

# Θεωρία Ελέγχου: Ασκήσεις Ελεγχιμότητα-Παρατηρησιμότητα

## A. Προκαταρκτικά

**A1:** (α) Έστω  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \succeq 0$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix}$$

και έστω ότι  $Q_{11} \succ 0$ . Δείξτε ότι  $\hat{Q} = Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} \succeq 0$  ( $\succ 0$  αν  $Q \succ 0$ ). (Ο πίνακας  $\hat{Q}$  ονομάζεται το συμπλήρωμα Schur του  $Q_{11}$ ).

(β) Έστω η τετραγωνική μορφή:

$$J(u, z) = \begin{bmatrix} u^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}$$

όπου

$$Q = Q^T = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad Q_{11} \succ 0$$

Ορίζουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης:  $V(z) = \min_u J(u, z)$ . Δείξτε ότι  $V(z) = u^T P u$  όπου  $P = P^T \succeq 0$  και εκφράστε τον πίνακα  $P$  σαν συνάρτηση των  $Q_{ij}$ .

**A2:** Έστω  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Δείξτε ότι:

$$\max_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_{\max}(A), \quad \min_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_{\min}(A)$$

όπου  $\lambda_{\max}(A)$  και  $\lambda_{\min}(A)$  είναι η μεγαλύτερη και μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ , αντίστοιχα, και  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ . Ποιά  $x$  μεγιστοποιούν/ελαχιστοποιούν τις παραπάνω συναρτήσεις;

**A3:** Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- (α) Έστω  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ . Δείξτε ότι  $\mathcal{R}(M)$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος υπόχωρος του  $\mathbb{R}^n$  αν και μόνο αν  $AM = MX$  για κάποιον πίνακα  $X \in \mathbb{R}^{k \times k}$ . Δείξτε επιπλέον ότι αν  $\text{Rank}(M) = k$ , τότε κάθε ιδιοτιμή του  $X$  είναι ιδιοτιμή του  $A$  και ότι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ανήκει στον  $\mathcal{R}(M)$ .
- (β) Έστω σύστημα  $\Sigma_i(A, B)$  και  $\Gamma_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$  ο αντίστοιχος πίνακας ελεγχιμότητας. Γνωρίζουμε ότι ο  $\mathcal{R}(\Gamma_c)$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος (σημειώσεις). Βρείτε πίνακα  $X$  τέτοιον ώστε  $A\Gamma_c = \Gamma_c X$ .
- (γ) Δείξτε ότι  $\mathcal{N}_r(N)$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος υπόχωρος αν και μόνο αν  $\mathcal{R}(N^T)$  είναι  $A^T$ -αναλλοίωτος. Άρα βρείτε συνθήκη ώστε ο υπόχωρος  $\mathcal{N}_r(N)$  να είναι  $A$  αναλλοίωτος.
- (δ) Έστω σύστημα  $\Sigma_o(A, C)$  και  $\Gamma_o = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]^T$  ο αντίστοιχος πίνακας παρατηρησιμότητας. Γνωρίζουμε ότι ο  $\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος (σημειώσεις). Βρείτε πίνακα  $Y$  τέτοιον ώστε να ισχύει η συνθήκη στο (γ).

**A4:** Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Av = (\sigma + i\omega)v$ ,  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $v \neq 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \neq 0$ . (α) Δείξτε ότι  $\langle \operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v) \rangle$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος υπόχωρος του  $\mathbb{R}^n$ . (β) Αν  $M = [\operatorname{Re}(v) \mid \operatorname{Im}(v)]$ , βρείτε  $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  τέτοιον ώστε  $AM = MX$ .

**A5:** Δείξτε ότι  $\{v_i\}_{i=1}^m$ ,  $v_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m \leq n$ , είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν ο πίνακας Gramian:  $G = [v_i^T v_j]_{i,j=1,2,\dots,m}$  είναι θετικά ορισμένος.

## B. Ελεγχιμότητα/Παρατηρησιμότητα

**B1:** Έστω σύστημα  $\Sigma(A, B, C)$ :

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] x(t)$$

(α) Είναι το σύστημα πλήρως ελέγξιμο; Να βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος.

(β) Είναι το σύστημα πλήρως παρατηρήσιμο; Να βρεθεί ο μη-παρατηρήσιμος υπόχωρος.

(γ) Εάν το σύστημα δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο να βρεθεί μετασχηματισμός ισοδυναμίας  $Q : z = Q^{-1}x$  ώστε

$$z'(t) = \begin{bmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [\hat{C}_1 \quad 0] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

όπου  $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$  πλήρως παρατηρήσιμο και σε κανονική μορφή παρατηρησιμότητας:

$$\hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

**B2:** Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $b \in \mathbb{R}^n$ . Δείξτε ότι αν περισσότερα από ένα γραμμικά ανεξάρτητα αριστερά ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή, τότε το σύστημα  $\Sigma_i(A, b)$  δεν είναι πλήρως ελέγξιμο (ισοδύναμα, αν για ένα σύστημα μίας εισόδου ο πίνακας  $A$  έχει ιδιοτιμή με γεωμετρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη του ένα, τότε το σύστημα δεν είναι πλήρως ελέγξιμο). Υπόδειξη: Έστω  $v_1^T$  και  $v_2^T$  δύο γραμμικά ανεξάρτητα αριστερά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda$ . Παρατηρήστε ότι αν  $v_1^T b = \alpha_1$  και  $v_2^T b = \alpha_2$ , τότε  $(\alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2)^T b = 0$ .

**B3:** (α) Δείξτε ότι  $\Sigma_i(A, B)$  πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν  $\Sigma_i(A + \alpha I, B)$  πλήρως ελέγξιμο, όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (β) Δείξτε ότι  $\Sigma_i(A, B)$  πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν  $\Sigma_i(A, BB^T)$  πλήρως ελέγξιμο. (γ) Δείξτε ότι  $\Sigma_i(A, B)$  πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν  $\Sigma_i(A + BF, BG)$  πλήρως ελέγξιμο, όπου  $\det G \neq 0$ .

**B4:** Θεωρούμε το σύστημα:  $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$  όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$$

και όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ . Να βρεθεί το χωρίο του επιπέδου (με άξονες τις παραμέτρους  $a$  και  $b$ ) όπου το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο.

**B5:** Έστω  $\Sigma_i(A, b)$  όπου  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  και  $b \in \mathbb{R}^3$ . Έστω  $\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^3$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A$  και  $d = 2$  η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda = \lambda_0$ . Δείξτε με εφαρμογή κριτηρίου ελεγχιμότητας ότι  $\Sigma_i(A, b)$  δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

**B6:** Έστω συστήματα  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  και  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  με διανύσματα κατάστασης  $x_1$  και  $x_2$ , αντίστοιχα, και συναρτήσεις εξόδου  $y_1$  και  $y_2$ , αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις εισόδου των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι  $u_1 - y_2$  και  $u_2 - y_1$ , αντίστοιχα.

- (α) Βρείτε τις εξισώσεις του συστήματος με διάνυσμα κατάστασης:  $[x_1^T \ x_2^T]^T$ , διάνυσμα εισόδου:  $[u_1^T \ u_2^T]^T$  και διάνυσμα εξόδου:  $[y_1^T \ y_2^T]^T$ .
- (β) Αποδείξτε την παρακάτω πρόταση η δώσει αντιπαράδειγμα: "Το σύστημα ανάδρασης στο (α) είναι πλήρως παρατηρήσιμο (πλήρως ελέγξιμο) αν και μόνο αν κάθε ένα από τα συστήματα  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  και  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  είναι πλήρως παρατηρήσιμο (πλήρως ελέγξιμο)".
- (γ) Έστω ότι  $u_2 \equiv 0$  (δηλ. απαλείψτε το  $u_2$  ως συνάρτηση εισόδου από το σύστημα) και επαναλάβετε την ανάλυση σας στο μέρος (β).

**B7** (α) Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Τότε  $\Phi(t) = e^{At}$  είναι η μοναδική λύση του ΠΑΤ:

$$\Phi^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\Phi^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1\Phi'(t) + \alpha_0\Phi(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες:  $\Phi(0) = I_n$ ,  $\Phi'(0) = A$ ,  $\Phi''(0) = A^2$ , ...,  $\Phi^{(n-1)}(0) = A^{n-1}$ .

(β) Έστω πίνακας  $A$  όπως στο μέρος (α). Τότε:

$$\Phi(t) = e^{At} = \beta_1(t)I_n + \beta_2(t)A + \dots + \beta_n(t)A^{n-1}$$

όπου  $\beta_k(t)$ ,  $1 \leq k \leq n$  είναι οι λύσεις των  $n$  ΠΑΤ:

$$\beta^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\beta^{(n-1)}(t) + \alpha_1\beta'(t) + \alpha_0\beta(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1(0) = 1 \\ \beta_1'(0) = 0 \\ \vdots \\ \beta_1^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \beta_2(0) = 0 \\ \beta_2'(0) = 1 \\ \vdots \\ \beta_2^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad \left. \begin{array}{l} \beta_n(0) = 0 \\ \beta_n'(0) = 0 \\ \vdots \\ \beta_n^{(n-1)}(0) = 1 \end{array} \right\}$$

αντίστοιχα.

**B8:** Έστω σύστημα  $\Sigma_i(A, b)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(0) = x_0 = 0$ . Έστω ότι  $u(t + \frac{1}{2}) = u(t)$ ,  $t \geq 0$ . Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε την συνάρτηση  $u(t)$  έτσι ώστε  $x(1) = x_1$  αν και μόνο αν υπάρχει  $\eta \in \mathbb{R}^n$  τέτοιο ώστε:  $(e^{A/2} + I)\Gamma_c\eta = x_1$ ,  $\Gamma_c = [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$ .

**B9:** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχώς διαφορίσιμη και  $f'(y) \geq \epsilon > 0$  για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι αν  $\det[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b] \neq 0$  και  $t_1 > 0$ , τότε η εξίσωση

$$\int_0^{t_1} e^{-At} b f(b^T e^{-A^T t} p) dt = x$$

έχει μοναδική λύση  $p$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**B10:** Δείξτε ότι:

$$\exp \left( \begin{bmatrix} A & BB^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^{At} & e^{At} W(0, t) \\ 0 & e^{-A^T t} \end{bmatrix}, \text{ όπου } W(0, t) = \int_0^t e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T \tau} d\tau$$

ο πίνακας Gramian ελεγχιμότητας του  $\Sigma_i(A, b)$ .

**B11:** Έστω το σύστημα  $\Sigma_o(A, C)$  και έστω ότι η έξοδος του συστήματος είναι μετρήσιμη τις χρονικές στιγμές  $t = nT$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Κάτω από ποιές συνθήκες ένας ικανός αριθμός μετρήσεων αρκεί για να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα την αρχική κατάσταση  $x(0)$ ;

**B12:** Η  $(C^2(\mathbb{R}))$  συνάρτηση  $x(t)$  ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση  $x''(t) + x(t) = 0$  και οι τιμές της είναι γνωστές για  $t = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Μπορούμε να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα τις τιμές  $x(0)$  και  $x'(0)$  από αυτή την πληροφορία;

**B13:** Έστω ότι  $\Sigma_i(A, b)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  είναι πλήρως ελέγξιμο και  $c_1^T (sI_n - A)^{-1} b = c_2^T (sI_n - A)^{-1} b$ ,  $c_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}^n$ . Δείξτε ότι  $c_1 = c_2$ .

**B14:** Έστω  $\Sigma_i(A, B)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , πλήρως ελέγξιμο και  $\text{Rank}(B) = m$ . Δείξτε ότι τότε  $\text{Rank}(A) \geq n - m$ .

**B15:** Έστω  $\Sigma_i(A, B)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  και  $\Sigma_i(\hat{A}, \hat{B})$ ,  $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  με αντίστοιχους πίνακες ελεγχιμότητας

$$\Gamma_c = [ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B ] \text{ και } \hat{\Gamma}_c = [ \hat{B} \ \hat{A}\hat{B} \ \dots \ \hat{A}^{n-1}\hat{B} ]$$

όπου  $\text{Rank}(\Gamma_c) = \text{Rank}(\hat{\Gamma}_c) = n$ . Έστω ότι υπάρχει  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det(P) \neq 0$ , τέτοιος ώστε  $P[\Gamma_c \mid A^n B] = [\hat{\Gamma}_c \mid \hat{A}^n \hat{B}]$ . Δείξτε ότι  $\hat{B} = PB$  και  $\hat{A} = PAP^{-1}$ . Υπόδειξη: Δείξτε ότι  $(PA - \hat{A}P)\Gamma_c = 0$ .

**B16:** Έστω το σύστημα  $\Sigma_i(A, B)$ ,  $x' = Ax + Bu$  όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί σε γραμμικοποιημένο μοντέλλο δορυφόρου σε κυκλική τροχιά. Οι μεταβλητές του διανύσματος κατάστασης  $x^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$  είναι:  $x_1$  η ακτινική απόκλιση από την ακτίνα ισορροπίας και  $x_3$  η μεταβλητή γωνίας της τροχιάς. Οι μεταβλητές  $x_2$  και  $x_4$  αντιστοιχούν στην γραμμική ταχύτητα στην ακτινική διεύθυνση και στην γωνιακή ταχύτητα, αντίστοιχα. Οι μεταβλητές εισόδου  $u_1$  και  $u_2$  ( $u = [u_1 \ u_2]^T$ ) είναι οι δυνάμεις που ασκούν οι προωθητήρες στην ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση, αντίστοιχα.

- (α) Είναι το σύστημα  $\Sigma_i(A, B)$  πλήρως ελέγξιμο; Αν το διάνυσμα εξόδου είναι  $y = [x_1 \ x_3]^T$ , είναι το αντίστοιχο σύστημα  $\Sigma_o(A, C)$  παρατηρήσιμο;
- (β) Είναι το σύστημα πλήρως ελέγξιμο αν ο ακτινικός προωθητήρας σταματήσει να λειτουργεί; αν ο εφαπτομενικός προωθητήρας σταματήσει να λειτουργεί;
- (γ) Είναι το σύστημα πλήρως παρατηρήσιμο μόνο απο την έξοδο  $y = x_1$ ; Μόνο από την έξοδο  $y = x_3$ ;

**B17:** Έστω το σύστημα  $\Sigma(A, B, C)$  όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Μετασχηματίστε το σύστημα στην κανονική μορφή Kalman και εντοπίστε τα τέσσερα υποσυστήματα  $\Sigma_{co}$ ,  $\Sigma_{\bar{c}o}$ ,  $\Sigma_{c\bar{o}}$ ,  $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$ . (β) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

**B18:** Έστω το σύστημα:

$$\Sigma_o(A, C) := \Sigma_o \left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \right)$$

όπου  $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Δείξτε ότι  $\Sigma_o(A, C)$  πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν  $\Sigma_o(A_{22}, A_{12})$  πλήρως παρατηρήσιμο.

**B19:** Έστω το σύστημα  $\Sigma_i(A, B)$ , όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Έστω  $\lambda \in \sigma(A)$  (όπου  $\sigma(A)$  το φάσμα του πίνακα  $A$ ). Δείξτε ότι  $\text{Rank}[\lambda I_n - A \ B] < n$  αν και μόνο αν  $\lambda \in \sigma(A + BF)$  για κάθε  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Γ. Χαλικιάς, 30-6-2025