ΜΑΘΗΜΑ 10, ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Να εξετάσετε αν το σημείο $[0, 0, 1]$ είναι κέντρο της συγγραμμικότητας του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, που ορίζεται από την $f(x, y, z) = (x, y, 2x + z)$.

Απάντηση. Η f είναι γραμμικός ισομορφισμός με πίνακα

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

για τον οποίο παίρνουμε

$$(M_f^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

άρα η f ορίζει συγγραμμικότητα με

$$\begin{aligned} \varphi([x, y, z]) &= [f(x, y, z)] = [x, y, 2x + z], \\ \psi(< a, b, c >) &=< (a, b, c) \cdot (M_f^t)^{-1} >=< a - 2c, b, c > . \end{aligned}$$

Δείχνουμε ότι το σημείο $[0, 0, 1]$ είναι κέντρο: Πράγματι,

$$\begin{aligned} k =< a, b, c >\in J([0, 0, 1]) &\Rightarrow (a, b, c) \perp (0, 0, 1) \\ &\Rightarrow c = 0 \Rightarrow k =< a, b, 0 > \\ &\Rightarrow \psi(k) =< (a, b, 0) \cdot (M_f^t)^{-1} >=< a, b, 0 >= k, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

3. Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (y, z, x)$ ορίζει συγγραμμικότητα πού έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο. Ποιό είναι αυτό; Είναι κέντρο;

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι η f είναι γραμμικός ισομορφισμός, άρα ορίζει συγγραμμικότητα (φ, ψ) με $\varphi([x, y, z)] = [f(x, y, z)]$, για κάθε $[x, y, z] \in \mathcal{P}$. Έστω $[x, y, z]$ σταθερό, τότε

$$\varphi([x, y, z]) = [y, z, x] = [x, y, z] \Rightarrow \exists\, \lambda \neq 0 \,:\, (y, z, x) = \lambda(x, y, z)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & \lambda x \\ z & = & \lambda y \\ x & = & \lambda z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y(\lambda^3 - 1) = 0 \\ z(\lambda^3 - 1) = 0 \\ x(\lambda^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Αν $\lambda \neq 1$, τότε $x = y = z = 0$, άτοπο. Άρα $\lambda = 1$, απ' όπου παίρνουμε $x = y = z \neq 0$ και $[x, y, z] = [x, x, x] = [1, 1, 1]$. Το (μοναδικό) αυτό σημείο δεν είναι κέντρο: αν ήταν κέντρο, θα υπήρχε και άξονας, άρα και τα (άπειρα) σημεία του θα ήταν σταθερά.

4. Δίνεται η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (x + az, y, z)$ όπου $a \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f ορίζει μια συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Να προσδιορίσετε την μορφή των ϕ, ψ και να αποδείξετε ότι η (ϕ, ψ) έχει κέντρο το σημείο $[1, 0, 0]$ και άξονα την ευθεία $< 0, 0, 1 >$. Τι είδους συγγραμμικότητα είναι η (ϕ, ψ);

Απάντηση. (i) Για $a = 0$, έχουμε $f = id_{\mathbb{R}^3}$, οπότε η αντίστοιχη (ϕ, ψ) είναι η $(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$ για την οποία κάθε σημείο είναι κέντρο και κάθε ευθεία είναι άξονας.

(ii) Για $a \neq 0$, η f είναι γραμμικός ισομορφισμός με

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad (M_f^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

οπότε η f ορίζει συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) με

$$\phi([x, y, z]) = [x + az, y, z],$$
$$\psi(< \kappa, \lambda, \mu >) =< (\kappa, \lambda, \mu) \cdot (M_f^t)^{-1} >=< \kappa, \lambda, \mu - a\kappa > .$$

Αποδεικνύουμε ότι το σημείο $[1, 0, 0]$ είναι κέντρο:

$$\begin{aligned} k =< \kappa, \lambda, \mu >\in J([1, 0, 0]) &\Rightarrow (\kappa, \lambda, \mu) \perp (1, 0, 0) \\ &\Rightarrow \kappa = 0 \Rightarrow k =< 0, \lambda, \mu > \\ &\Rightarrow \psi(k) =< (0, \lambda, \mu) \cdot (M_f^t)^{-1} >=< 0, \lambda, \mu >= k. \end{aligned}$$

Η ευθεία $< 0, 0, 1 >$ είναι άξονας:

$$\begin{aligned} P = [x, y, z] \in< 0, 0, 1 > &\Rightarrow z = 0 \\ &\Rightarrow \phi(P) = [f(x, y, 0)] = [x, y, 0] = P. \end{aligned}$$

Επειδή $[1, 0, 0] \in< 0, 0, 1 >$, η (ϕ, ψ) είναι έπαρση.

5. Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$f(x, y, z) = (x + y, x - y, 2z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ορίζει συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Να βρείτε τα σταθερά σημεία της ϕ. Είναι η (ϕ, ψ) κεντρική/αξονική;

Απάντηση. Η f είναι γραμμική με

$$f(x,y,z)=0 \;\Leftrightarrow\; (x,y,z)=(0,0,0),$$

δηλ. είναι ισομορφισμός του $\mathbb{R}^3$, άρα ορίζει συγγραμμικότητα (φ,ψ) με

$$\varphi([x,y,z])=(x+y,x-y,2z), \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Έστω $[x,y,z]$ ένα σταθερό σημείο. Τότε

$$\begin{aligned}\varphi([x,y,z])=[x,y,z] &\Leftrightarrow \exists\,\lambda\neq 0 \;:\; (x+y,x-y,2z)=\lambda(x,y,z)\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& \lambda x\\ x-y &=& \lambda y\\ 2z &=& \lambda z\end{array}\right.\end{aligned}$$

(i) Αν $z\neq 0$, τότε $\lambda=2$, οπότε το ανωτέρω σύστημα για x και y γίνεται

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 2x\\ x-y &=& 2y\end{array}\right\} \Rightarrow\; x=y=0$$
$$\Rightarrow\; [x,y,z]=[0,0,z]=[0,0,1].$$

(ii) Αν $z=0$, το σύστημα για x, y γίνεται

$$\begin{array}{rcl}(1-\lambda)x+y &=& 0\\ x-(1+\lambda)y &=& 0\end{array}$$

Για $z=0$ η λύση $x=y=0$ δεν είναι αποδεκτή, άρα πρέπει

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -(1+\lambda)\end{pmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \lambda=\pm\sqrt{2}$$

Η τιμή $\lambda=\sqrt{2}$ δίνει $[x,y,z]=[1+\sqrt{2},1,0]$ και η τιμή $\lambda=-\sqrt{2}$ δίναι $[x,y,z]=[1-\sqrt{2},1,0]$. Άρα υπάρχουν ακριβώς τρία σταθερά σημεία και, όπως και στην προηγούμενη άσκηση, δεν μπορεί να υπάρχει άξονας, άρα η (φ,ψ) δεν είναι κεντρική/αξονική.

6. Να βρεθούν τα σταθερά σημεία των συγγραμμικοτήτων που ορίζονται από τους γραμμικούς ισομορφισμούς $f_i\in\mathcal{A}ut(\mathbb{R}^3)$, $i=1,2,3,4$, όπου

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z)&=(x-y-z,\; x+3y+2z,\; -x-y)\\
f_2(x,y,z)&=(x+y,\; x+z,\; 2z)\\
f_3(x,y,z)&=(x,\; x+y,\; 2x-y+3z)\\
f_4(x,y,z)&=(4x,\; x+3y-z,\; 4z)
\end{aligned}$$

Ποιές από αυτές τις συγγραμμικότητες είναι κεντρικές; Να βρεθούν κέντρο και άξονας.

Υπενθύμιση. Έστω $f \in \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^3)$, (ϕ, ψ) η αντίστοιχη συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ και $[x, y, z]$ ένα σημείο ϕ-σταθερό. Τότε

$$\begin{aligned}\phi([x, y, z]) = [x, y, z] &\Leftrightarrow\ [f(x, y, z)] = [x, y, z]\\ &\Leftrightarrow\ \exists\ \lambda \neq 0\ :\ f(x, y, z) = \lambda(x, y, z)\\ &\Leftrightarrow\ \lambda \neq 0 \text{ ιδιοτιμή της } f \text{ και } (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\ \lambda\text{-ιδιοδιάνυσμα}\end{aligned}$$

Απάντηση. (i) Η f_1 αντιστοιχεί στον πίνακα

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\det(M_1 - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2.$$

Τα ϕ_1-σταθερά σημεία που προέρχονται από τα μη-μηδενικά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτημή 1, ικανοποιούν την

$$f(x, y, z) = (x, y, z)\ \Leftrightarrow\ x = 0 \text{ και } z = -y \neq 0$$

άρα

$$[x, y, z] = [0, y, -y] = [0, 1, -1]$$

Τα ϕ_1-σταθερά σημεία που προέρχονται από τα μη-μηδενικά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτημή 2, άρα ικανοποιούν την

$$f(x, y, z) = 2(x, y, z)\ \Leftrightarrow\ z = 0 \text{ και } x = -y \neq 0$$

άρα

$$[x, y, z] = [-y, y, 0] = [-1, 1, 0].$$

Δηλ. η (ϕ_1, ψ_1) έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία, άρα δεν μπορεί να έχει άξονα, ούτε και κέντρο.

(ii) Η f_2 αντιστοιχεί στον πίνακα

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\det(M_2 - \lambda I_3) = (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτημή 2, ικανοποιούν την

$$f_2(x,y,z) = 2(x,y,z) \;\Leftrightarrow\; x = y = z \neq 0,$$

άρα

$$[x,y,z] = [x,x,x] = [1,1,1].$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτημή $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ικανοποιούν την

$$f_2(x,y,z) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(x,y,z) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} y \neq 0 \text{ και } z = 0,$$

άρα

$$[x,y,z] = [\frac{1+\sqrt{5}}{2} y, y, 0] = [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, 0].$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτημή $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ικανοποιούν την

$$f_2(x,y,z) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(x,y,z) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} y \neq 0 \text{ και } z = 0,$$

άρα

$$[x,y,z] = [\frac{1-\sqrt{5}}{2} y, y, 0] = [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1, 0].$$

Δηλ. η (ϕ_2, ψ_2) έχει ακριβώς τρία σταθερά σημεία, άρα δεν μπορεί να έχει άξονα, ούτε και κέντρο.

(iii) Η f_3 αντιστοιχεί στον πίνακα

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\det(M_3 - \lambda I_3) = (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 3.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτημή 1 ικανοποιούν την

$$f_3(x,y,z) = (x,y,z) \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ και } y = 2z \neq 0,$$

άρα

$$[x,y,z] = [0, 2z, z] = [0,2,1].$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτημή 3 ικανοποιούν την

$$f_3(x, y, z) = 3(x, y, z) \;\Leftrightarrow\; x = y = 0 \text{ και } z \neq 0,$$

άρα

$$[x, y, z] = [0, 0, z] = [0, 0, 1].$$

Δηλ. η (φ_3, ψ_3) έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία, άρα δεν μπορεί να έχει άξονα, ούτε και κέντρο.

(iv) Η f_4 αντιστοιχεί στον πίνακα

$$M_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\det(M_4 - \lambda I_3) = (4 - \lambda)^2(3 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ ή } \lambda = 3.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτημή 3 ικανοποιούν την

$$f_4(x, y, z) = 4(x, y, z) \;\Leftrightarrow\; x = z = 0 \text{ και } y \neq 0,$$

άρα

$$[x, y, z] = [0, y, 0] = [0, 1, 0].$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτημή 4 ικανοποιούν την

$$f_4(x, y, z) = 4(x, y, z) \;\Leftrightarrow\; x - z = y,$$

άρα

$$[x, y, z] = [x, x - z, z] \text{ με } (x, z) \neq (0, 0).$$

Παρατηρούμε ότι τα σημεία της ανωτέρω μορφής είναι άπειρα το πλήθος. Δύο από αυτά είναι τα $[0, -1, 1]$, που προκύπτει από το ζεύγος $(x, z) = (0, 1)$, και $[1, 1, 0]$, που προκύπτει από το $(x, z) = (1, 0)$. Η ευθεία

$$\ell = [0, -1, 1] \vee [1, 1, 0] =< (0, -1, 1) \times (1, 1, 0) >=< -1, 1, 1 >$$

είναι άξονας:

$$[x, y, z] \in< -1, 1, 1 > \Leftrightarrow\; -x + y + z = 0 \;\Leftrightarrow\; x - z = y,$$

άρα η $< -1, 1, 1 >$ περιέχει μόνο σταθερά σημεία. Αφού υπάρχει άξονας, υπάρχει και κέντρο A. Επειδή το σταθερό σημείο $[0, 1, 0]$ δεν ανήκει στον άξονα, κατ' ανάγκη είναι το κέντρο (αλλιώς, η τετράδα $(A, < -1, 1, 1 >, [0, 1, 0], [0, 1, 0])$ προσδιορίζει την $(\varphi_4, \psi_4) = (id, id)$, άτοπο.