

Ευστάθεια δυναμικών συστημάτων

1. Προκαταρκτικά

1.1 Θετικά ορισμένοι/ημι-ορισμένοι πίνακες

Ορισμός: Έστω $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ο P είναι θετικά ορισμένος (θετικά ημι-ορισμένος), $P \succ 0$ ($P \succeq 0$) αν η τετραγωνική μορφή $x^T P x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ ($x^T P x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$). Παρόμοια ορίζουμε αρνητικά ορισμένους (ημι-ορισμένους) πίνακες: $P \prec 0 \Leftrightarrow -P \succ 0$ ($P \preceq 0 \Leftrightarrow -P \succeq 0$).

Παρατήρηση: Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succ 0$ ($P \succeq 0$), τότε χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P = P^T$. Πράγματι,

$$x^T P x = x^T \left[\frac{1}{2}(P + P^T) + \frac{1}{2}(P - P^T) \right] x$$

όπου ο πίνακας $P + P^T$ ($P - P^T$), είναι συμμετρικός (αντι-συμμετρικός). Επομένως,

$$x^T P x = x^T \left(\frac{P + P^T}{2} \right) x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^n$$

και επομένως $P \succ 0 \Leftrightarrow P + P^T \succ 0$ (αντίστοιχα $P \succeq 0 \Leftrightarrow P + P^T \succeq 0$). Στη συνέχεια ορίζουμε:

$$S_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succ 0\}, \quad \bar{S}_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succeq 0\}, \quad S^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T\}$$

και έχουμε: $S_+^n \subseteq \bar{S}_+^n \subseteq S^n$, δηλαδή υποθέτουμε ότι θετικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι πίνακες (όπως και αρνητικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι) είναι αυτόματα συμμετρικοί.

Ιδιότητες:

I_1 : S_+^n και $\bar{S}_+^n$ είναι κυρτοί κώνοι στον $\mathbb{R}^{n \times n}$, δηλαδή:

$$I_1(a) : P_1, P_2 \in S_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 \in S_+^n \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad P \in S_+^n \Rightarrow \lambda P \in S_+^n \quad \forall \lambda > 0$$

$$I_1(b) : P_1, P_2 \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 \in \bar{S}_+^n \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad P \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P \in \bar{S}_+^n \quad \forall \lambda \geq 0.$$

I_2 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε $P \succ 0 \Leftrightarrow \Delta_i := \det(E_i^T P E_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, όπου $E_i \in \mathbb{R}^{n \times i}$ ο πίνακας που ορίζεται από τις i -πρώτες στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_n . (Τα Δ_i είναι τα leading minors του P). Επίσης, αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε $P \succeq 0 \Leftrightarrow \det(P_{\kappa, \kappa}) \geq 0$ για κάθε μη-κενό $\kappa \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, όπου $P_{\kappa, \kappa}$ ο τετραγωνικός πίνακας που αποτελείται από όλες τις γραμμές $i \in \kappa$ και όλες τις στήλες $j \in \kappa$ (δηλαδή όλα τα principal minors του P πρέπει να είναι μη-αρνητικά).

I_3 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succ 0$, τότε $\lambda_i(P) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (και αντίστροφα για συμμετρικό P): Εφόσον $P = P^T$ έχουμε $P = U \Lambda U^T$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, και $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U U^T = U^T U = I_n$. Έστω ότι $\lambda_j \leq 0$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Τότε, αν u_j η j -στήλη του U και συμβολίζοντας με e_j την j -στήλη του I_n , θα είχαμε ότι:

$$u_j^T P u_j = u_j^T U \Lambda U^T u_j = e_j^T \Lambda e_j = \lambda_j \leq 0$$

άτοπο, αφού $\|u_j\| = 1$. Αντίστροφα, αν $P = P^T$ έχει θετικές ιδιοτιμές: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, τότε

$$x^T P x = x^T U \Lambda U^T x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|U^T x\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x\|^2 > 0 \quad \text{αν } x \neq 0$$

και άρα $P \succ 0$. Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι: $P \succeq 0 \Leftrightarrow \lambda_i(P) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

I_4 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succeq 0$ τότε $x^T P x = 0 \Leftrightarrow P x = 0$: Η αριστερή συνεπαγωγή είναι προφανής. Έστω $x^T P x = 0$ για κάποιον πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succeq 0$. Γράφουμε $P = U \text{diag}\{\Lambda_1, 0\} U^T$ όπου $\Lambda_1 = \text{diag}(\Lambda_1) \succ 0$ και $U U^T = U^T U = I_n$. Έστω $U = [U_1 \mid U_2]$, $U_1 = \mathbb{R}^{n \times r}$, $r = \text{rank}(P)$. Τότε $P x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(U_2)$. Επίσης $P = U_1 \Lambda_1 U_1^T = U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T := P^{1/2} P^{1/2}$ όπου $P^{1/2} = U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T = (P^{1/2})^T \succeq 0$, $\Lambda_1^{1/2} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\}$. Επομένως $x^T P x = 0 \Leftrightarrow \|P^{1/2} x\| = 0 \Leftrightarrow P^{1/2} x = 0 \Leftrightarrow P x = 0$.

I_5 : Αν $P(t) = \int_0^t Q(\tau) Q^T(\tau) d\tau$, $t > 0$ και $Q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$, τότε $P(t) = P^T(t) \succeq 0$ και $\int_0^t x^T P(\tau) x d\tau = \int_0^t \|Q^T(\tau) x\|^2 d\tau$. Επομένως $x^T P(t) x = 0 \Leftrightarrow Q^T x(\tau) = 0$ για κάθε $\tau \in [0, t]$ λόγω συνέχειας. Επίσης $t_2 \geq t_1 \Rightarrow P(t_2) \succeq P(t_1)$ (που εξ'ορισμού σημαίνει ότι $P(t_2) - P(t_1) \succeq 0$).

I_6 : Έστω

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

όπου $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $P_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m < n$. Τότε: $P \succ 0 \Leftrightarrow (P_{22} \succ 0 \text{ και } P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T \succ 0)$. Ο πίνακας $P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T$ λέγεται συμπλήρωμα Schur του P_{22} .

1.2 Κατά κατεύθυνση παράγωγος, κανόνας αλυσίδας

Έστω Ω μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz και $V \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, ορίζουμε την συνεχή συνάρτηση $V_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ως

$$V_f(\mathbf{z}) = \langle (\nabla V)(\mathbf{z}), \mathbf{f}(\mathbf{z}) \rangle := \frac{\partial V(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^T} \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{z})}{\partial z_i} f_i(\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega$$

όπου ∇V η κλίση του V και f_j η j -συνιστώσα της $\mathbf{f}$. Για κάθε $\mathbf{z} \in \Omega$, η $V_f(\mathbf{z})$ είναι η κατά κατεύθυνση παράγωγος στο σημείο $\mathbf{z}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ (όχι κανονικοποιημένη σε μοναδιαίο διάνυσμα). Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την παρακάτω διαδικασία: Έστω οτ σταθεροποιούμε το $\mathbf{z}$ σε αυθαίρετο σημείο του Ω και έστω $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(\eta) := \mathbf{z} + \eta \mathbf{f}(\mathbf{z})$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στην σύνθετη συνάρτηση $V \circ \mathbf{g}$ έχουμε

$$(V \circ \mathbf{g})(0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{z} + \eta \mathbf{f}(\mathbf{z})) - V(\mathbf{z})}{\eta} = \langle \nabla V(\mathbf{g}(0)), \mathbf{g}'(0) \rangle = \langle \nabla V(\mathbf{z}), \mathbf{f}(\mathbf{z}) \rangle = V_f(\mathbf{z})$$

Έστω το σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, όπου f τοπικά Lipschitz στο Ω . Έστω I το μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης, $0 \in I$, και έστω ότι η λύση του συστήματος $x(t) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ περιέχεται στο Ω για κάθε $t \in I$. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$(V \circ \mathbf{x})'(t) = \langle (\nabla V)(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = \langle (\nabla V)(\mathbf{x}(t)), \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \rangle \quad \forall t \in I$$

και επομένως

$$(V \circ \mathbf{x})'(t) = V_f(\mathbf{x}(t)) \quad \forall t \in I$$

Θα λέμε ότι η $V_f(\mathbf{x}(t))$ είναι η παράγωγος της V κατά μήκος της λύσης του συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Παρατηρούμε ότι δεν χρειάζεται να έχουμε γνώση της λύσης του συστήματος $x(t) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ για να υπολογίσουμε την $V_f(\mathbf{x}(t))$. Συμβατικά θα γράφουμε (σύμφωνα με τον καθιερωμένο συμβολισμό) $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) := V_f(\mathbf{x}(t))$.

2.1 Θεωρία ευστάθειας Lyapunov

Έστω διαφορικό σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Αν η λύση του συστήματος υπάρχει και είναι μοναδική στο διάστημα $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ θα συμβολίζεται ως $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$.

Ορισμός: Αν $M(x, d)$ μετρικός χώρος, το σύνολο V είναι γειτονιά του σημείου p αν υπάρχει ανοικτή σφαίρα με κέντρο p και ακτίνα r , δηλ. $B_r(p) = \{x \in X : d(x, p) < r\}$, που περιέχεται στο V . Το σύνολο V δεν είναι απαραίτητα ανοικτό - ορίζουμε ανοικτή/κλειστή/συμπαγή γειτονιά αν το V είναι αντίστοιχα ανοικτό/κλειστό/συμπαγές υποσύνολο του X .

Ορισμός: Έστω σύστημα $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, όπου $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Το διάνυσμα $\mathbf{x}^*$ λέγεται σημείο ισορροπίας του συστήματος αν $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Ορισμός: Σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ του συστήματος $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, όπου $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται:

1. Ευσταθές (κατά Lyapunov) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon \text{ για κάθε } t \geq 0$$

2. Ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) και η παράμετρος δ στο (1) μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^* \text{ καθώς } t \rightarrow \infty$$

3. Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αν

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^* \text{ καθώς } t \rightarrow \infty \text{ για κάθε } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Θεώρημα (Lyapunov): Έστω το σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, με λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$. Έστω $\mathbf{x}^*$ σημείο ισορροπίας (δηλ. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$). Έστω επίσης $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (ανοικτή) γειτονιά του $\mathbf{x}^*$ και έστω ότι η $\mathbf{f}$ είναι τοπικά Lipschitz στο Ω . Αν υπάρχει $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

(i) $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ (συνεχώς διαφορίσιμη στο Ω).

(ii) Η V είναι θετικά ορισμένη στο Ω ως προς το $\mathbf{x}^*$ (δηλ. $V(\mathbf{x}^*) = 0$ και $V(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$).

(iii) $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$ αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω ως προς $\mathbf{x}^*$ (δηλ. $\dot{V}(\mathbf{x}^*) = 0$ και $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ αν $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$).

τότε $\mathbf{x}^*$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας (κατά Lyapunov). Αν επιπλέον:

(iv) $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$

αρνητικά ορισμένη στο Ω ως προς $\mathbf{x}^*$ (δηλ. $\dot{V}(\mathbf{x}^*) = 0$ και $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ αν $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$) τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Παρατήρηση: Αν η συνάρτηση V ικανοποιεί τις σχέσεις (i)-(iii), τότε λέγεται συνάρτηση Lyapunov. Αν επιπλέον ικανοποιεί και την (iv) τότε λέγεται ισχυρή συνάρτηση Lyapunov.

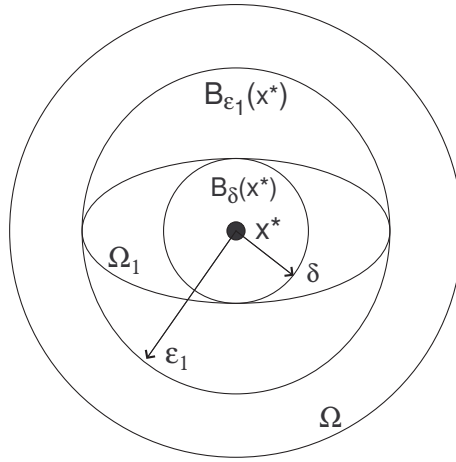
Απόδειξη: Έστω ότι η V είναι συνάρτηση Lyapunov.

- Θα δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$ για κάθε $t \geq 0$ και άρα $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov).
- Εφόσον Ω (ανοικτή) γειτονιά του $\mathbf{x}^*$ υπάρχει $\epsilon_1 > 0$ (αρκούντως μικρό) τέτοιο ώστε $B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) \subseteq \Omega$. Δοθέντος $\epsilon > 0$, επιλέγουμε $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon$ με την παραπάνω ιδιότητα.
- Εφόσον V συνεχής στο Ω και $\partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει

$$\alpha = \min_{\mathbf{x} \in \partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)} V(\mathbf{x})$$

Έχουμε $\alpha > 0$ (γιατί αν $\mathbf{x} \in \Omega$, $V(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$)

- Ορίζουμε: $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) : V(\mathbf{x}) < \alpha\}$. Εφόσον V συνεχής, το Ω_1 είναι ανοικτό και $\mathbf{x}^* \in \Omega_1$ (αφού $V(\mathbf{x}^*) = 0$). Επίσης, το Ω_1 περιέχεται στο $B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ γιατί $V(\mathbf{x}) < \alpha$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega_1$ και εξ' ορισμού $V(\mathbf{x}) \geq \alpha$ στο $\partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$.
- Εφόσον Ω_1 ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}^*) \subseteq \Omega_1$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι κατάλληλο δ , δηλαδή $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ για κάθε $t \geq 0$:
- Εφόσον $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*)$ έχουμε $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) \leq V(\mathbf{x}_0) < \alpha$ για κάθε $t \geq 0$ (γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ στο Ω).
- Επίσης είναι αδύνατον να έχουμε $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ για κάποιο $t > 0$ (εφόσον στο $\partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ έχουμε εξ' ορισμού $V(\mathbf{x}) \geq \alpha$).
- Άρα $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon_1 \leq \epsilon$ για κάθε $t \geq 0$ και το $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov).
- Επιπλέον, εφόσον f τοπικά Lipschitz στο Ω και $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \notin \bar{B}_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$, το μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για $t \geq 0$ είναι όλο το $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.



Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι ισχύει η αυστηρότερη συνθήκη: $\dot{V}(\mathbf{x}_0) = 0$ και $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ για $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

- Θα δείξουμε ότι $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$, δηλ. ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Εφόσον $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov) η λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$, $t \geq 0$, είναι φραγμένη (γιατί $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon_1$ για κάθε $t \geq 0$).
- Έστω (για αντίφαση) ότι $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \not\rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Τότε υπάρχει $\mu > 0$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $t_k \geq 0$, $t_k \rightarrow \infty$, τέτοια ώστε:

$$\|\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| > \mu > 0, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}$$

- Εφόσον $(\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_0))_{k \in \mathbb{N}_0}$ φραγμένη, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

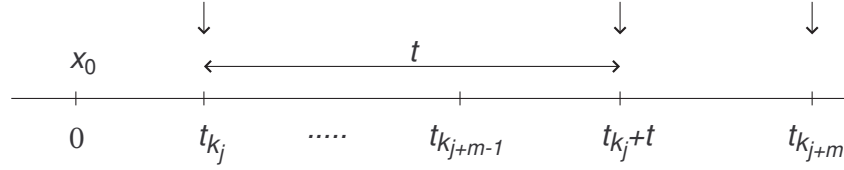
$$\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}_\infty \text{ καθώς } j \rightarrow \infty$$

Λόγω της ανισότητας $\|\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| > \mu > 0$, έχουμε ότι $\mathbf{x}_\infty \neq \mathbf{x}^*$.

- Εφόσον η συνάρτηση $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$, $t \geq 0$, είναι φθίνουσα έχουμε για κάθε $t \geq 0$:

$$V(\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t_{k_j} + t; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t_{k_j+m}; \mathbf{x}_0))$$

όπου επιλέξαμε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $t_{k_j} + t < t_{k_j+m}$.



- Επομένως:

$$V(\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0))) \geq V(\mathbf{x}(t_{k_j+m}; \mathbf{x}_0))$$

για κάθε $t \geq 0$.

- Στο όριο $j \rightarrow \infty$, $t_{k_j} \rightarrow \infty$ και

$$V(\mathbf{x}_\infty) \geq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty)) \geq V(\mathbf{x}_\infty)$$

για κάθε $t \geq 0$.

- Άρα $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ σταθερή και ίση με $V(\mathbf{x}_\infty)$ για κάθε $t \geq 0$. Συνεπώς $\dot{V}(\mathbf{x}_\infty) = 0$ που είναι άτοπο, γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}_\infty) < 0$ αφού $\mathbf{x}_\infty \neq \mathbf{x}^*$ ($\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$).
- Παρατηρούμε ότι: Τα όρια $V(\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)) \rightarrow V(\mathbf{x}_\infty)$ και $V(\mathbf{x}(t_{k_j+m}; \mathbf{x}_0)) \rightarrow V(\mathbf{x}_\infty)$ ισχύουν λόγω συνέχειας της V , ενώ το όριο $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0))) \rightarrow V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ ισχύει λόγω συνέχειας της λύσης ως προς τις αρχικές συνθήκες.

□

Παράδειγμα: Έστω βαθμωτό σύστημα $x' = -g(x)$, όπου $g(x)$ τοπικά Lipschitz στο $\Omega = (-a, a) \subseteq \mathbb{R}$ και

$$g(0) = 0, \quad xg(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \Omega \setminus \{0\}$$

Το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $x^* = 0$. Έστω

$$V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x) = \int_0^x g(y)dy, \quad x \in \Omega$$

υποψήφια συνάρτηση Lyapunov. Εφόσον η g είναι συνεχής στο Ω η V είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Επίσης, $V(0) = 0$ και

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}(-g(x)) = g(x)(-g(x)) = -g^2(x) < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \Omega \setminus \{x^*\}$$

και επομένως το $x^* = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα (εκκρεμές με τριβή): Το δυναμικό σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2$$

όπου x_1 η γωνία του εκκρεμούς με την κατακόρυφο, x_2 η γωνιακή ταχύτητα, l το μήκος του εκκρεμούς, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και $b > 0$ ο συντελεστής τριβής. Έστω $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 < |\pi|\}$. Το μοναδικό σημείο ισορροπίας στο Ω είναι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Επιλέγουμε αρχικά ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την συνολική ενέργεια του συστήματος:

$$V(\mathbf{x}) = \text{K.E.} + \Delta.\text{E.} = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1)$$

Έχουμε ότι $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $V(\mathbf{0}) = 0$ και V θετικά ορισμένη στο Ω ως προς $\mathbf{x}^*$. Επίσης,

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x'_2 = mglx_2 \sin x_1 + ml^2 x_2 \left(-\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2 \right) = -ml^2 bx_2^2 \leq 0$$

Έχουμε $V(\mathbf{x}) < 0$ αν $x_2 \neq 0$ και $V(\mathbf{x}) = 0$ αν $x_2 = 0$, και επομένως όταν $b > 0$ η $\dot{V}$ είναι αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω και το συμπέρασμα σύμφωνα με το Θεώρημα Lyapunov είναι ότι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov (όχι ασυμπτωτικά).

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει όταν δεν υπάρχει τριβή ($b = 0$). Σε αυτή την περίπτωση η $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ είναι πάλι μόνο αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω και επομένως το Θεώρημα Lyapunov εγγυάται πάλι μόνο ευστάθεια (κατά Lyapunov), όχι ασυμπτωτική. Στην περίπτωση αυτή το συμπέρασμα είναι το αναμενόμενο: Εφόσον $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega$, η συνάρτηση $V(\mathbf{x}(t))$ είναι σταθερή σε κάθε σημείο της τροχιάς $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$, $t \geq 0$, και επομένως η $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ δεν μπορεί να συγκλίνει στο $\mathbf{x}_0$ αν $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}^*$. Από φυσική άποψη όταν δεν καταναλώνεται ενέργεια (σε συνθήκες απουσίας τριβής), η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή κατά την κίνηση του εκκρεμούς και η μάζα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος ταλάντωσης γύρω από την γωνία ισορροπίας $x_1 = 0$. Εφόσον μπορούμε να περιορίσουμε την νόρμα $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$, $t \geq 0$, σε αυθαίρετα μικρή ακτίνα $\epsilon > 0$ (επιλέγοντας αρχική κατάσταση $\mathbf{x}_0$ αρκούντως κοντά στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$) αλλά η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ δεν συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, έχουμε ευστάθεια (κατά Lyapunov) αλλά όχι ασυμπτωτική. Αντίθετα, στην περίπτωση που υπάρχει τριβή στο σύστημα ($b > 0$), η συνολική ενέργεια του συστήματος διαρκώς μειώνεται όσο αυτό είναι σε κίνηση και επομένως το σημείο ισορροπίας πρέπει να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Υπάρχουν δύο τρόποι για να καταλήξουμε στο ισχυρότερο αυτό συμπέρασμα ασυμπτωτικής ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ στην περίπτωση $b > 0$. Ο πρώτος, όπως θα δείξουμε εδώ, είναι η εφαρμογή του Θεωρήματος με χρήση μίας πιο γενικής συνάρτησης Lyapunov. Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα πιο ισχυρό κριτήριο ευστάθειας που βασίζεται στη αρχή του αναλλοίωτου (invariance principle) του Lassale και το οποίο θα παρουσιάσουμε αργότερα.

Έστω νέα υποψήφια συνάρτηση Lyapunov είναι της μορφής:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \frac{g}{l} (1 - \cos x_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{g}{l} (1 - \cos x_1)$$

Θα επιλέξουμε τον πίνακα P ως θετικά ορισμένο ($P = P^T \succ 0$), ώστε η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$ να είναι θετικά ορισμένη στο Ω , συνθήκη που ισοδυναμεί με τις ανισότητες $p_{11} > 0$ και $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$. Επομένως η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov είναι:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2) + \frac{g}{l} (1 - \cos x_1)$$

Παρατηρούμε ότι η νέα $V(\mathbf{x})$ είναι ίση με την συνολική ενέργεια του συστήματος αν επιλέξουμε $p_{11} = p_{12} = 0$ και $p_{22} = ml^2$. Έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = p_{12}x_1 + p_{22}x_2$$

Επομένως:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x'_2 = \left(p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 \right) x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2) \left(-\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2 \right)$$

Ισοδύναμα:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{g}{l} (1 - p_{22}) x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l} p_{12} x_1 \sin x_1 + (p_{11} - p_{12}b) x_1 x_2 + (p_{12} - p_{22}b) x_2^2$$

Για να απλοποιήσουμε την παραπάνω έκφραση επιλέγουμε $p_{22} = 1$ και $p_{11} = p_{12}b$ (ώστε να απαλλείψουμε τον πρώτο και τον τρίτο όρο που έχουν τότε θετικό και τότε αρνητικό πρόσημο). Επομένως έχουμε

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{g}{l}p_{12}x_1 \sin x_1 + (p_{12} - b)x_2^2$$

Με τις επιλογές αυτές οι ανισότητες που ισοδυναμούν με την συνθήκη $P \succ 0$ είναι: $p_{11} > 0 \Rightarrow p_{12} > 0$ και $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \Rightarrow b - p_{12} > 0$. Άρα πρέπει να έχουμε $0 < p_{12} < b$. Επιλέγοντας, π.χ. $p_{12} = \frac{b}{2}$, εξασφαλίζουμε ότι:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{2}x_1^2 + bx_1x_2 + x_2^2 \right) + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

είναι θετικά ορισμένη στο Ω (ως προς $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$) και ότι

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{gb}{l^2}x_1 \sin x_1 - \frac{b}{2}x_2^2$$

είναι αρνητικά ορισμένη στο Ω (ως προς $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$). Άρα απο το Θεώρημα Lyapunov συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

2.2 Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια

Από την απόδειξη του Θερήματος Lyapunov η περιοχή σύγκλισης (έλκυσης)

$$\Pi.\Sigma. := \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*\}$$

περιέχει σφαίρα μέγιστης ακτίνας δ και κέντρου $\mathbf{x}^*$:

$$B_\delta(\mathbf{x}^*) \subseteq \Omega_1 = \{\mathbf{x} \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) : V(\mathbf{x}) < \alpha\} \subseteq B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) \text{ όπου } \alpha = \min_{\mathbf{x} \in \partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)} V(\mathbf{x})$$

Γιά να πετύχουμε ολική ασυμπτωτική ευστάθεια θα πρέπει να μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta > 0$ αυθαίρετα μεγάλο. Εκτός από το ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov πρέπει να ισχύουν σε όλο το $\Omega = \mathbb{R}^n$, μία επιπλέον συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται (η συνάρτηση Lyapunov να είναι ακτινικά μη-φραγμένη, όπως ορίζεται στην διατύπωση του παρακάτω Θεωρήματος).

Θεώρημα (ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας): Έστω ότι όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov ικανοποιούνται για $\Omega = \mathbb{R}^n$. Αν $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov και επιπλέον:

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \text{ καθώς } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \quad (V \text{ ακτινικά μη-φραγμένη})$$

τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παρατήρηση: Αν $\mathbf{x}^*$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές τότε $\mathbf{x}^*$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη: Η απόδειξη ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

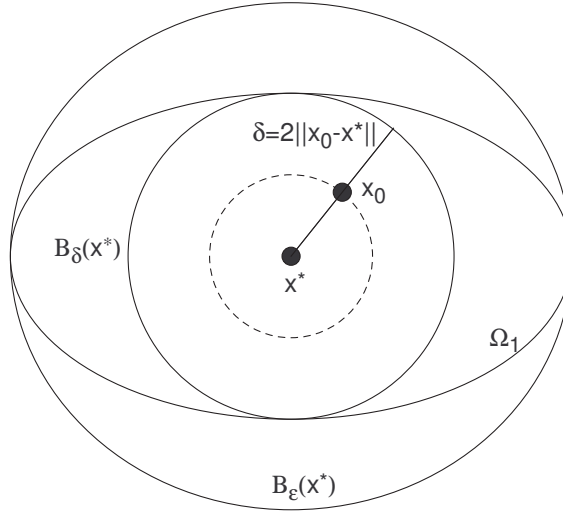
- Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (αυθαίρετο) και έστω $\delta = 2\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|$ (οπότε $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*)$).
- Έστω

$$\alpha = \max_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \delta} V(\mathbf{x}) > 0$$

(Εφόσον V συνεχής και $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \delta\}$ συμπαγές, η μέγιστη τιμή είναι καλά ορισμένη και είναι θετική γιατί $V(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$).

- Ορίζουμε $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) < \alpha\}$. Τότε Ω_1 φραγμένο, εφόσον V ακτινικά μη-φραγμένη συνάρτηση. Επομένως

$$\epsilon_1 := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \in \mathbb{R} \quad (\text{πεπερασμένο})$$



- Έστω $\epsilon > \epsilon_1$. Τότε οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov ικανοποιούνται και επομένως:
 - (i) $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ για κάθε $t \geq 0$, και
 - (ii) $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$.
- Εφόσον $\mathbf{x}_0$ αυθαίρετο, το δ είναι αυθαίρετα μεγάλο και $\mathbf{x}^*$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. $\square$

Παράδειγμα: Έστω σύστημα με εξισώσεις:

$$x_1' = -x_1 + x_2^2, \quad x_2' = -x_1 x_2 - x_2$$

Σημεία ισορροπίας:

$$x_1 = x_2^2 \text{ και } x_2(x_1 + 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ ή } x_1 = -1$$

Όμως $x_1 \neq 1$ (εφόσον $x_1 = x_2^2$). Άρα $x_2 = 0$ και επομένως το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Έστω $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 = \|\mathbf{x}\|^2$. Τότε $V(\mathbf{x})$ θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ (ως προς $\mathbf{x}^*$ και ακτινικά μη-φραγμένη. Επίσης:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2' = 2x_1(-x_1 + x_2^2) + 2x_2(-x_1 x_2 - x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2) = -2\|\mathbf{x}\|^2$$

και άρα $\dot{V}$ αρνητικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$. Άρα $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Η συνάρτηση $V(x_1, x_2) = x_1 + e^{-x_1} + e^{x_2} - x_2 - 2$ είναι ακτινικά μη-φραγμένη: Έχουμε

$$V(x_1, \lambda x_1) = x_1 + e^{-x_1} + e^{\lambda x_1} - \lambda x_1 - 2 = (1 - \lambda)x_1 + e^{-x_1} + e^{\lambda x_1} - 2$$

και επομένως για $\lambda \neq 0$:

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V(x_1, \lambda x_1) = +\infty$$

Επίσης

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V_1(x_1) = \lim_{|x_2| \rightarrow \infty} V_2(x_2) = +\infty$$

Επομένως το σημείο $(x_1, x_2) = (0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

2.3 Φραγμένες και μη-φραγμένες επιφάνειες Lyapunov

Από την απόδειξη ασυμπτωτικής ευστάθειας του Θεωρήματος Lyapunov προκύπτει ότι αν η επιφάνεια στάθμης:

$$\bar{\Omega}_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$$

είναι φραγμένη, δηλαδή $\bar{\Omega}_\alpha \subseteq B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ για κάποιο $\epsilon > 0$, τότε το $\bar{\Omega}_\alpha$ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο, δηλαδή:

$$\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}_\alpha \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \bar{\Omega}_\alpha \quad \text{για κάθε } t \geq 0$$

(γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$ στο $\bar{\Omega}_\alpha$). Άρα, αν $B_\delta(\mathbf{x}^*) \subseteq \bar{\Omega}_\alpha \subseteq B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ τότε $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ και επομένως $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov). Επιπλέον αποδεικνύεται ότι $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ και το $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για μικρές τιμές του $\alpha > 0$ η επιφάνεια στάθμης $\bar{\Omega}_\alpha$ είναι φραγμένη (εφόσον η V είναι συνεχής και θετικά ορισμένη). Για παράδειγμα, αν για κάποιο $\epsilon > 0$ έχουμε:

$$\min_{\mathbf{x} \in \partial B_\epsilon(\mathbf{x}^*)} V(\mathbf{x}) = \alpha$$

τότε $\bar{\Omega}_\alpha \subseteq B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ και άρα $\bar{\Omega}_\beta$ φραγμένη για κάθε $\beta \in [0, \alpha]$. Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει αναγκαστικά για μεγάλες τιμές του α . Γενικά,

$$\bar{\Omega}_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) \leq c\} \subseteq B_r(\mathbf{x}^*) \Rightarrow c < \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x})$$

Παρατηρούμε ότι αν $r_2 \geq r_1$, τότε

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq r_2\} \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq r_1\}$$

και επομένως

$$\inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r_1} V(\mathbf{x}) \leq \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r_2} V(\mathbf{x})$$

δηλαδή η συνάρτηση

$$\psi(r) := \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x})$$

είναι αύξουσα. Αν:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x}) = l < \infty$$

τότε η $\bar{\Omega}_c$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν $c < l$. Αν $l = \infty$, τότε η V είναι ακτινικά μη φραγμένη και κάθε επιφάνεια στάθμης $\bar{\Omega}_c$, $c \in \mathbb{R}_+$, είναι φραγμένη.

Παράδειγμα: Έστω

$$V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

που είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ ως προς το $(0,0)$. Για μεγάλες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ οι καμπύλες στάθμης της V δεν είναι φραγμένες. Επομένως παρόλο που η $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$ είναι φθίνουσα κατά μήκος της λύσης $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ αυτό δεν εγγυάται ότι $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Έστω $x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Τότε

$$\hat{V}_r(x_1) := V\left(x_1, \pm\sqrt{r^2 - x_1^2}\right) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + r^2 - x_1^2 = 1 + r^2 - \left(\frac{1}{1+x_1^2} + x_1^2\right)$$

όπου $0 \leq x_1^2 \leq r^2$. Επομένως για σταθεροποιημένο $r > 0$,

$$\min_{|x_1| \leq r} V_r(x_1) = 1 + r^2 - \max_{|x_1| \leq r} \left(\frac{1}{1+x_1^2} + x_1^2\right) = 1 + r^2 - r^2 - \frac{1}{1+r^2} = 1 - \frac{1}{1+r^2} = \frac{r^2}{1+r^2}$$

Συνεπώς:

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x}) = \min_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{1+r^2}$$

και $\operatorname{argmin} V(\mathbf{x}) = \{(r, 0), (-r, 0)\}$. Εφόσον

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|=r_2} V(\mathbf{x}) \geq \inf_{\|\mathbf{x}\|=r_1} V(\mathbf{x}) \quad \text{όταν } r_2 \geq r_1,$$

η συνάρτηση

$$\psi(r) := \inf_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x})$$

είναι αύξουσα και

$$\inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x}) = \inf_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{1+r^2}$$

Επομένως:

$$l = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{1+r^2} = 1$$

και άρα $\Omega_c := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V(\mathbf{x}) < c\}$ φραγμένη αν και μόνο αν $c < l = 1$.

2.4 Αρχή του αναλλοίωτου και Θεώρημα Lasalle

Ορισμός: Το σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται θετικά αναλλοίωτο για το σύστημα $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, αν για κάθε λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ με $\mathbf{x}_0 \in S$ ισχύει ότι $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in S$ για κάθε $t \geq 0$.

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad x'_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

Έστω $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Τότε:

$$\begin{aligned} (r^2)' &= 2rr' = (x_1^2 + x_2^2)' = 2x_1x'_1 + 2x_2x'_2 \\ &= 2x_1x_2 + 2x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) - 2x_2x_1 + 2x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

Επομένως: $r' = r(1 - r^2)$. Αν $r(0) = 1$ τότε $r'(0) = 0$ και επομένως $r(t) = 1$ για κάθε $t \geq 0$. Παρόμοια, $0 < r(0) < 1 \Rightarrow 0 < r(t) < 1$ για κάθε $t \geq 0$ και $r(0) > 1 \Rightarrow r(t) > 1$ για κάθε $t \geq 0$. Επομένως, αν $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$, τα σύνολα $D \setminus \{(0,0)\}$, $\partial D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ (ευσταθής οριακός κύκλος) και $\mathbb{R}^2 \setminus (D \cup \partial D)$ είναι θετικά αναλλοίωτα σύνολα για το σύστημα. Το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο.

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $\mathbf{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{x}$ συγχλίνει σε κάποιο σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ αν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{dist}(\mathbf{x}(t), S) = 0 \quad \text{όπου } \operatorname{dist}(\mathbf{x}, S) := \inf_{\mathbf{s} \in S} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$$

Παρατήρηση: Η έννοια της σύγκλισης συνάρτησης σε σύνολο S , δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι η συνάρτηση συγχλίνει στο ίδιο σημείο του S ή ότι το όριο της συνάρτησης υπάρχει (εκτός αν το S είναι μονοσύνολο!).

Παράδειγμα: Στο προηγούμενο παράδειγμα, η λύση του συστήματος $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ με $\mathbf{x}_0 \in D$, $\mathbf{x}_0 \in \partial D$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus (D \cup \partial D)$, αντίστοιχα, συγχλίνει στον ευσταθή οριακό κύκλο ∂D .

Συνεχίζουμε την ενότητα αυτή με ένα εισαγωγικό παράδειγμα που προσπαθεί να διαφωτίσει το Θεώρημα Lasalle που αποδεικνύεται στην συνέχεια.

Παράδειγμα: Εκκρεμές με τριβή (συνέχεια). Υπενθυμίζουμε ότι οι εξισώσεις του συστήματος είναι:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2$$

όπου $b > 0$ ο συντελεστής τριβής. Απο προηγούμενη ανάλυση, επιλέγοντας ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την συνολική ενέργεια του συστήματος:

$$V(\mathbf{x}) = \text{K.E.} + \Delta.\text{E.} = \frac{1}{2}ml^2\dot{x}_2^2 + mgl(1 - \cos x_1) \Rightarrow \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = -mb\dot{x}_2^2 \leq 0$$

συμπεραίνουμε ότι: Η συνάρτηση V είναι θετικά ορισμένη στο $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \pi\}$ ως προς το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Η συνάρτηση $\dot{V}$ είναι (μόνο) αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω , εφόσον έχουμε ότι $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ στον x_1 άξονα του επιπέδου (x_1, x_2) , ενώ σε κάθε άλλο σημείο του επιπέδου το πρόσημο της $\dot{V}$ είναι αρνητικό. Από το Θεώρημα Lyapunov συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι (απλά) ευσταθές (κατά Lyapunov) και όχι ασυμπτωτικά, όπως είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Πράγματι, αν επιλέξουμε συνάρτηση Lyapunov της μορφής:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{2}x_1^2 + bx_1x_2 + x_2^2 \right) + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1), \quad P = \begin{bmatrix} \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{bmatrix} = P^T \succ 0$$

η παράγωγος της V κατά την κατεύθυνση της λύσης:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = -\frac{g}{l}x_1 \sin x_1 - \frac{b}{2}x_2^2$$

είναι αρνητικά ορισμένη στο Ω (ως προς το $\mathbf{x}^*$), που συνεπάγεται ασυμπτωτική ευστάθεια του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ όπως περιμένουμε (εφόσον λόγω τριβής η ενέργεια του συστήματος συνεχώς μειώνεται όσο αυτό είναι σε κίνηση). Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει από τη εφαρμογή του Θεωρήματος Lasalle που αποδεικνύεται αργότερα σε αυτή την ενότητα, με χρήση της “φυσικής” συνάρτησης Lyapunov, δηλαδή την συνολική ενέργεια του συστήματος.

Έστω $\bar{K}$ το σύνολο των διανυσμάτων κατάστασης για τα οποία η τιμή της $V(\mathbf{x})$ δεν υπερβαίνει κάποιο σταθερό ποσοστό της συνολικής ενέργειας του συστήματος στο σημείο $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$, δηλαδή,

$$\bar{K} = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega : V(\mathbf{x}) \leq (1 - \gamma)V \left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \pi, V(\mathbf{x}) \leq (1 - \gamma)V \left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\}$$

όπου $\gamma \in (0, 1)$. Το σύνολο $\bar{K}$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του Ω καθώς και γειτονιά του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο, καθώς η ενέργεια του εκκρεμούς δεν αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου. Έστω επίσης:

$$S = \{\mathbf{x} \in \bar{K} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$$

Αν $\mathbf{x}_0 \in \bar{K}$ τότε διαισθητικά περιμένουμε ότι η τροχιά $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ θα συγκλίνει στο S καθώς $t \rightarrow \infty$, αφού η ενέργεια του συστήματος μειώνεται όσο αυτό είναι σε κίνηση. Διαισθητικά επίσης, το σημείο ισορροπίας δεν μπορεί να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν υπάρχει λύση του συστήματος (διαφορετική από την σταθερή λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, $t \geq 0$) που περιέχεται ταυτοτικά στο S καθώς αυτό είναι το μόνο υποσύνολο του $\bar{K}$ στο οποίο η ενέργεια του συστήματος Lyapunov $V(\mathbf{x}(t))$ παραμένει σταθερή (εφόσον μόνο στο S ισχύει ότι $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = 0$). Από φυσική άποψη αυτό είναι αδύνατον, γιατί τα σημεία του x_1 -άξονα αντιστοιχούν στα άκρα ταλάντωσης γύρω από το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$.

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και από τις εξισώσεις του συστήματος: Αν υπήρχε λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in S$ για κάθε $t \geq 0$, τότε $x'_1(0) = 0$ για κάθε $t \geq 0$, δηλαδή το $x_1(t)$ θα ήταν σταθερό για κάθε $t \geq 0$ και επίσης $x'_2(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Αρα θα είχαμε ότι $\sin x_1 = 0$ και η μόνη τιμή του $x_1 \in (-\pi, \pi)$ για την οποία ισχύει αυτή η ισότητα είναι η τιμή $x_1 = 0$. Άρα η μοναδική λύση που μπορεί να μείνει ταυτοτικά στο S για $t \geq 0$ είναι η σταθερή λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Σε αυτή την περίπτωση το Θεώρημα Lasalle συνεπάγεται ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα (Lasalle): Έστω $\mathbf{x}^*$ σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ όπου f τοπικά Lipschitz και $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση Lyapunov σε γειτονιά Ω του $\mathbf{x}^*$. Τότε το Ω περιέχει κλειστή

και φραγμένη θετικά αναλλοίωτη γειτονιά $\bar{K}$ του $\mathbf{x}^*$ και για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \bar{K}$ η λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ του συστήματος συγκλίνει στο σύνολο:

$$S = \{\mathbf{x}_0 \in \bar{K} : \dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0\}$$

Το σύνολο S είναι διάφορο του κενού και θετικά αναλλοίωτο. Επιπλέον, αν $S = \{\mathbf{x}^*\}$ τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: Η κατασκευή του $\bar{K}$ είναι παρόμοια με αυτήν του Ω_1 στην απόδειξη του Θεωρήματος Lyapunov: Εφόσον Ω είναι γειτονιά του $\mathbf{x}^*$, υπάρχει, εξ' ορισμού σφαίρα $B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ με αρκούντως μικρή ακτίνα $\epsilon > 0$ που περιέχεται στο Ω . Έστω

$$\alpha = \min_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| = \epsilon} V(\mathbf{x})$$

Τότε $\alpha > 0$. Τότε το σύνολο

$$\bar{K} := \{\mathbf{x} \in B_\epsilon(\mathbf{x}^*) : V(\mathbf{x}) \leq \alpha/2\}$$

έχει τις επιθυμητές ιδιότητες: Είναι φραγμένη και κλειστή γειτονιά του $\mathbf{x}^*$ και εφόσον $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq 0$ είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο.

Το σύνολο S είναι διάφορο του κενού ($\mathbf{x}^* \in S$). Έστω

$$\mathbf{x}_0 \in S \Rightarrow \dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0$$

Τότε, λόγω του ότι το $\bar{K}$ είναι θετικά αναλλοίωτο, $\mathbf{y} := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \bar{K}$ για κάθε $t \geq 0$. Έστω $s \geq 0$ (αυθαίρετο). Τότε:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(s; \mathbf{y})) = \dot{V}(\mathbf{x}(s; \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))) = \dot{V}(\mathbf{x}(t+s; \mathbf{x}_0)) = 0$$

εφόσον $\mathbf{x}_0 \in S$ και $t+s \geq 0$. Εφόσον $s \geq 0$ αυθαίρετο, σε κάθε σημείο της τροχιάς

$$\mathcal{O}^+(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x}(s; \mathbf{y}) : s \geq 0\}$$

έχουμε $\dot{V}(\mathbf{x}(s; \mathbf{y})) = 0$ και άρα $\mathbf{y} \in S$. Άρα αν $\mathbf{x}_0 \in S$, όλη η τροχιά $\{\mathbf{y} = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), t \geq 0\}$ είναι εντός του S και επομένως S θετικά αναλλοίωτο.

Στην συνέχεια, έστω ότι $\mathbf{x}_0 \in \bar{K}$. Εφόσον $\bar{K}$ θετικά αναλλοίωτο, όλη η τροχιά $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ παραμένει εντός του $\bar{K}$ για κάθε $t \geq 0$. Υποθέτουμε (για αντίφαση) ότι η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ δεν συγκλίνει στο σύνολο S . Τότε, καθώς η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένη, τότε από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει ακολουθία (t_n) με $t_n \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{x}(t_n; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}_\infty \notin S$$

Εφόσον $\bar{K}$ κλειστό, $\mathbf{x}_\infty \in \bar{K}$. Θα δείξουμε ότι $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ είναι σταθερή συνάρτηση της μεταβλητής $t \geq 0$. Έχουμε για $t \geq 0$:

$$V(\mathbf{x}(t_n; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t_n + t; \mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_n; \mathbf{x}_0))) \geq V(\mathbf{x}(t_{n+k}; \mathbf{x}_0)), \quad t \geq 0 \quad (*)$$

(Η πρώτη ανισότητα ισχύει γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ και η δεύτερη προκύπτει πάλι από την ανισότητα $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ σε συνδυασμό με το γεγονός ότι για κάθε (σταθεροποιημένο) $t \geq 0$ (αυθαίρετα μεγάλο) υπάρχει ακέραιος k (αρκούντως μεγάλος) ώστε να έχουμε $t_n + t < t_{n+k}$). Παίρνοντας το όριο $n \rightarrow \infty$ στην (*), έχουμε

$$V(\mathbf{x}_\infty) \geq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty)) \geq V(\mathbf{x}_\infty)$$

λόγω συνέχειας της V και συνέχειας της λύσης $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ ως προς την αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0$. Επομένως, $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ είναι σταθερή σε όλο το $\mathbb{R}_+$, και άρα $\dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty)) = 0$. Όμως τότε $\mathbf{x}_\infty \in S$, που αντιβαίνει στην υπόθεση. Άρα η υπόθεση ότι η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \not\rightarrow S$ είναι λανθασμένη. $\square$

Παρατήρηση: Σε μία διαφορετική εκδοχή του Θεωρήματος Lasalle η υπόθεση ότι η V είναι θετικά ορισμένη δεν είναι απαραίτητη, αν και είναι χρήσιμη στην πράξη γιατί πολλές φορές η κατασκευή της

συνάρτησης Lyapunov εγγυάται την ύπαρξη αναλλοίωτου συνόλου $\bar{K}$. Η απόδειξη του Θεωρήματος Lasalle περιγράφει μία συγκεκριμένη κατασκευή του συνόλου $\bar{K}$. Αν αρκεί να αποδείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια σημείου ισορροπίας, η περιγραφή αυτού του συνόλου δεν είναι απαραίτητη - μόνο η εγγύηση της ύπαρξής του.

Παρατήρηση: Αν το Θεώρημα Lasalle ισχύει με συνάρτηση Lyapunov ακτινικά μη φραγμένη στο $\Omega = \mathbb{R}^n$, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x_1' = 1 - e^{x_2}, \quad x_2' = 1 - e^{x_2 - x_1}$$

Σημεία ισορροπίας:

$$e^{x_2} = 1 \Rightarrow x_2 = 0, \quad 1 - e^{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow e^{x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Άρα $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Έστω υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2), \quad V_1(x_1) = x_1 + e^{-x_1} - 1, \quad V_2(x_2) = e^{x_2} - x_2 - 1$$

Τότε

$$V_1'(x_1) = 1 - e^{-x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad V_1''(x_1) = e^{-x_1} \Rightarrow V_1''(0) = 1 > 0$$

και

$$V_2'(x_2) = e^{x_2} - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \quad V_2''(0) = e^{x_2} \Rightarrow V_2''(0) = 1 > 0$$

Άρα $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ τα ολικά ελάχιστα της $V_1(x_1)$ και της $V_2(x_2)$, αντίστοιχα, και επομένως για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$:

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2) > V_1(0) + V_2(0) = 0$$

Επομένως $V(x_1, x_2)$ είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ ως προς το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Επίσης:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1(t), x_2(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2' = (1 - e^{-x_1})(1 - e^{x_2}) + (e^{x_2} - 1)(1 - e^{x_2 - x_1}) \\ &= 1 - e^{x_2} - e^{-x_1} + e^{x_2 - x_1} + e^{x_2} - e^{2x_2 - x_1} - 1 + e^{x_2 - x_1} \\ &= -e^{-x_1}(1 - 2e^{x_2} + e^{2x_2}) = -e^{-x_1}(1 - e^{x_2})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

και

$$\dot{V}(x_1(t), x_2(t)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0 \Rightarrow e^{x_2} = 1 \text{ για κάθε } t \geq 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0$$

Άρα από το Θεώρημα Lasalle το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Η συνάρτηση Lyapunov $V(x_1, x_2)$ που επιλέξαμε είναι ακτινικά μη-φραγμένη: Θέτοντας $x_2 = \lambda x_1$ έχουμε:

$$V(x_1, \lambda x_1) = (1 - \lambda)x_1 + e^{-x_1} + e^{\lambda x_1} - 2$$

Επομένως, αν $\lambda \neq 0$:

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V(x_1, \lambda x_1) = +\infty$$

Επίσης

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V_1(x_1) = \lim_{|x_2| \rightarrow \infty} V_2(x_2) = +\infty$$

Επομένως η συνάρτηση V είναι ακτινικά μη-φραγμένη και το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.