

ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Εξετάσεις 17/09/2009

Θέμα 1. (α) Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία ενός προβολικού επιπέδου διαθέτει τουλάχιστον 3 διαφορετικά σημεία.

(β) Αν οι ευθείες του προβολικού επιπέδου έχουν ακριβώς 3 διαφορετικά σημεία, ποιά είναι η ομάδα $\mathbb{H}(A, \ell)$;

(γ) Αν (ϕ, ψ) είναι μορφοισμός προβολικών επιπέδων, με ψ επί. Να δείξετε ότι η ϕ είναι επί.

Θέμα 2. (α) Να περιγράψετε (χωρίς αποδείξεις) την κατασκευή της ομάδας $(\mathcal{R}, +)$ σε ένα επίπεδο Desargues.

(β) Να υπολογίσετε το ουδέτερο στοιχείο της προηγούμενης πράξης και το σημείο $-P$, για οποιοδήποτε $P \in \mathcal{R}$.

Θέμα 3. (α) Εστω (ϕ, ψ) ένας μορφοισμός προβολικών επιπέδων 1-1. Να δείξετε ότι αν $A \notin \ell$, τότε $\phi(A) \notin \psi(\ell)$. Τί συμβαίνει όταν (ϕ, ψ) δεν είναι 1-1;

(β) Δίνονται τα προβολικά επίπεδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ και $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \epsilon)$ και μία απεικόνιση $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, 1-1 και επί, που απεικονίζει δέσμες ευθειών σε δέσμες ευθειών. Να δείξετε ότι υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$, τέτοια ώστε το (ϕ, ψ) να είναι ισομορφοισμός προβολικών επιπέδων.

Θέμα 4. (α) Να βρεθεί η ευθεία που ορίζουν τα σημεία $[1,0,-1]$ και $[-2,0,2]$ του \mathbb{P}_2 . Επίσης να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών $\langle 1, 2, 1 \rangle$ και $\langle 2, 1, 2 \rangle$.

(β) Να βρείτε τα σημεία που αφήνει αναλλοίωτα η συγγραμμικότητα του \mathbb{P}_2 που ορίζεται από την $f(x, y, z) = (x - y, y, z)$.

Να γραφούν και τα 4 θέματα.

Καλή επιτυχία!