

ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

04/07/2025

ΘΕΜΑ 1. (α) Να περιγράψετε λεπτομερώς (χωρίς αποδείξεις) την διαδικασία πλήρωσης ενός συσχετισμένου επιπέδου σε προβολικό.

(β) Εστω ένα συσχετισμένο επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ και $l \in \mathcal{L}$ με $|J(l)| = n \in \mathbb{N}$. Να βρεθεί το πλήθος των σημείων του \mathcal{P} .

ΘΕΜΑ 2. Εστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ ένα προβολικό επίπεδο.

(α) Αν $P, Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$, να δείξετε πλήρως ότι $\exists l \in \mathcal{L}$ με $P \notin l$ και $Q \notin l$.

(β) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες του προβολικού επιπέδου έχουν το ίδιο πλήθος σημείων.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να δοθούν οι δύο ισοδύναμοι ορισμοί του επιπέδου Desargues.

(β) Να δείξετε ότι το δυϊκό ενός επιπέδου Desargues είναι επίπεδο Desargues.

ΘΕΜΑ 4. (α) Στο \mathbb{P}_2 να βρεθεί η ευθεία που συνδέει τα σημεία $[1,0,1]$, $[0,1,0]$ και η τομή των ευθειών $\langle 1,1,1 \rangle$, $\langle 1,2,1 \rangle$.

(β) Να εξετάσετε αν το σημείο $[0,0,1]$ είναι κέντρο της συγγραμμικότητας του \mathbb{P}_2 που ορίζεται από τον γραμμικό ισομορφισμό $f(x, y, z) = (x, y, 3y + z)$.