ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεωρία Ελέγχου, Σεπτεμβρης 2022

Θ1: Δίνεται το σύστημα:

$$x_1' = f_1(x_1, x_2),\ \ x_2' = f_2(x_1, x_2),\ \ f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2,\ \ f_2(x_1, x_2) = x_1^6 - x_2^3$$

(α) Δείξτε ότι τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι τα $P_0(0, 0)$ και $P_1(1, 1)$.

(β) Γραμμικοποιώντας στο σύστημα δείξτε ότι το σημείο P_1 ειναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Είναι το P_1 ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

(γ) Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq x_1^3, x_2 \leq x_1^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι θετικά αναλλοίωτο, δηλαδή ότι $x(0) \in \Gamma \Rightarrow x(t) \in \Gamma$ για κάθε $t \geq 0$. (Υπόδειξη: Εξετάστε το διανυσματικό πεδίο $f = (f_1, f_2)$ στο σύνορο του Γ). Επομένως δείξτε ότι το σημείο P_0 είναι ασταθές.

Θ2: Δίνεται το σύστημα:

$$x_1' = -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2),\ \ x_2' = x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

(α) Δείξτε ότι το σημείο $x^* = (0, 0)$ είναι μεμονομένο σημείο ισορροπίας. (β) Δείξτε ότι το σημείο $x^* = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov $V(x) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$ η γραμμικοποίηση]. (γ) Με αλλαγή συντεταγμένων λύστε το σύστημα αναλυτικά και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.

Θ3:

(α) Δείξτε ότι το σύστημα $x'(t) = 1 + x(t)\cos t$ δεν έχει 2π-περιοδική λύση.

(β) Βρείτε την λύση του Π.Α.Τ.:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και τον αντίστοιχο ευσταθή, ασταθή και κεντρικό υπόχωρο του συστήματος.

Θ4: Δείξτε ότι η συνεχής συνάρτηση $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ πού ορίζεται ώς:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_1^2 \\ x_3 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix}$$

έχει συνεχή αντίστροφο: $h^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ και ότι το μη γραμμικό σύστημα

$$x' = f(x),\ \ f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

μετασχηματίζεται στο γραμμικό σύστημα $y' = Ay$ όπου $A = Df(0)$ κάτω από την απεικόνιση αυτή, δηλαδή αν $y = h(x)$ τότε $y' = Ay$. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = -\frac{x_1^2}{3}\}$ είναι αναλλοίωτο.

Θ5: Δίδεται το σύστημα $x' = Ax + Bu$, όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί πίνακας F ώστε $\sigma(A + BF) = \{-1 \pm i, -2 \pm i\}$.

Θ6: Εξετάστε την αλγεβρική εξίσωση Riccati:

$$A^T P + PA - PBB^T P + C^T C = 0$$

όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(α) Εξετάστε αν το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο και αν το σύστημα $\Sigma(A, C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο. (β) Να βρεθεί ο αντίστοιχος πίνακας Hamiltonian και η λύση ευστάθειας της εξίσωσης Riccati μέσω της φασματικής παραγωντοποίησης του H. Επιβεβαιώστε ότι ο P είναι θετικά ορισμένος και ότι $\sigma(A - BB^T P) \subseteq \mathbb{C}_-$.