

Θεωρία Ελέγχου: Άσκηση, Εαρινό εξάμηνο 2026

ΟΜΑΔΑ Α: Παρακαλώ να υποβάλετε τις λύσεις σας με αρχείο pdf μέχρι τις 4-5-2026

Θέμα 1: Γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς: $\hat{g}(s) = \frac{s^2+s+3}{s^3+3s^2+2s}$. Να βρεθούν δύο πραγματοποιήσιμες του συστήματος, $\Sigma(A, B, C, D)$, όπου, (i) το ζεύγος (A, B) είναι σε κανονική μορφή ελεγχιμότητας, και (ii) ο πίνακας A είναι διαγώνιος.

Θέμα 2: Έστω $\hat{G}(s) = \frac{b}{s+a}$ συνάρτηση μεταφοράς γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, όπου a και b θετικές παράμετροι. Έστω ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος στην χρονική στιγμή $t = 0$ είναι μηδενική. Έστω ότι εφαρμόζουμε συνάρτηση $u(t) = \sin t$, $t \geq 0$, στην είσοδο του συστήματος και ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - \sqrt{2} \sin(t - \pi/4)| = 0$. Βρείτε τις τιμές των a και b .

Θέμα 3: Έστω συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}(s)$, $\hat{G}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$, $\det D \neq 0$. Δείξτε ότι: $\hat{G}^{-1}(s) = D^{-1} - D^{-1}C(sI - A + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$. Υπόδειξη: Υπολογίστε μία πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{G}^{-1}(s)\hat{G}(s)$ και εφαρμόστε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό ισοδυναμίας ώστε να δείξετε ότι $\hat{G}^{-1}(s)\hat{G}(s) = I_p$.

Θέμα 4: Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα $\Sigma(A, B, C, D)$ όπου $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ και έστω ότι υπάρχουν μοναδικές λύσεις $P = P^T \succ 0$ και $Q = Q^T \succ 0$ των αλγεβρικών εξισώσεων Lyapunov

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \text{ και } A^TQ + QA + C^TC = 0$$

αντίστοιχα. Έστω το ισοδύναμο σύστημα $\tilde{\Sigma}(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$. Δείξτε ότι στις νέες συντεταγμένες οι πίνακες P και Q μετασχηματίζονται σε $\tilde{P} = T^{-1}PT^{-T} = \tilde{P}^T \succ 0$ και $\tilde{Q} = T^TQT = \tilde{Q}^T \succ 0$ και επομένως το φάσμα του πίνακα PQ είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας. (Συμβολισμός: $T^{-T} := (T^{-1})^T = (T^T)^{-1}$).

Θέμα 5: Συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}(s)$ λέγεται all-pass αν $\hat{G}^T(-s)\hat{G}(s) = I_p$. Έστω Q ο πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας μίας πραγματοποίησης $\Sigma(A, B, C, D)$ της $\hat{G}(s)$ (δείτε την προηγούμενη άσκηση) και έστω ότι $QB + C^TD = 0$ και $D^TD = I_p$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $G(s)$ είναι all-pass.

Θέμα 6: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (α) Έστω $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Δείξτε ότι $\mathcal{R}(M)$ είναι A -αναλλοίωτος υπόχωρος του \mathbb{R}^n αν και μόνο αν $AM = MX$ για κάποιον πίνακα $X \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Δείξτε επιπλέον ότι αν $\text{Rank}(M) = k$, τότε κάθε ιδιοτιμή του X είναι ιδιοτιμή του A και ότι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ανήκει στον $\mathcal{R}(M)$.
- (β) Έστω σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ και $\Gamma_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ ο αντίστοιχος πίνακας ελεγχιμότητας. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{R}(\Gamma_c)$ είναι A -αναλλοίωτος (σημειώσεις). Βρείτε πίνακα X τέτοιον ώστε $A\Gamma_c = \Gamma_c X$.
- (γ) Δείξτε ότι $\mathcal{N}_r(N)$ είναι A -αναλλοίωτος υπόχωρος αν και μόνο αν $\mathcal{R}(N^T)$ είναι A^T -αναλλοίωτος. Άρα βρείτε συνθήκη ώστε ο υπόχωρος $\mathcal{N}_r(N)$ να είναι A αναλλοίωτος. [Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι \mathcal{V} είναι A -αναλλοίωτος αν και μόνο αν \mathcal{V}^\perp είναι A^T -αναλλοίωτος.]

(δ) Έστω σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ και $\Gamma_o = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]^T$ ο αντίστοιχος πίνακας παρατηρησιμότητας. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$ είναι A -αναλλοίωτος (σημειώσεις). Βρείτε πίνακα Y τέτοιον ώστε να ισχύει η συνθήκη στο (γ).

Θέμα 7: (α) Δείξτε ότι $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A + \alpha I, B)$ πλήρως ελέγξιμο, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. (β) Δείξτε ότι $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A, BB^T)$ πλήρως ελέγξιμο. (γ) Δείξτε ότι $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A + BF, BG)$ πλήρως ελέγξιμο, όπου $\det G \neq 0$.

Θέμα 8: Έστω συστήματα $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ και $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ με διανύσματα κατάστασης x_1 και x_2 , αντίστοιχα, και συναρτήσεις εξόδου y_1 και y_2 , αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις εισόδου των Σ_1 και Σ_2 είναι $u_1 - y_2$ και $u_2 - y_1$, αντίστοιχα.

(α) Βρείτε τις εξισώσεις του συστήματος με διάνυσμα κατάστασης: $[x_1^T \ x_2^T]^T$, διάνυσμα εισόδου: $[u_1^T \ u_2^T]^T$ και διάνυσμα εξόδου: $[y_1^T \ y_2^T]^T$.

(β) Αποδείξτε την παρακάτω πρόταση η δώσει αντιπαράδειγμα: Το σύστημα ανάδρασης στο (α) είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν κάθε ένα από τα συστήματα $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ και $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ είναι πλήρως ελεγχσιμο.

(γ) Έστω ότι $u_2 \equiv 0$ (δηλ. απαλείψτε το u_2 ως συνάρτηση εισόδου από το σύστημα) και επαναλάβετε την ανάλυσή σας στο μέρος (β).

Θέμα 9: Δείξτε ότι:

$$\exp \left(\begin{bmatrix} A & BB^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^{At} & e^{At} W(0, t) \\ 0 & e^{-A^T t} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } W(0, t) = \int_0^t e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T \tau} d\tau$$

ο πίνακας Gramian ελεγχσιμότητας του $\Sigma_i(A, b)$.

Θέμα 10: Έστω $\Sigma_i(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $\Sigma_i(\hat{A}, \hat{B})$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ με αντίστοιχους πίνακες ελεγχσιμότητας

$$\Gamma_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] \quad \text{και} \quad \hat{\Gamma}_c = [\hat{B} \ \hat{A}\hat{B} \ \dots \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$$

όπου $\text{Rank}(\Gamma_c) = \text{Rank}(\hat{\Gamma}_c) = n$. Έστω ότι υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(P) \neq 0$, τέτοιος ώστε $P[\Gamma_c \mid A^n B] = [\hat{\Gamma}_c \mid \hat{A}^n \hat{B}]$. Δείξτε ότι $\hat{B} = PB$ και $\hat{A} = PAP^{-1}$. Υπόδειξη: Δείξτε ότι $(PA - \hat{A}P)\Gamma_c = 0$.

Θέμα 11: Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$, $x' = Ax + Bu$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί σε γραμμικοποιημένο μοντέλλο δορυφόρου σε κυκλική τροχιά. Οι μεταβλητές του διανύσματος κατάστασης $x^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$ είναι: x_1 η ακτινική απόκλιση από την ακτίνα ισορροπίας και x_3 η μεταβλητή γωνίας της τροχιάς. Οι μεταβλητές x_2 και x_4 αντιστοιχούν στην γραμμική ταχύτητα στην ακτινική διεύθυνση και στην γωνιακή ταχύτητα, αντίστοιχα. Οι μεταβλητές εισόδου u_1 και u_2 ($u = [u_1 \ u_2]^T$) είναι οι δυνάμεις που ασκούν οι προωθητήρες στην ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση, αντίστοιχα.

(α) Είναι το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο;

(β) Είναι το σύστημα πλήρως ελέγξιμο αν ο ακτινικός προωθητήρας σταματήσει να λειτουργεί; αν ο εφαπτομενικός προωθητήρας σταματήσει να λειτουργεί;

ΟΜΑΔΑ Β: Παρακαλώ να υποβάλετε τις λύσεις σας με αρχείο pdf μέχρι τις 18-5-2026

Θέμα 12: Έστω το σύστημα $\Sigma(A, B, C)$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Μετασχηματίστε το σύστημα στην κανονική μορφή Kalman και εντοπίστε τα τέσσερα υποσυστήματα Σ_{co} , $\Sigma_{\bar{co}}$, $\Sigma_{c\bar{o}}$, $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$. (β) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Θέμα 13: Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ (όπου $\sigma(A)$ το φάσμα του πίνακα A). Δείξτε ότι $\text{Rank}[\lambda I_n - A \quad B] < n$ αν και μόνο αν $\lambda \in \sigma(A + BF)$ για κάθε $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Θέμα 14: Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A, b)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Εξετάστε αν το σύστημα $\Sigma_i(A, b)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. Να βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος \mathcal{X}_c του συστήματος.

(ii) Να βρεθεί πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\det(Q) \neq 0$, και μετασχηματισμός ισοδυναμίας $\Sigma_i(A, b) \rightarrow \Sigma_i(Q^{-1}AQ, Q^{-1}b)$ τέτοιος ώστε το ζεύγος $(Q^{-1}AQ, Q^{-1}b)$ να είναι σε κανονική μορφή ελεγκτιμότητας Kalman, δηλαδή:

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}b = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{b}_1)$ πλήρως ελέγξιμο.

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $f \in \mathbb{R}^3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A_c = A + bf^T$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\lambda = 1$ και ότι επομένως το σύστημα $\Sigma_i(A, b)$ δεν είναι σταθεροποιήσιμο μέσω ανάδρασης καταστάσεων.

Θέμα 15: Εξετάστε το μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα:

$$x'_1 = g_1(x_1, x_2, u) := (x_1 - 1)(x_1 + x_2) - u, \quad x'_2 = g_2(x_1, x_2, u) := x_2 - x_1^2 + u$$

όπου u είναι συνάρτηση εισόδου κλάσης \mathcal{C}^1 .

- (i) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της μορφής (x_1^*, x_2^*, u^*) όπου $u^* = 0$. Γραμμικοποιώντας το σύστημα γύρω από κάθε σημείο ισορροπίας εξετάστε τις ιδιότητες ευστάθειας κάθε ενός από αυτά.
- (ii) Εξετάστε το σύστημα $x' = Ax + bu$ που προκύπτει από την γραμμικοποίηση του μη-γραμμικού συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (0, 0, 0)$. Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης του γραμμικοποιημένου συστήματος με $u = 0$, (δηλ. του συστήματος $x' = Ax$) υποδεικνύοντας την ασυμπτωτική του συμπεριφορά καθώς $t \rightarrow +\infty$.

Σχεδιάστε ανάδραση καταστάσεων της μορφής $u = f_1x_1 + f_2x_2$ ώστε ο πίνακας κλειστού βρόγχου του γραμμικοποιημένου συστήματος, $A_c := A + bf^T$, $f^T = [f_1 \ f_2]$, να έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi(s) = \det(sI_2 - A_c) = (s + \gamma)^2$, $\gamma > 0$. Θα μπορούσε αυτό το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να επιλεγεί αυθαίρετα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- (iii) Εφαρμόζοντας την ανάδραση καταστάσεων που σχεδιάσατε στο ερώτημα (ii) στο μη-γραμμικό σύστημα, δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι τώρα ασυμπτωτικά ευσταθές. Υπόδειξη: Οι εξισώσεις το συστήματος κλειστού βρόγχου που προκύπτουν από την εφαρμογή της ανάδρασης καταστάσεων είναι:

$$x'_1 = g_1(x_1, x_2, f_1x_1 + f_2x_2), \quad x'_2 = g_2(x_1, x_2, f_1x_1 + f_2x_2)$$

Δείξτε επίσης ότι ο πίνακας Jacobian του συστήματος κλειστού βρόγχου υπολογισμένος στο σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi(s) = (s + \gamma)^2$.

Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ |
|-------------|----------------------|------------------------|-------------------------------------|
| $\delta(t)$ | 1 | $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| 1 | $1/s$ | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| t | $1/s^2$ | $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2 - a^2}$ |
| t^2 | $2/s^3$ | $\sinh at$ | $\frac{a}{s^2 - a^2}$ |
| t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $e^{at} \cos \omega t$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$ |
| e^{at} | $\frac{1}{s-a}$ | $e^{at} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$ |
| te^{-at} | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $t^{n-1}e^{-at}$ | $\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$ |