ΜΑΘΗΜΑ 9, ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Να βρεθεί η ευθεία που ορίζουν τα σημεία [0,0,1] και [1,1,1].

Απάντηση. Τα διανύσματα (0,0,1) και (1,1,1) δεν είναι συγγραμμικά, άρα ορίζουν διαφορετικά σημεία $[0,0,1] \neq [1,1,1] \in \mathcal{P}$. Επομένως, ορίζεται μια μοναδική ευθεία $< a, b, c >= [0,0,1] \vee [1,1,1]$. Επειδή

$$\begin{aligned} [0,0,1] \in < a,b,c > &\Leftrightarrow (0,0,1) \perp (a,b,c) \\ [1,1,1] \in < a,b,c > &\Leftrightarrow (1,1,1) \perp (a,b,c) \end{aligned}$$

παίρνουμε ότι το (a, b, c) είναι παράλληλο με το εξωτερικό γινόμενο $(0,0,1)\times(1,1,1)$. Άρα

$$< a,b,c >=< [0,0,1] \times [1,1,1] >=< -1,1,0 >=< 1,-1,0 > .$$

4. Να βρεθεί η τομή των ευθειών
(α) $< 1,1,-2 >$ και $< 3,3,-6 >$.
(β) $< 1,0,1 >$ και $< 0,1,0 >$.

Απάντηση. (α) Παρατηρούμε ότι (3,3,-6)=3(1,1,-2), άρα $< 1,1,-2 >=< 3,3,-6 >$, και δεν ορίζεται σημείο τομής.

(β) Τα διανύσματα (1,0,1) και (0,1,0) δεν είναι συγγραμμικά, άρα ορίζουν διαφορετικές ευθείες $< 1,0,1 >\neq< 0,1,0 >$ και ορίζεται μονοσήμαντα η τομή

$$[x,y,z] =< 1,0,1 > \wedge < 0,1,0 > .$$

1ος υπολογισμός: Επειδή

$$[x,y,z] \in< 1,0,1 > \quad \text{και} \quad [x,y,z] \in< 0,1,0 >$$

παίρνουμε

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y,z) = (x,0,-x)$$

με $x \neq 0$, δηλ.

$$[x,y,z] = [1,0,-1].$$

2ος υπολογισμός: Επειδή

$$\begin{aligned} [x,y,z] \in< 1,0,1 > &\Leftrightarrow (x,y,z) \perp (1,0,1) \\ [x,y,z] \in< 0,1,0 > &\Leftrightarrow (x,y,z) \perp (0,1,0) \end{aligned}$$

έχουμε ότι το (x, y, z) είναι παράλληλο με το εξωτερικό γινόμενο $(1, 0, 1) \times (0, 1, 0)$, άρα

$$[x, y, z] = [(1, 0, 1) \times (0, 1, 0)] = [-1, 0, 1].$$

Παρατηρείστε ότι [1,0,-1] = [-1,0,1].

6. Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας $< 1, 0, 1 >$.

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} [x, y, z] \in < 1, 0, 1 > &\Leftrightarrow\ x + z = 0\ \Leftrightarrow\ z = -x \\ &\Leftrightarrow\ [x, y, z] = [x, y, -x] \end{aligned}$$

με $(x, y) \neq (0, 0)$.

Για $x \neq 0$, $[x, y, -x] = [1, y/x, -1] = [1, a, -1]$, $a \in \mathbb{R}$.

Για $y \neq 0$, $[x, y, -x] = [x/y, 1, -x/y] = [a, 1, -a]$, $a \in \mathbb{R}$.

8. Να βρεθούν οι ευθείες που ανήκουν στην δέσμη $J([1, -1, 0])$.

Απάντηση. Έστω $< a, b, c > \in J([1, -1, 0])$. Τότε

$$[1, -1, 0] \in < a, b, c > \Leftrightarrow\ a - b = 0\ \Leftrightarrow\ a = b,$$

οπότε $< a, b, c > = < a, a, c >$, με $(a, c) \neq (0, 0)$.

Για $a \neq 0$, $< a, a, c > = < 1, 1, c/a > = < 1, 1, t >$, $t \in \mathbb{R}$.

Για $c \neq 0$, $< a, a, c > = < a/c, a/c, 1 > = < t, t, 1 >$, $t \in \mathbb{R}$.