

## ΜΑΘΗΜΑ 12, ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

**ΑΣΚΗΣΗ.** Να εξετάσετε ποιοί από τους παρακάτω γραμμικούς ενδομορφισμούς του  $\mathbb{R}^3$  ορίζουν  $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ :

- (1)  $f_1(x, y, z) = (3x, y, z)$
- (2)  $f_2(x, y, z) = (2x, 2y, 3z)$
- (3)  $f_3(x, y, z) = (2x, x, z)$
- (4)  $f_4(x, y, z) = (x, -y, -z)$
- (5)  $f_5(x, y, z) = (2x, 3y, 3z)$

*Απάντηση.* (1) Η  $f_1$  είναι γραμμικός ισομορφισμός με πίνακα

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

που είναι της μορφής (2) του Μαθήματος 11, άρα η  $f_1$  ορίζει συγγραμμικότητα  $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ .

(2) Η  $f_2$  είναι γραμμικός ισομορφισμός με πίνακα

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Κανένα αριθμητικό πολλαπλάσιο του  $M_2$  δεν παίρνει την μορφή (2), άρα η συγγραμμικότητα  $(\varphi, \psi)$  που ορίζει η  $f_2$  δεν είναι στοιχείο της  $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ .

(3) Η  $f_3$  δεν είναι γραμμικός ισομορφισμός γιατί ο πίνακας της

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν είναι αντιστρέψιμος, άρα η  $f_3$  δεν ορίζει συγγραμμικότητα.

(4) Η  $f_4$  είναι γραμμικός ισομορφισμός με πίνακα

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η  $g = -f_4$  έχει πίνακα της μορφής (2), άρα η  $g$  ορίζει συγγραμμικότητα  $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ . Η  $f_4$ , που είναι αριθμητικό πολλαπλάσιο της  $g$  ορίζει την ίδια συγγραμμικότητα.

(5) Η  $f_5$  είναι γραμμικός ισομορφισμός με πίνακα

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η  $g = \frac{1}{3}f_5$  έχει πίνακα της μορφής (2), άρα η  $g$  ορίζει συγγραμμικότητα  $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], \langle 1, 0, 0 \rangle)$ . Η  $f_5$ , που είναι αριθμητικό πολλαπλάσιο της  $g$  ορίζει την ίδια συγγραμμικότητα.