\det \begin{bmatrix} a_{12} x_2 & a_{12} z_2 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}}_{0}$$

$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} = a_{11}(t)\, W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2](t)$$

Παρόμοια: $\det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2' & z_2' \end{bmatrix} = a_{22}(t)\, W[\varphi_1, \varphi_2](t)$

Συνεπώς:

$$W'(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t))\, W(t) = (\operatorname{trace} A(t))\, W(t).$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dW}{W} = \int_{t_0}^{t} \operatorname{trace}[A(s)]\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \operatorname{trace}[A(s)]\, ds \right\}$$

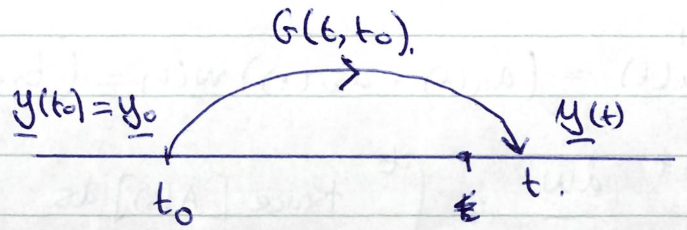
<u>Θεώρημα</u>: Οι λύσεις $\{\underline{\varphi_1}(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ αποτελούν θ.σ.λ. του $\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}$ αν και μόνο αν $W[\underline{\varphi_1}, \dots \underline{\varphi_n}](t_0) \neq 0$ γιά κάποιο $t_0 \in I$.

<u>Απόδειξη</u>: Εφόσον $\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{trace}\,(A(s))\,ds\right) > 0$ η ορίζουσα Wronski $W(t)$ είναι ομόσημη γιά κάθε $t \in I$. Αρα $\{\underline{\varphi_1}, \dots \underline{\varphi_n}\}$ είναι θ.σ.λ αν και μόνο αν $W[\underline{\varphi_1}, \dots \underline{\varphi_n}](t_0) \neq 0$ γιά κάποιο $t_0 \in I$.

<u>Θεώρημα</u>: Εστω $\underline{\Phi}(t) = [\underline{\varphi_1}(t), \dots, \underline{\varphi_n}(t)]$ θ.π.λ. του συστήματος $\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}$. Τότε η λύση του αντίστοιχου ΠΑΤ: $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y_0}$ ($t_0 \in I$, $\underline{y_0} \in \mathbb{R}^n$) είναι $\underline{\varphi}(t) = \underline{\Phi}(t)\,\underline{\Phi}^{-1}(t_0)\,\underline{y_0}$.

<u>Απόδειξη</u>: Κάθε λύση $\underline{\varphi}(t)$ ε λο της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ είναι της μορφής $\underline{\varphi}(t) = \underline{\Phi}(t)\underline{c}$ γιά κάποιο $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$. Η λύση ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{y_0}$, άρα $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{y_0} = \underline{\Phi}(t_0)\underline{c} \Rightarrow \underline{c} = \underline{\Phi}^{-1}(t_0)\,\underline{y_0}$ και επομένως η λύση του ΠΑΤ είναι $\underline{\varphi}(t) = \underline{\Phi}(t)\,\underline{\Phi}^{-1}(t_0)\,\underline{y_0}$

<u>Ορισμός</u>: Ο πίνακας $G(t, t_0) := \underline{\Phi}(t)\,\underline{\Phi}^{-1}(t_0)$ ονομάζεται πίνακας μεταφοράς κατάστασης γιά το σύστημα $\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t)$.



$$\underline{y}(t) = G(t, t_0)\,\underline{y}(t_0).$$

Θεώρημα: Αν $\Phi(t)$ είναι θ.π.λ. της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ και $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(C) \neq 0$, τότε $\Phi(t)C$ είναι επίσης θ.π.λ. Επιπλέον, αν $\Phi_1(t)$ είναι επίσης θ.π.λ. γιά τήν ίδια εξίσωση, τότε υπάρχει $C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(C_1) \neq 0$: $\Phi_1(t) = \Phi(t) C_1$.

Απόδειξη: Θά δείξουμε πρώτα ότι $\Phi(t)C$ είναι θ.π.λ.
Έχουμε:

(α) $(\Phi(t)C)' = \Phi'(t)C = A(t)\Phi(t)C = A(t)(\Phi(t)C)$
καί αρα $\Phi(t)C$ είναι πίνακας λύσεων.

(β) $\det[\Phi(t)C] = \det[\Phi(t)]\cdot\det(C) \neq 0$ (αφού $\det(C) \neq 0$ καί $\Phi(t)$ θ.π.λ). Αρα $\Phi(t)C$ είναι επίσης θ.π.λ.

Εστω ότι $\Phi_1(t)$ είναι επίσης θ.π.λ. Ορίζουμε: $Y(t) = \Phi^{-1}\Phi_1$
Ο πίνακας $\Phi^{-1}(t)$ είναι καλά ορισμένος γιά κάθε $t \in I$.
Επομένως:

$$\Phi(t)\, Y(t) = \Phi_1(t) \Rightarrow \Phi' Y + \Phi Y' = \Phi_1'$$

$$\Rightarrow \cancel{A(t)\Phi(t)Y(t)} + \Phi(t)Y'(t) = A(t)\Phi_1(t) = \cancel{A(t)\Phi(t)Y(t)}$$

$$\Rightarrow \Phi(t)Y'(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow Y'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow Y(t) = C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ (σταθερός πίνακας).}$$

Επίσης: $\det(C) = \det[\Phi^{-1}(t)]\cdot\det[\Phi(t)] \neq 0$.

Πρόταση: Εστω $G(t,t_0)$ πίνακας μεταφοράς συστήματος $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$. Τοτε:

(α) Ο $G(t,t_0)$ είναι ανεξάρτητος από τόν θ.π.λ $\Phi(t)$ ο οποίος τον ορίζει.

(β) $\forall t, t_0 \in I : \frac{\partial}{\partial t} G(t,t_0) = A(t)\, G(t,t_0)$.

(γ) $G(t,t) = I_n \quad \forall t \in I$

(δ) $G^{-1}(t,t_0) = G(t_0,t) \quad \forall t, t_0 \in I.$

(ε) $G(t_2,t_0) = G(t_2,t_1)\, G(t_1,t_0) \quad \forall t_0, t_1, t_2 \in I$

Απόδειξη.

(α) Ο $G(t,t_0)$ ορίστηκε ως $G(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$, όπου $\Phi(t)$ ένας θ.π.λ. Αν $\Phi_1(t)$ είναι άλλος θ.π.λ. τότε $\Phi_1(t) = \Phi(t)C$ γιά κάποιον $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(C) \neq 0$. Επομένως

$$G_1(t,t_0) = \Phi_1(t)\Phi_1^{-1}(t_0) = [\Phi(t)C][\Phi(t_0)C]^{-1}$$

$$= \Phi(t)CC^{-1}\Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) =$$

$$= G(t,t_0)$$

(β). $\frac{\partial}{\partial t}[G(t,t_0)] = \frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)] = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)$

$$= A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = A(t)G(t,t_0) \quad \forall t, t_0 \in I.$$

(γ) $G(t,t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I_n \quad \forall t \in I.$

(δ) $G^{-1}(t,t_0) = [\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)]^{-1} = \Phi(t_0)\Phi^{-1}(t)$

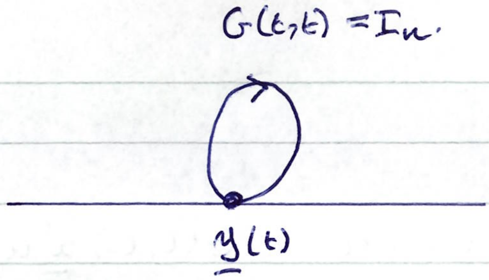
$$= G(t_0,t). \quad \forall t, t_0 \in I.$$

(ε). Γιά κάθε $t_0, t_1, t_2 \in I$:

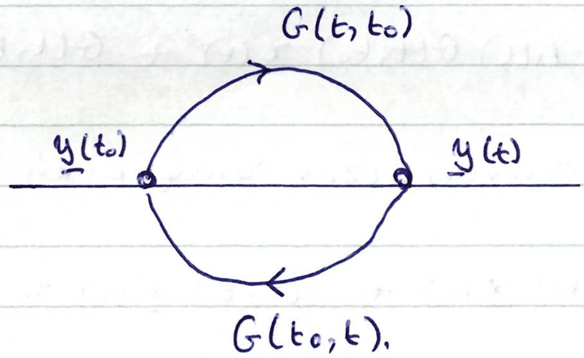
$$G(t_2,t_0) = \Phi(t_2)\Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t_2)\Phi^{-1}(t_1)\Phi(t_1)\Phi^{-1}(t_0)$$

$$= G(t_2,t_1)\cdot G(t_1,t_0) \qquad \square$$

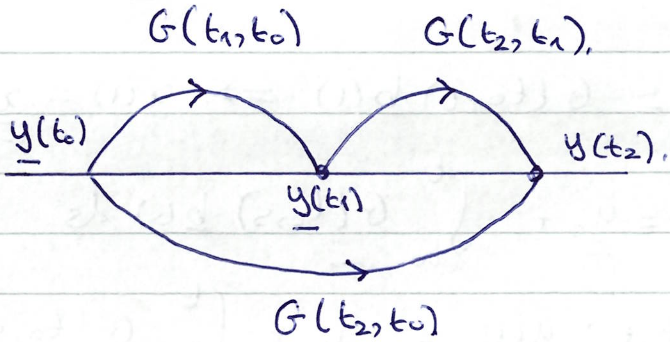
(γ)



(δ)



(ε).



Ο τύπος μεταβολής παραμέτρων.

Τό αντίστοιχο Π.Α.Τ της μή ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t) \quad , t\in I, \ \underline{y}(t_0)=\underline{y}_0$$

Αν $\underline{b}(t)=0 \ \forall t\in I$ η λύση είναι $\underline{y}(t)=G(t,t_0)\,\underline{y}_0$. Στήν μή ομογενή περίπτωση εξετάζουμε λύσεις της μορφής:

$$\underline{y}(t) = G(t,t_0)\,\underline{x}(t)$$

Γιά $t=t_0$ έχουμε: $\underline{y}(t_0) = \underbrace{G(t_0,t_0)}_{I_n}\,\underline{x}(t_0) \Rightarrow \underline{x}(t_0)=\underline{y}_0$

Επίσης:

$$\underline{y}'(t) = G'(t,t_0)\,\underline{x}(t) + G(t,t_0)\,\underline{x}'(t)$$

$$= A(t)\,G(t,t_0)\,\underline{x}(t) + G(t,t_0)\,\underline{x}'(t).$$

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση:

$$A(t)\,\cancel{G(t,t_0)}\,\underline{x}(t) + G(t,t_0)\,\underline{x}'(t) = A(t)\,\cancel{G(t,t_0)}\,\underline{x}(t) + \underline{b}(t)$$

$$\Rightarrow G(t,t_0)\,\underline{x}'(t) = \underline{b}(t) \Rightarrow \underline{x}'(t) = G^{-1}(t,t_0)\,\underline{b}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{x}'(t) = G(t_0,t)\,\underline{b}(t) \Rightarrow \underline{x}(t) = \underbrace{\underline{x}(t_0)}_{\underline{y}_0} + \int_{t_0}^{t} G(t_0,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t_0,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow G^{-1}(t,t_0)\,\underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t_0,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = G(t,t_0)\,\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{G(t,t_0)\,G(t_0,s)}_{G(t,s)}\,\underline{b}(s)\,ds.$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = G(t,t_0)\,\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds.$$

που είναι η (μοναδική) λύση του μη ομογενούς ΠΑΤ. □

Παρατηρούμε ότι $\underline{y}(t) = \underline{y}_h(t) + \underline{y}_p(t)$ όπου

$$\underline{y}_h(t) = G(t,t_0)\,\underline{y}_0 \quad , \quad \underline{y}_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

Η $\underline{y}_h(t)$ είναι η λύση του ΠΑΤ που αντιστοιχεί στο ομογενές σύστημα με αρχική συνθήκη $\underline{y}_0$ και η $\underline{y}_p(t)$ είναι μία ειδική (αυθαίρετη) λύση

του μή ομογενούς συστήματος (particular integral).
Πράγματι (εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibnitz):

$$y_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds =$$

$$= \underbrace{G(t,t)}_{I_n}\,\underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}\left(G(t,s)\,\underline{b}(s)\right) ds$$

$$= \underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$= \underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\,G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds.$$

$$= \underline{b}(t) + A(t)\int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$= A(t)\,\underline{y}_p(t) + \underline{b}(t)$$

και άρα $y_p(t)$ είναι ειδική λύση του (μή-ομογενούς) συστήματος.

Η εκθετική συνάρτηση e^{At}

Εξειδικεύουμε τήν λύση του ομογενούς συστήματος στην περίπτωση που ο A είναι σταθερός πίνακας, δηλ:

$$\underline{y}'(t) = A\,y(t) + \underline{b}(t)\,, \quad t\in I,\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Στην βαθμωτή περίπτωση $(A = a \in \mathbb{R})$ η λύση του αντίστοιχου Π.Α.Τ. $(y' = ay + b(t)\},\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R})$ είναι:

$$y(t) = e^{a(t-t_0)}\,y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)}\,b(s)\,ds.$$

Στην περίπτωση $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ η λύση γενικεύεται ως εξής:

$$\underline{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\,\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\,\underline{b}(s)\,ds$$

οπου ο εκθετικός πίνακας e^{At} ορίζεται στην συνέχεια:

<u>Ορισμός:</u> Έστω $\Phi(t)$ θεμελιώδης πίνακας λύσεων της εξίσωσης $\underline{y}' = A\underline{y}$ (οπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ σταθερός)
Ορίζουμε τον πίνακα:

$$e^{At} := \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0) := G(t,0)$$

οπου $G(t,0)$ ο αντίστοιχος πίνακας μεταφοράς. Από τις γνωστές ιδιότητες θ.π.λ (καί πινάκων μεταφοράς) γνωρίζουμε οτι:

- Ο e^{At} είναι ανεξάρτητος από τον $\Phi(t)$ ο οποίος τον ορίζει.
- Ο e^{At} ικανοποιεί τις εξισώσεις: (i) $(e^{At})' = Ae^{At}$ καί (ii) $e^{A0} = I_n$.

<u>Λήμμα:</u> Ο πίνακας e^{At} έχει τις εξής (επιπλέον) ιδιότητες:

(α) $e^{A(t+s)} = e^{At}\cdot e^{As}$
(β) $(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$
(γ) $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$
(δ) $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$. Κάθε στοιχείο της σειράς συγκλίνει απόλυτα καί ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $(-a,a) \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

(α) Θέτουμε $X(t) = e^{A(t+s)}$, $Y(t) = e^{At}e^{As}$ με το s σταθεροποιημένο. Ισχύει:

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{d(t+s)}e^{A(t+s)} = Ae^{A(t+s)} = AX(t)$$

$$X(0) = e^{As}$$

Επίσης: $\frac{d}{dt}Y(t) = (e^{At})' e^{As} = Ae^{At}e^{As} = AY(t)$

$$Y(0) = e^{As}$$

Από το μονοσήμαντο λύσης ΠΑΤ ισχύει ότι $X(t) = Y(t)$

(β) Επιλέγουμε $s = -t$ στο (α), οπότε:

$$I_n = e^{At}\cdot e^{A(-t)} \Rightarrow (e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$$

(γ) Η πρώτη ισότητα ισχύει από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης ως ειδικής περίπτωσης δ.π.λ. γιά A σταθερό πίνακα. Η δεύτερη προκύπτει από τον υπολογισμό:

$$\frac{d}{dt}(Ae^{At}) = A\frac{d}{dt}(e^{At}) = A(Ae^{At}),$$

$$\frac{d}{dt}(e^{At}A) = \frac{d}{dt}(e^{At})A = (Ae^{At})A = A(e^{At}A)$$

Επίσης $Ae^{At}\big|_{t=0} = e^{At}A\big|_{t=0} = A$. Κατά συνέπεια οι πίνακες Ae^{At} καί $e^{At}A$ είναι λύσεις του ΠΑΤ: $B'(t) = AB(t)$, $B(0) = A$ καί επομένως ταυτίζονται λόγω μονοσήμαντου.

(δ) [ΑΚ, κεφ 6].

Υπολογισμός εκθετικής συνάρτησης

Προκαταρκτικά: Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα πίνακα

Ορισμός: Εστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τό ζεύγος $(\lambda, \underline{u})$ οπου $\lambda \in \mathbb{C}$ $\underline{u} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{u} \neq \underline{0}$, είναι ζεύγος ιδιοτιμής - ιδιοδιανύσματος του πίνακα A αν καί μόνο αν $A\underline{u} = \lambda \underline{u}$ (ισοδύναμα $(\lambda I - A)\underline{u} = 0$).

Τό σύστημα $(\lambda I - A)\underline{u} = \underline{0}$ εχει μή μηδενική λύση ως προς $\underline{u}$ αν καί μόνο αν $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Ορισμός: Το πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Η εξίσωση $\varphi(\lambda) = 0$ λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του A. Τό σύνολο ιδιοτιμών $\sigma(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda_i) = 0\}$ είναι τό φάσμα του A.

Ορισμός: Αν $\lambda_i \in \sigma(A)$, τότε ο χώρος $\mathcal{N}(\lambda_i) =$ $= \{\underline{u} \in \mathbb{C}^n : (\lambda_i I - A)\underline{u} = 0\}$ ορίζεται ως ο ιδιόχωρος του A πού αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Ο μέγιστος αριθμός d_i των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων πού αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i (ισοδύναμα $d_i = \dim \mathcal{N}(\lambda_i)$) ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

Ορισμός: Η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i ως ρίζας του $\varphi(\lambda)$ ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i. Εστω:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1} (\lambda - \lambda_2)^{\tau_2} \cdots (\lambda - \lambda_e)^{\tau_e}$$

οπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, e)$. Ο ακέραιος τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i καί $d_i = \dim \mathcal{N}(\lambda_i) (:= n - r_i)$ η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_i

Ισχύει: $1 \leq d_i \leq \tau_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, \rho$

Αν $d_i = \tau_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, \rho$ ο πίνακας A είναι "απλής δομής". Διαφορετικά ($d_i < \tau_i$ γιά ένα τουλάχιστον i) ο A είναι "μη απλής δομής". Αν $d_i < \tau_i$ η βάση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, $\mathcal{N}(\lambda_i)$, συμπληρώνεται μέ $\tau_i - d_i$ "γενικευμένα ιδιοδιανύσματα".

Εκθετική συνάρτηση γιά πίνακες απλής δομής.

Αν ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι απλής δομής μέ ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2 .. \lambda_n\}$ (όχι απαραίτητα διακεκριμένες) τότε μπορούμε να ορίσουμε n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\{\underline{u_1}, \underline{u_2} \ldots, \underline{u_n}\}$. Επομένως:

$$AP = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n) \quad , \quad P = [\underline{u_1}, \underline{u_2}, \ldots \underline{u_n}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

με $\det(P) \neq 0$. Άρα $AP = P\Lambda$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$. Ισοδύναμα. $P^{-1}AP = \Lambda$, δηλαδή ο A διαγωνιοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας.

Εστω ομογενές σύστημα $\underline{y}' = A\underline{y}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ απλής δομής. Ορίζουμε μετασχηματισμό $\underline{y}(t) = P\underline{x}(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{x}(t) = P^{-1}y(t)$. Τότε

$$\underline{x}'(t) = P^{-1}\underline{y}'(t) = P^{-1}A\,\underline{y}(t) = P^{-1}AP\,\underline{x}(t) = \Lambda\,\underline{x}(t)$$

$$\Rightarrow x_i' = \lambda_i x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = [c_1 e^{\lambda_1 t} \ldots c_n e^{\lambda_n t}]^T = e^{\Lambda t}\underline{c} \ , \ \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Επομένως :

$$\underline{y}(t) = [\,\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n\,] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \underline{u}_i$$

Παρατηρούμε ότι αν ο A είναι απλής δομής, τότε

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^2 = P\Lambda P^{-1} \cdot P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}$$

και γενικά: $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Επομένως:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda^k t^k\right) P^{-1}$$

$$= P \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} P^{-1}$$

$$= P e^{\Lambda t} P^{-1}$$

Επομένως η λύση του ΠΑΤ : $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$ είναι :

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}_0 = P e^{\Lambda t} P^{-1} \underline{y}_0$$

και η γενική λύση του συστήματος $\underline{y}' = A\underline{y}$:

$$\underline{y}(t) = P e^{\Lambda t} \underbrace{P^{-1} \underline{y}_0}_{\underline{c}} = P e^{\Lambda t} \underline{c}, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n$$

(αν $\underline{y}_0$ αυθαίρετο, τότε $\underline{c} = P^{-1}\underline{y}_0$ επίσης αυθαίρετο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$).

Η ~~γενική~~ λύση του ΠΑΤ που αντιστοιχεί στο μή-ομογενές σύστημα $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}(t)$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$, είναι:

$$\underline{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\,\underline{b}(s)\,ds.$$

Μιγαδικές ρίζες

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει πραγματικούς συντελεστές και οι μιγαδικές ρίζες (αν υπάρχουν) είναι συζυγείς. (με την ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα). Έστω ζεύγος ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος $(\lambda, \underline{u})$ όπου $\lambda = \sigma + i\omega$ $(\sigma, \omega \in \mathbb{R},\ \omega \neq 0)$ και $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{y}$ $(\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n)$. Τότε:

$$A\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow \overline{A\underline{u}} = \overline{\lambda\underline{u}} \Longrightarrow A\overline{\underline{u}} = \overline{\lambda}\,\overline{\underline{u}}$$, δηλ. $(\overline{\lambda}, \overline{\underline{u}})$ είναι

επίσης ζεύγος ιδιοδιανύσματος - ιδιοτιμής. Επίσης:

$$A\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} + i\underline{z})$$

$$\Rightarrow A\underline{x} = \sigma\underline{x} - \omega\underline{z} \quad \text{καί} \quad A\underline{z} = \omega\underline{x} + \sigma\underline{z}$$

$$\Rightarrow A[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\left[\begin{array}{c|c} \sigma & \omega \\ \hline -\omega & \sigma \end{array}\right].$$

Παρατήρηση: Τα διανύσματα $\underline{x}$ και $\underline{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^n$ (επί του $\mathbb{R}$): Γιατί αν υπήρχαν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 c_2 \neq 0$ τέτοια ώστε $c_1\underline{x} + c_2\underline{z} = \underline{0}$, τότε $\underline{z} = -\frac{c_1}{c_2}\underline{x}$ (γιατί αν $c_2 = 0$, τότε $c_1 = 0$, άτοπο). Επομένως:

$$A\left(1 - i\frac{c_1}{c_2}\right)\underline{x} = (\sigma + i\omega)\left(1 - i\frac{c_1}{c_2}\right)\underline{x} \Rightarrow A\underline{x} = (\sigma + i\omega)\underline{x}$$

πού είναι άτοπο γιατί $A\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ καί $(\sigma+i\omega)\underline{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$.

~~Επίσης~~:

Στην περίπτωση όπου $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με ιδιοτιμές $\sigma \pm i\omega$ καί ~~Au = λx~~ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{x} \pm i\underline{y}$ έχουμε:

$$A[\underline{x} \vdots \underline{z}] = [\underline{x} \vdots \underline{z}]\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}, \quad P = [\underline{x} \vdots \underline{z}] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\det(P) \neq 0 \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον εκθετικό πίνακα e^{At} στην περίπτωση αυτή. Εφόσον οι ιδιοτιμές $\sigma \pm i\omega$ είναι διακεκριμένες ο $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι απλής δομής καί άρα

$$A[\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}] = [\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}]\begin{bmatrix} \sigma+i\omega & 0 \\ 0 & \sigma-i\omega \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow A = [\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}]\begin{bmatrix} \sigma+i\omega & 0 \\ 0 & \sigma-i\omega \end{bmatrix}[\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}]^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = [\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}]\begin{bmatrix} e^{(\sigma+i\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(\sigma-i\omega)t} \end{bmatrix}[\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}]^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{\sigma t}[\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}]\begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix}[\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}]^{-1}$$

Επίσης: $[\underline{u} \vdots \bar{\underline{u}}] = [\underline{x}+i\underline{z} \vdots \underline{x}-i\underline{z}] =$

$$= [\underline{x} \vdots \underline{z}]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

Άρα:

$$e^{At} = e^{\sigma t}\,[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]^{-1}$$

Έχουμε ~~Now~~:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2i}$$

και

$$\frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} \\ ie^{i\omega t} & -ie^{-i\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} & e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \\ -e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} & ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t} \end{bmatrix} \frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

και επομένως:

$$e^{At} = e^{\sigma t}\,[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]^{-1}$$

~~The cale~~ Ο παραπάνω υπολογισμός μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση που $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και το φάσμα του A περιέχει τις ιδιοτιμές $\sigma \pm i\omega$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα ένα). Έστω ότι ο πίνακας είναι απλής δομής: Τότε,

$$A\,[\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}} \,\vdots\, U_2] = [\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}} \,\vdots\, U_2] \begin{bmatrix} \sigma + i\omega & 0 & 0 \\ 0 & \sigma - i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

όπου $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $\underline{\bar{u}} = \underline{x} - i\underline{z} \in \mathbb{C}^{n}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\sigma + i\omega$ και $\sigma - i\omega$, αντίστοιχα,

$\Lambda_2 = \mathrm{diag}(\Lambda_2)$ ο διαγώνιος πίνακας που περιέχει τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του A και ~~U_2~~ οι στήλες του U_2 περιέχουν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Γράφουμε:

$$[\underline{u} \,\vdots\, \bar{\underline{u}}] = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

και επομένως:

$$A[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z} \,\vdots\, U_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z} \,\vdots\, U_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma+i\omega & 0 & 0 \\ 0 & \sigma-i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = [\underline{x}\ \underline{z}\ U_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma+i\omega & 0 & 0 \\ 0 & \sigma-i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}^{-1} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z} \,\vdots\, U_2]^{-1}$$

και

$$e^{At} = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z} \,\vdots\, U_2] \begin{bmatrix} e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t & 0 \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\Lambda_2 t} \end{bmatrix} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z} \,\vdots\, U_2]^{-1}$$

Πίνακες μή απλής δομής

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακας μή απλής δομής.

Ορισμός: Το διάνυσμα $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης m πού αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ αν καί μόνο αν

$$(\lambda I - A)^m \underline{v} = \underline{0} \quad \text{καί} \quad (\lambda I - A)^{m-1} \underline{v} \neq \underline{0}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό ενα (απλό) ιδιοδιάνυσμα είναι γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης $m=1$.

Μια αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους k πού παράγεται από (απλό) ιδιοδιάνυσμα $\underline{v}_1$ είναι τό σύνολο $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ ώστε:

$$\left.\begin{aligned}
(A-\lambda I_n)\,\underline{v}_k &= \underline{v}_{k-1} \\
(A-\lambda I_n)\,\underline{v}_{k-1} &= \underline{v}_{k-2} \\
&\vdots \\
(A-\lambda I_n)\,\underline{v}_2 &= \underline{v}_1 \\
(A-\lambda I_n)\,\underline{v}_1 &= 0
\end{aligned}\right\} (*)$$

Γενικά έχουμε:

$$(A-\lambda I_n)^j\,\underline{v}_j = 0$$

$$\left[(A-\lambda I_n)^2\,\underline{v}_2 = (A-\lambda I)(A-\lambda I)\,\underline{v}_2 = (A-\lambda I)\,v_1 = 0, \text{ κλπ}\right]$$

Οι σχέσεις (*) γράφονται σέ μορφή πινακοεξίσωσης:

$$A\left[\underline{v}_1\ \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_{k-1}\ \underline{v}_k\right] = \left[\underline{v}_1\ \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_{k-1}\ \underline{v}_k\right]\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{J(\lambda)}$$

Όταν ο πίνακας είναι μη-απλής δομής δεν διαγωνιοποιείται (μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας) αλλά μπορεί νά μετασχηματισθεί σέ κανονική μορφή Jordan. Τά βασικά ερωτήματα πού προκύπτουν είναι:

(α) Πόσες αλυσίδες δημιουργούνται από τό σύνολο των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σέ μία ιδιοτιμή λ;

(β) Ποιό είναι τό μήκος των αλυσίδων;

Έστω $\lambda_i \in \sigma(A) =: \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda)=0\}$. Ορίζουμε γιά κάθε λ_i:

$$r_{ki} = \text{Rank}(A-\lambda_i I_n)^k \qquad k=1,2,\dots$$

Η ακολουθία ακεραίων $(r_{ki})_k$ είναι φθίνουσα. Η γεωμετρική πολλαπλότητα $d_i = n - r_{1i}$ δίνει τόν αριθμό αλυσίδων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Το μήκος της μέγιστης αλυσίδας είναι ο ελάχιστος ακέραιος ℓ_i γιά τόν οποίο $r_{\ell_i i} = r_{\ell_i+1,i}$. Στήν ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχούν γενικευμένα ιδιοδιανύσματα μέχρι τάξης ℓ_i (όχι μεγαλύτερης τάξης). Τα απλά ιδιοδιανύσματα είναι πλήθους $r_{1i}-r_{2i}$, τά γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα τάξης ℓ_i είναι πλήθους $r_{\ell_i-1,i}-r_{\ell_i,i}$, κ.λπ.

Η χαρακτηριστική Segré ορίζεται ως

$$S_i = [\underbrace{n-r_{1i}}_{d_i},\ r_{1i}-r_{2i}, \dots,\ r_{\ell_i-1,i}-r_{\ell_i,i}]$$

καί περιέχει το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων κάθε τάξης. Ο αριθμός γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων κάθε αλυσίδας δίνεται από τό διάγραμμα Ferrer.

Παράδειγμα.

Εστω ιδιοτιμή πίνακα $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ γιά την οποία:

$$r_1 = 5, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 2, \quad r_4 = 1, \quad r_5 = 1$$

Η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_0 είναι $10 - r_1 = 5$. Ο ελάχιστος $\ell \in \mathbb{N}$ γιά τον οποίο $r_\ell = r_{\ell+1}$ είναι $\ell = 4$. Αρα έχουμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα μέχρι $4^{ης}$ τάξης. Η χαρακτηριστική Segré είναι:

$$S = [n - r_1, r_1 - r_2, r_2 - r_3, r_3 - r_4] = [5, 2, 1, 1]$$

Καί επομένως εχουμε 5 (απλά) ιδιοδιανύσματα, 2 γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $2^{ης}$ τάξης, 1 γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $3^{ης}$ τάξης καί 1 γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $4^{ης}$ τάξης. Τό διάνυσμα Ferrer:

$$\begin{array}{lcccccc}
n - r_1 = 5 & \rightarrow & * & * & * & * & * \\
r_1 - r_2 = 2 & \rightarrow & * & * & & & \\
r_2 - r_3 = 1 & \rightarrow & * & & & & \\
r_3 - r_4 = 1 & \rightarrow & \underline{*} & _ & _ & _ & _ \\
 & & 4 & 2 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Καί επομένως εχουμε 1 αλυσίδα μήκους 4, 1 μήκους 2, καί 3 μήκους 1. Η μορφή Jordan πού αντιστοιχεί στό λ_0:

$$J(\lambda_0) = \mathrm{diag}\left\{ \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \lambda_0, \lambda_0, \lambda_0 \right\}.$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με e διακεκριμένες ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e\}$ καί αντίστοιχα Jordan blocks διαστάσεων $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_e\}$ αντίστοιχα. (οι ακέραιοι τ_i είναι οι αλγεβρικές πολλαπλότητες). Έστω U ο πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, έτσι ώστε:

$$A = U \operatorname{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_e\} U^{-1} := U J U^{-1}$$

Τότε $e^{At} = U e^{Jt} U^{-1}$ όπου $e^{Jt} = \operatorname{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_e t}\}$

Αν $J_i = \operatorname{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{id_i}\}$, $i = 1, 2, \dots, e$, καί

$$J_{ij} = J_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_{ij} \times k_{ij}}$$

τότε:

$$e^{J_{ij} t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{k_{ij}-1}/(k_{ij}-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Απόδειξη</u> Βασίζεται στά παρακάτω βήματα

(i) $$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(UJU^{-1})^k t^k}{k!} = U\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!}\right)U^{-1}$$

$$= U e^{Jt} U^{-1}$$

(ii) $J^k = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, \ldots J_e\}^k = \mathrm{diag}\{J_1^k, J_2^k, \ldots, J_e^k\}$.

(iii) $e^{Jt} = I + \mathrm{diag}\{J_1, \ldots J_e\}t + \frac{1}{2!}\mathrm{diag}\{J_1^2, \ldots, J_e^2\}$

$$+ \cdots + \frac{1}{k!}\mathrm{diag}\{J_1^k, \ldots, J_e^k\}t^k + \cdots$$

$$= \mathrm{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \ldots, e^{J_e t}\}$$

Παρόμοια, $e^{J_i t} = \mathrm{diag}\{e^{J_{i1} t}, e^{J_{i2} t}, \ldots, e^{J_{id_i} t}\}$.

(iv) Εστω :

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & - & - & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I_{\cancel{m}_{ij}}^{k} + N_{\cancel{m}_{ij}}^{k}$$

όπου $N_{m_{ij}}$ είναι μηδενοδύναμος (nillpotent) πίνακας
Επειδή $\lambda_i I_{\cancel{m}_{ij}}^{k}$ καί $N_{\cancel{m}_{ij}}^{k}$ αντιμεταθέτονται έχουμε

$$e^{J_{ij} t} = e^{\lambda_i t I_{\cancel{m}_{ij}}^{k} + N_{\cancel{m}_{ij}}^{k} t} \overset{(*)}{=} e^{\lambda_i t} e^{N_{\cancel{m}_{ij}}^{k} t}$$

καί

$$e^{N_{\cancel{m}_{ij}}^{} t}_{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_{\cancel{m}_{ij}}^{k} t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m_{ij}-1} \frac{N_{\cancel{m}_{ij}}^{k} t^k}{k!}$$

(δηλ. $N_{\cancel{m}_{ij}}^{k} = 0$ γιά $k \geq \cancel{m}_{ij}^{k}$)

Η ισότητα (*) προκύπτει από τό παρακάτω Λήμμα:

<u>Λήμμα</u>: Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ καί $AB = BA$, τότε
$e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$.

Απόδειξη:

Θέτουμε $\Phi(t) = e^{(A+B)t} \cdot e^{-At} \cdot e^{-Bt}$. Τότε

$$\Phi'(t) = e^{(A+B)t}(A+B)e^{-At}e^{-Bt} + e^{(A+B)t}(-A)e^{-At}e^{-Bt} + e^{(A+B)t}e^{-At}(-B)e^{-Bt}$$

$$= e^{(A+B)t}\left\{ (\cancel{A}+B)e^{-At} - A\cancel{e}^{-At} - e^{-At}B \right\} e^{-Bt}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $AB = BA$ έχουμε ότι $e^{-At}B = Be^{-At}$ που ισχύει διότι:

$$e^{-At}B = \left\{ I - At + \frac{A^2t^2}{2!} - \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots \right\} B$$

$$= B - ABt + \frac{A^2Bt^2}{2!} - \frac{A^3Bt^3}{3!} + \cdots$$

$$= B\left(I - At + \frac{A^2t^2}{2!} - \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots \right)$$

$$= Be^{-At}$$

Επομένως: $\Phi'(t) = 0 \Rightarrow \Phi(t) = \Phi(0) = I_n$

$$\Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

Παράδειγμα:

Έστω $$J = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \mathrm{diag}\{J_1, J_2\}.$$

1

Έχουμε : $\varphi(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$

$\lambda_1 = 1 : \quad \tau_1 = 3, \quad$ έστω $d_1 = 1$

$\lambda_2 = 2 : \quad \tau_2 = d_2 = 1$

$$e^{Jt} = \operatorname{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}\}$$

$$e^{J_1 t} = e^{\lambda_1 t I_3 + N_3 t} = e^{\lambda_1 t} e^{N_3 t},$$ όπου

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3^3 = N_3^4 = \cdots = 0_{3,3}$$

Επομένως

$$e^{N_3 t} = I_3 + N_3 t + \frac{1}{2} N_3^2 t^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$e^{J_1 t} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{J_2 t} = e^{2t}$$

Άρα

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{ccc|c} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2 e^t & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

Παράδειγμα

Νὰ λυθεῖ τὸ ΠΑΤ :

$$\underline{y}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underline{y}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad , \underline{y}(0) = \underline{y}_0 = \underline{0}$$

Η λύση είναι της μορφής

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\underline{b}\, d\tau = \left(\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau\right)\underline{b}$$

Εχουμε:

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{A(t-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$e^{A(t-\tau)}\underline{b} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau} \\ 0 & e^{t-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t-\tau} \\ 0 \end{bmatrix}$$

καί

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t e^{t-\tau} d\tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \int_0^t e^{-\tau} d\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t \left[e^{-\tau}\right]_t^0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(1-e^{-t}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Μιγαδική ιδιοτιμή

Έστω αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους 2k πού αντιστοιχούν σέ μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda = \sigma + i\omega$ ($\omega, \sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$), δηλ.

$$\left\{\begin{array}{l} A\underline{u}_k = \lambda \underline{u}_k + \underline{u}_{k-1} \\ A\underline{u}_{k-1} = \lambda \underline{u}_{k-1} + \underline{u}_{k-2} \\ \vdots \\ A\underline{u}_2 = \lambda \underline{u}_2 + \underline{u}_1 \\ A\underline{u}_1 = \lambda \underline{u}_1 \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} A\bar{\underline{u}}_k = \bar{\lambda} \bar{\underline{u}}_k + \bar{\underline{u}}_{k-1} \\ A\bar{\underline{u}}_{k-1} = \bar{\lambda} \bar{\underline{u}}_{k-1} + \bar{\underline{u}}_{k-2} \\ \vdots \\ A\bar{\underline{u}}_2 = \bar{\lambda} \bar{\underline{u}}_2 + \bar{\underline{u}}_1 \\ A\bar{\underline{u}}_1 = \bar{\lambda} \bar{\underline{u}}_1 \end{array}\right\}$$

Αναλυτικά γράφουμε : $\underline{u}_i = \underline{x}_i + i\underline{z}_i$ $\quad (\underline{x}_i, \underline{z}_i \in \mathbb{R}^n)$.

$$A(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) = (\sigma + i\omega)(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1)$$

$$A(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) = (\sigma + i\omega)(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) + (\underline{x}_1 + i\underline{z}_1)$$

$$\vdots$$

$$A(\underline{x}_{k-1} + i\underline{z}_{k-1}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x}_{k-1} + i\underline{z}_{k-1}) + (\underline{x}_{k-2} + i\underline{z}_{k-2})$$

$$A(\underline{x}_k + i\underline{z}_k) = (\sigma + i\omega)(\underline{x}_k + i\underline{z}_k) + (\underline{x}_{k-1} + i\underline{z}_{k-1})$$

Ισοδύναμα :

$$A\underline{x}_1 = \sigma\underline{x}_1 - \omega\underline{z}_1 \quad , \quad A\underline{z}_1 = \omega\underline{x}_1 + \sigma\underline{z}_1$$

$$A\underline{x}_2 = \sigma\underline{x}_2 - \omega\underline{z}_2 + \underline{x}_1 \quad , \quad A\underline{z}_2 = \omega\underline{x}_2 + \sigma\underline{z}_2 + \underline{z}_1$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$A\underline{x}_{k-1} = \sigma\underline{x}_{k-1} - \omega\underline{z}_{k-1} + \underline{x}_{k-2} \quad , \quad A\underline{z}_{k-1} = \omega\underline{x}_{k-1} + \sigma\underline{z}_{k-1} + \underline{z}_{k-2}$$

$$A\underline{x}_k = \sigma\underline{x}_k - \omega\underline{z}_k + \underline{x}_{k-1} \quad , \quad A\underline{z}_k = \omega\underline{x}_k + \sigma\underline{z}_k + \underline{z}_{k-1}$$

Πού γράφεται σε μορφή πινακοεξίσωσης

$$A\left[\underline{x}_1\ \overset{z}{\underline{y}}_1 \ \vdots\ \underline{x}_2\ \overset{z}{\underline{y}}_2\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \underline{x}_k\ \underline{z}_k\right] =$$

$$= \left[\underline{x}_1\ \underline{z}_1\ \vdots\ \underline{x}_2\ \underline{z}_2\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \underline{x}_k\ \underline{z}_k\right] \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 & & & & \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & \sigma & \omega & 1 & 0 & & \\ & & -\omega & \sigma & 0 & 1 & & \\ \hline & & & & \ddots & & \ddots & \\ \hline & & & & \sigma & \omega & 1 & 0 \\ & & & & -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & \sigma & \omega \\ & & & & & & -\omega & \sigma \end{array}\right]}_{J(\sigma,\omega).}$$

Επίσης τα $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots \underline{u}_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ~~στο~~ συνεπάγεται ότι $\{\underline{x}_1, \overset{z}{\underline{y}}_1, \underline{x}_2, z_2, \dots \underline{x}_k, \underline{z}_k\}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα (στον $\mathbb{R}^n$ επί του $\mathbb{R}$).

Απλοποιούμε για την περίπτωση $k=2$ (η γενική λύση παρόμοια). Έχουμε:

$$A\left[\underline{u}_1\ \underline{\bar{u}}_1 \vdots\ \underline{u}_2\ \underline{\bar{u}}_2\right] = \left[\underline{u}_1\ \underline{\bar{u}}_1 \vdots\ \underline{u}_2\ \underline{\bar{u}}_2\right] \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{array}\right]$$

Ισοδύναμα έχουμε:

Άρα,

$$e^{At} = U Q_1 \underbrace{Q_2 \overbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} & te^{\bar\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}}^{\Phi_0} Q_2^{-1}}_{\Phi_1} Q_1^{-1} U^{-1}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} & te^{\bar\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\lambda t} & 0 & te^{\bar\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} e^{\lambda t} & 0 & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\lambda t} & 0 & te^{\bar\lambda t} \\ \hline 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{e^{\bar\lambda t}}\,0 & e^{\bar\lambda t} \end{array}\right]$$

$$\Phi_2 = Q_1 \Phi_1 Q_1^{-1} = Q_1 Q_2 \Phi_0 Q_2^{-1} Q_1^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} e^{\lambda t} & 0 & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\lambda t} & 0 & te^{\bar\lambda t} \\ \hline 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\bar\lambda t} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{array}\right]^{-1}$$

$$A\,\big[\underline{u}_1\ \ \underline{u}_2 \ \vdots\ \bar{\underline{u}}_1\ \ \bar{\underline{u}}_2\big] = \underbrace{\big[\underline{u}_1\ \ \underline{u}_2 \ \vdots\ \bar{\underline{u}}_1\ \ \bar{\underline{u}}_2\big]}_{P} \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A = P \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{array}\right] P^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = P \left[\begin{array}{cc|cc} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{\bar{\lambda} t} & t e^{\bar{\lambda} t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\bar{\lambda} t} \end{array}\right] P^{-1}$$

οπου $e^{\lambda t} = e^{(\sigma + i\omega)t} = e^{\sigma t} e^{i\omega t}$, $e^{\bar{\lambda} t} = e^{\sigma t} e^{-i\omega t}$.

Επισης

$$\underbrace{\big[\underline{u}_1\ \ \underline{u}_2 \ \vdots\ \bar{\underline{u}}_1\ \ \bar{\underline{u}}_2\big]}_{P} = \big[\underline{x}_1 + i\underline{z}_1 \ \vdots\ \underline{x}_2 + i\underline{z}_2 \ \vdots\ \underline{x}_1 - i\underline{z}_1 \ \vdots\ \underline{x}_2 - i\underline{z}_2\big]$$

$$= \big[\underline{x}_1 \ \vdots\ \underline{z}_1 \ \vdots\ \underline{x}_2 \ \ \underline{z}_2\big] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\big[\underline{x}_1 \ \vdots\ \underline{z}_1 \ \vdots\ \underline{x}_2 \ \vdots\ \underline{z}_2\big]}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix}}_{Q_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_2}$$

Επίσης:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2i}\begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} +i & 1 \\ +i & -1 \end{bmatrix}.$$

και επομένως

$$\Phi_2(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & e^{\bar\lambda t} \\ ie^{\lambda t} & -ie^{\bar\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} ie^{\lambda t}+ie^{\bar\lambda t} & e^{\lambda t}-e^{\bar\lambda t} \\ -e^{\lambda t}+e^{\bar\lambda t} & ie^{\lambda t}+ie^{\bar\lambda t} \end{bmatrix}\frac{1}{2i}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{\lambda t}+e^{\bar\lambda t}) & \frac{1}{2i}(e^{\lambda t}-e^{\bar\lambda t}) \\ -\frac{1}{2i}(e^{\lambda t}-e^{\bar\lambda t}) & \frac{1}{2}(e^{\lambda t}+e^{\bar\lambda t}) \end{bmatrix}$$

$$\left(e^{\lambda t} = e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t}e^{i\omega t}\right) \quad = \begin{bmatrix} e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t \end{bmatrix} = \Phi_2(2,2)$$

$$\Phi_2(1,2) = \begin{bmatrix} te^{\sigma t}\cos\omega t & te^{\sigma t}\sin\omega t \\ -te^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t \end{bmatrix}, \quad \Phi_2(2,1) = 0$$

Και επομένως:

$$e^{At} = [\underline{x_1}\ \underline{z_1} \,\vdots\, x_2\ z_2]\left[\begin{array}{cc|cc} e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t & te^{\sigma t}\sin\omega t \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t & -te^{\sigma t}\sin\omega t & te^{\sigma t}\cos\omega t \\ \hline 0 & 0 & e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t \\ 0 & 0 & -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t \end{array}\right] \cdot$$

$$\cdot\,[\underline{x_1}\ \underline{z_1} \,\vdots\, \underline{x_2}\ \underline{z_2}]^{-1}$$

Διακριτά Συστήματα (γραμμικά με σταθερούς συντελεστές)

Συστήματα εξισώσεων διαφορών $1^{ης}$ τάξης:

$$\underline{y}_{k+1} = A\underline{y}_k + \underline{b}_k \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \underline{b}_k, \underline{y}_k \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}_0)$$

Αν $\underline{b}_k \neq 0$ το σύστημα είναι μή ομογενές (διαφορετικά ομογενές).

$$k=0 \Rightarrow \underline{y}_1 = A\underline{y}_0 + \underline{b}_0$$

$$k=1 \Rightarrow \underline{y}_2 = A\underline{y}_1 + \underline{b}_1 = A(A\underline{y}_0 + \underline{b}_0) + \underline{b}_1$$

$$= A^2\underline{y}_0 + A\underline{b}_0 + \underline{b}_1.$$

Επαγωγικά: $\underline{y}_k = A^k\underline{y}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}\underline{b}_j \qquad k \in \mathbb{N}_0$

Ισοδύναμα:

$$\underline{y}_k = A^k\underline{y}_0 + \left[A^{k-1} \,\vdots\, A^{k-2} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A \,\vdots\, I \right] \begin{bmatrix} \underline{b}_0 \\ \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_{k-1} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος ($A^k\underline{y}_0$) εξαρτάται αποκλειστικά από την αρχική συνθήκη (αρχική "κατάσταση") $\underline{y}_0$ και ο δεύτερος από τα $\underline{b}_k$. Ενδιαφερόμαστε νά υπολογίσομε τον A^k με τρόπο που δίνει πληροφορία για την συμπεριφορά της λύσης (ευστάθεια).

Εστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι πίνακας απλής δομής μέ ιδιοτιμές $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ καί αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^n$ (γραμμικά ανεξάρτητα).

Αν $P = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τότε $\det(P) \neq 0$ και

$$P^{-1}AP = \Lambda, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

$$\Rightarrow (P^{-1}AP)^k = \underbrace{P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots\cdots P^{-1}AP}_{k \text{ φορές}} = P^{-1}A^kP = \Lambda^k$$

$$= \mathrm{diag}\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\}.$$

Η λύση του ομογενούς συστήματος είναι της μορφής:

$$\underline{y}_k = A^k \underline{y}_0 = P\Lambda^k P^{-1}\underline{y}_0$$

Αν $P^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \vdots \\ \underline{v}_n^T \end{bmatrix}$ ο πίνακας των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων

τότε $\underline{y}_k = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \vdots \\ \underline{v}_n^T \end{bmatrix} \underline{y}_0$

$$\Rightarrow \underline{y}_k = \sum_{i=1}^{n} (\underline{v}_i^T \underline{y}_0)\lambda_i^k \underline{u}_i$$

Ολες οι λύσεις του συστήματος είναι της μορφής:

$$\underline{y}_k = P\Lambda^k \underline{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k \underline{u}_i, \qquad \underline{c} \in \mathbb{R}^n$$

Ενώ η λύση του αντίστοιχου Π.Α.Τ ($\underline{y}_{k+1} = A\underline{y}_k$, $\underline{y}_0$ δοσμένο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$) είναι μοναδική.

Εστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δεν είναι απλής δομής και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\cdots(\lambda-\lambda_e)^{\tau_e}$$

($\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$).

Έχουμε $d_i = \dim Ker(\lambda_i I - A) = n - r_i$, όπου $r_i = Rank(\lambda_i I - A)$, όπου d_i η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i, $i=1,2,\ldots,e$. Εφόσον ο A είναι μή απλής δομής έχουμε $d_i < \tau_i$ γιά ένα τουλάχιστον $i=1,2,\ldots,e$. Η μορφή Jordan του πίνακα A είναι:

$$J = \text{diag}\{J_1; J_2, \ldots, J_e\} \quad \text{όπου} \quad J_i = J_i(\lambda_i)$$

Κάθε διαγώνιο block J_i είναι της μορφής:

$$J_i = \text{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \ldots, J_{id_i}\} \qquad i=1,2,\ldots,e$$

Οι διαστάσεις των πινάκων J_{ij} καθορίζονται από την χαρακτηριστική Segré καί τό διάγραμμα Ferrér (κατά τά γνωστά!).

Αν P ο πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, τότε $\det(P) \neq 0$ καί:

$$P^{-1}AP = J = \text{diag}\{J_1, J_2, \ldots, J_e\}$$

$$P^{-1}A^kP = J^k = \text{diag}\{J_1^k, J_2^k, \ldots, J_e^k\}$$

$$J_i^k = \text{diag}\{J_{i1}^k, J_{i2}^k, \ldots, J_{id_i}^k\}$$

όπου:

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}^k$$

Εστω $J_{ij} \in \mathbb{R}^{m_{ij} \times m_{ij}}$ (η διάσταση m_{ij} προκύπτει από την χαρακτηριστική Segré). Τότε:

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda_i^{k-2} & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-m_{ij}+1)\lambda_i^{k-m_{ij}+1}}{(m_{ij}-1)!} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_i^k & \ddots & \frac{k(k-1)\lambda_i^{k-2}}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

Γιά παράδειγμα, αν $m_{ij} = 3$

$$J_{ij} = \lambda_i I_3 + N_3 \quad , \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο N_3 είναι μηδενοδύναμος μέ $N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

καί $N_3^3 = 0$. Αρα τό διωνυμικό ανάπτυγμα:

$$J_{ij}^k = (\lambda_i I_3 + N_3)^k = \lambda_i^k I_3 + \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} N_3 + \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} N_3^2$$

και

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k\lambda_i^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_i^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda_i^{k-2} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^k \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

Έστω $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με ιδιοτιμές $\lambda = \rho e^{i\theta}$ και $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\theta}$ $(\theta \neq n\pi)$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$, $\bar{\underline{u}} = \underline{x} - i\underline{z}$.
Ο A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα είναι απλής δομής.
Γράφουμε:

$$A = [\underline{u} \,\vdots\, \bar{\underline{u}}] \begin{bmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{bmatrix} [\underline{u} \,\vdots\, \bar{\underline{u}}]^{-1}$$

$$= [\underline{x} + i\underline{z} \,\vdots\, \underline{x} - i\underline{z}] \begin{bmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{bmatrix} [\underline{x} + i\underline{z} \,\vdots\, \underline{x} - i\underline{z}]^{-1}$$

$$= [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho e^{i\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]^{-1}$$

$$= \cdots = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \rho^k \cos(k\theta) & \rho^k \sin(k\theta) \\ -\rho^k \sin(k\theta) & \rho^k \cos(k\theta) \end{bmatrix} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]^{-1}$$

Μέ παρόμοιο τρόπο αναλύουμε πίνακες μή απλής δομής. Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ μέ χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda^2 - 2\rho\cos\theta\cdot\lambda + \rho^2)^2$$

καί ιδιοτιμές $\lambda = \rho e^{i\theta}$ (μέ $\tau=2$ καί έστω $d=1$) καί $\bar{\lambda} = \rho e^{-i\theta}$ (μέ $\tau=2$ καί $d=1$). Έστω $\underline{u}_1 = \underline{x}_1 + i\underline{z}_1$, $\underline{u}_2 = \underline{x}_2 + i\underline{z}_2$ τά γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $1^{ης}$ καί $2^{ης}$ τάξης που αντιστοιχούν στήν ιδιοτιμή λ (καί επομένως $\bar{\underline{u}}_1$ καί $\bar{\underline{u}}_2$ τά γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στήν ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$). Οι δύο αλυσίδες γεν. ιδιοδιανυσμάτων γράφονται:

$$A\underline{u}_2 = \lambda\underline{u}_2 + \underline{u}_1 \qquad A\bar{\underline{u}}_2 = \bar{\lambda}\bar{\underline{u}}_2 + \bar{\underline{u}}_1$$
$$A\underline{u}_1 = \lambda\underline{u}_1 \qquad A\bar{\underline{u}}_1 = \bar{\lambda}\bar{\underline{u}}_1$$

Έχουμε:

$$A\left[\underline{x}_1 + i\underline{z}_1 \quad \underline{x}_1 - i\underline{z}_1 \;\vdots\; \underline{x}_2 + i\underline{z}_2 \quad \underline{x}_2 - i\underline{z}_2\right] =$$

$$= \left[\underline{x}_1 + i\underline{z}_1 \quad \underline{x}_1 - i\underline{z}_1 \;\vdots\; \underline{x}_2 + i\underline{z}_2 \quad \underline{x}_2 - i\underline{z}_2\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} \rho e^{i\theta} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \rho e^{i\theta} & \\ 0 & 0 & 0 & \rho e^{-i\theta} \end{array}\right] \cdot$$

$$\Rightarrow A^k = \left[\underline{x}_1 \quad \underline{z}_1 \;\vdots\; \underline{x}_2 \quad \underline{z}_2\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{array}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{cc|cc} \rho e^{ik\theta} & 0 & k\rho^{k-1}e^{i(k-1)\theta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-ik\theta} & 0 & k\rho^{k-1}e^{-i(k-1)\theta} \\ \hline 0 & 0 & \rho^k e^{ik\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^k e^{-ik\theta} \end{array}\right]$$

$$\cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{array}\right]^{-1} \quad [\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \mid \underline{x}_2\ \underline{z}_2]^{-1}$$

και επομένως

$$A^k = [\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \mid \underline{x}_2\ \underline{z}_2] \begin{bmatrix} \rho^k\cos(k\theta) & \rho^k\sin(k\theta) & k\rho^{k-1}\cos(k-1)\theta & k\rho^{k-1}\sin(k-1)\theta \\ -\rho^k\sin(k\theta) & \rho^k\cos(k\theta) & -k\rho^{k-1}\sin(k-1)\theta & k\rho^{k-1}\cos(k-1)\theta \\ 0 & 0 & \rho^k\cos(k\theta) & \rho^k\sin(k\theta) \\ 0 & 0 & -\rho^k\sin(k\theta) & \rho^k\cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

$$\cdot\ [\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \mid \underline{x}_2\ \underline{z}_2]^{-1}$$

που γενικεύεται γιά Jordan blocks μεγαλύτερων διαστάσεων (ασκηση!).

Δυναμικά συστήματα στην Θεωρία Ελέγχου.

Στην Θεωρία ελέγχου τά δυναμικά συστήματα εχουν "εισοδο" και "εξοδο", δηλαδή περιγράφονται από διαφορικά συστήματα της μορφής (στη μη γραμμική περίπτωση)

$$\underline{x}'(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)), \quad \underline{y}(t) = h(x(t))$$

η (στην γραμμική περίπτωση) ως $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{y} = C\underline{x}$.

(Αντίστοιχα γιά διακριτά συστήματα έχουμε:

$$\underline{x}_{k+1} = f(\underline{x}_k, \underline{u}_k), \quad \underline{y}_k = h(\underline{x}_k)$$

ή

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k, \quad \underline{y}_k = C\underline{x}_k$$

στήν μή-γραμμική καί γραμμική περίπτωση, αντίστοιχα).

Το "διάνυσμα κατάστασης" ($\underline{x}(t)$ η $\underline{x}_k$) δεν είναι προσβάσιμο (μετρήσιμο). Οι μετρήσιμες μεταβλητές αντιστοιχούν στό διάνυσμα εξόδου $\underline{y}(t)$ ενώ υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές εισόδου μπορούν νά επιλεγούν από τον σχεδιαστή του συστήματος. Γιά μια σειρά λόγων είναι προτιμότερο οι μεταβλητές αυτές νά μην επιλέγονται ως αυθαίρετες συναρτήσεις χρόνου ("open-loop") αλλά μέσω "ανάδρασης" (feedback), δηλαδή ως συναρτήσεις των μετρήσιμων μεταβλητών

$$\underline{u} = g(\underline{y}(t)) = g(h(x(t)))$$

όπου $g(\cdot)$ είναι η συνάρτηση ελέγχου. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\underline{x}'(t) = f(x(t), g \circ h \circ x(t)) = \hat{f}(x(t))$$

πού είναι αυτόνομο σύστημα "κλειστού βρόγχου" (closed loop). Το πρόβλημα ελέγχου είναι η κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης ανάδρασης $u = g(y)$ ώστε το σύστημα $\underline{x}' = \hat{f}(\underline{x})$ νά έχει επιθυμητές ιδιότητες (π.χ ευστάθεια). Στήν περίπτωση γραμμικών συστημάτων / γραμμικού ελέγχου οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} \\ \underline{u} &= G\underline{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{x}' = (A+BGC)\,\underline{x} := A_c\,\underline{x}$$

Καί τό πρόβλημα ανάγεται στήν επιλογή του πίνακα G ώστε ο πίνακας $A_c := A + BGC$ νά έχει κατάλληλες ιδιότητες (π.χ. ιδιοτιμές καί ιδιοδιανύσματα).

Οι αντίστοιχες εξισώσεις γιά διακριτά συστήματα είναι:

$$\underline{x}_{k+1} = f(\underline{x}_k, g(h(x_k))) := \hat{f}(\underline{x}_k) \quad , \quad n$$

$$\underline{x}_{k+1} = (A+BGC)\,\underline{x}_k := A_c\,\underline{x}_k$$