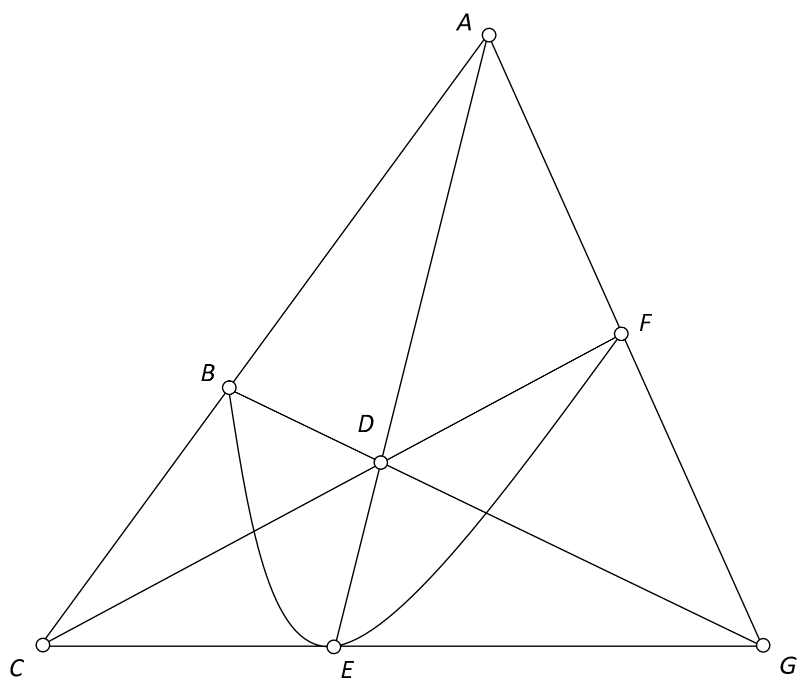
ΜΑΘΗΜΑ 15, ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ. (α) Γιατί το επίπεδο των 7 σημείων παραλείπεται στην Πρόταση 1;

(β) Να ελέγξετε αν η Πρόταση 2 ισχύει στο επίπεδο των 7 σημείων.

Απάντηση. (α) Διότι η Πρόταση 1 *δεν* ισχύει στο π.ε. των 7 σημείων: Για κάθε κέντρο και άξονα, υπάρχει ακριβώς μία ομολογία, η (id, id). Αν μια έπαρση δεν είναι η (id, id), δεν μπορεί να γραφτεί σαν σύνθεση ομολογιών.

(β) Θεωρούμε το π.ε. των 7 σημείων όπως στο επόμενο σχήμα:



Έστω $\ell = CEG$ και $(\phi, \psi), (\sigma, \tau) \in \mathbb{E}(\ell)$. Αν οι (ϕ, ψ) και (σ, τ) έχουν το ίδιο κέντρο $X \in \ell$, τότε

$$(\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) \in \mathbb{E}(X, \ell) \leq \mathbb{E}(\ell)$$

και το ζητούμενο ισχύει. Έστω ότι έχουν διαφορετικό κέντρο, π.χ. έστω $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}(C, \ell)$ και $(\sigma, \tau) \in \mathbb{E}(E, \ell)$. Αν τουλάχιστον η μία από τις δύο είναι η ταυτοτική, το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι

$$\phi(C) = \sigma(C) = C,\ \ \phi(E) = \sigma(E) = E,\ \ \phi(G) = \sigma(G) = G$$
$$\phi(A) = B,\ \ \phi(B) = A,\ \ \phi(D) = F, \phi(F) = D$$
$$\sigma(A) = D,\ \ \sigma(D) = A,\ \ \sigma(B) = F,\ \ \sigma(F) = B$$

Ισχυριζόμαστε ότι η σύνθεση $(\chi, \omega) = (\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi)$ έχει κέντρο G. Πράγματι:

$$\omega(\ell) = \tau(\psi(\ell)) = \tau(\ell) = \ell$$
$$\chi(A) = \sigma(\phi(A)) = \sigma(B) = F\ \ \Rightarrow$$
$$\omega(AFG) = \chi(A) \vee \chi(G) = F \vee G = AFG$$
$$\chi(B) = \sigma(\phi(B)) = \sigma(A) = D\ \ \Rightarrow$$
$$\omega(BDG) = \chi(B) \vee \chi(G) = D \vee G = BDG$$

άρα η ω αφήνει τις ευθείες που περνούν από το G αναλλοίωτες και το G είναι κέντρο. Επειδή $G \in CEG$, η σύνθεση δύο επάρσεων με άξονα ℓ είναι έπαρση με τον ίδιο άξονα, άρα η $\mathbb{E}(\ell)$ είναι υποομάδα της ομάδας όλων των συγγραμμικοτήτων.

Δείχνουμε ότι είναι αβελιανή με υπολογισμό των τιμών και των δύο συνθέσεων σε όλα τα σημεία που δεν ανήκουν στον άξονα:

$$\sigma(\phi(A)) = \sigma(B) = F,\ \ \phi(\sigma(A)) = \phi(D) = F$$
$$\sigma(\phi(B)) = \sigma(A) = D,\ \ \phi(\sigma(B)) = \phi(F) = D$$
$$\sigma(\phi(D)) = \sigma(F) = B,\ \ \phi(\sigma(D)) = \phi(A) = B$$
$$\sigma(\phi(F)) = \sigma(D) = A,\ \ \phi(\sigma(F)) = \phi(B) = A$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.