ΜΑΘΗΜΑ 12

Όπως είπαμε στο προηγούμενο μάθημα, η επιλογή του διανύσματος $(1, 0, 0)$ που έδωσε τα $[1, 0, 0]$ και $< 1, 0, 0 >$ έγινε για να διευκολυνθούν οι πράξεις. Θα δείξουμε τώρα ότι η ομάδα $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ είναι ισόμορφη με την αντίστοιχη $\mathbb{H}(A, \ell)$, για κάθε $A \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$, με $A \notin \ell$. Πρώτα χρειαζόμαστε ένα βοηθητικό αποτέλεσμα:

ΛΗΜΜΑ. Έστω A, B, C, D σημεία του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, ανά τρία μη συγγραμμικά. Τότε υπάρχει συγγραμμικότητα $(\sigma, \tau) : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με

$$\begin{aligned} \sigma([1, 0, 0]) &= A, \qquad & \sigma([0, 1, 0]) &= B, \\ \sigma([0, 0, 1]) &= C, \qquad & \sigma([1, 1, 1]) &= D. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Ζητάμε κατάλληλο γραμμικό ισομορφισμό $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζει την (σ, τ). [Υπενθυμίζουμε ότι ένας τέτοιος g *δεν* είναι μονοσήμαντα ορισμένος (βλ. Λήμμα 1, του Μαθήματος 11)]. Έστω

$$M_g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{21} & g_{23} \\ g_{31} & g_{2} & g_{33} \end{pmatrix}$$

ο πίνακας του ζητούμενου g. Έστω επίσης ότι

$$\begin{aligned} A &= [a_1, a_2, a_3], \qquad & B &= [b_1, b_2, b_3], \\ C &= [c_1, c_2, c_3], \qquad & D &= [d_1, d_2, d_3]. \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι όπως στον υπολογισμό του πίνακα M_f στο Μάθημα 11, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sigma([1, 0, 0]) = A \Rightarrow &\ [(1, 0, 0) \cdot M_g] = [a_1, a_2, a_3] \\ \Rightarrow &\ [g_{11}, g_{12}, g_{13}] = [a_1, a_2, a_3] \\ \Rightarrow &\ \exists \lambda \neq 0 \ : \ (g_{11}, g_{12}, g_{13}) = \lambda(a_1, a_2, a_3), \\ \sigma([0, 1, 0]) = B \Rightarrow &\ [(0, 1, 0) \cdot M_g] = [b_1, b_2, b_3] \\ \Rightarrow &\ [g_{21}, g_{22}, g_{23}] = [b_1, b_2, b_3] \\ \Rightarrow &\ \exists \mu \neq 0 \ : \ (g_{21}, g_{22}, g_{23}) = \mu(b_1, b_2, b_3) \\ \sigma([0, 0, 1]) = C \Rightarrow &\ [(0, 0, 1) \cdot M_g] = [c_1, c_2, c_3] \\ \Rightarrow &\ [g_{31}, g_{32}, g_{33}] = [c_1, c_2, c_3] \\ \Rightarrow &\ \exists \nu \neq 0 \ : \ (g_{31}, g_{32}, g_{33}) = \nu(c_1, c_2, c_3) \end{aligned}$$

Άρα ο M_g παίρνει την μορφή

$$M_g = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \mu b_1 & \mu b_2 & \mu b_3 \\ \nu c_1 & \nu c_2 & \nu c_3 \end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την τελευταία ισότητα:

$$\begin{aligned} \sigma([1,1,1]) = D \Rightarrow \ & [(1,1,1)\cdot M_g] = [d_1, d_2, d_3] \\ \Rightarrow \ & \exists \rho \neq 0 \ : \ (1,1,1)\cdot M_g = \rho(d_1, d_2, d_3). \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισοδυναμεί με το σύστημα των τριών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 - \rho d_1 &= 0 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 - \rho d_2 &= 0 \\ \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 - \rho d_3 &= 0 \end{aligned}$$

με τους τέσσερις αγνώστους $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$. Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος έχει και τις τέσσερις 3×3 υποορίζουσε μη-μηδενικές, διότι κάθε τρία από τα A, B, C, D είναι μη συγγραμμικά. Άρα υπάρχει μια οικογένεια λύσεων που αποτελούν ένα μονοδιάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$, δηλ. είναι όλες αριθμητικά πολλαπλάσια μιας μη-μηδενικής λύσης. Έστω $(\lambda_o, \mu_o, \nu_o, \rho_o) \neq (0,0,0,0)$ μια λύση. Είναι $\lambda_o \mu_o \nu_o \rho_o \neq 0$ και ο πίνακας

$$M_g = \begin{pmatrix} \lambda_o a_1 & \lambda_o a_2 & \lambda_o a_3 \\ \mu_o b_1 & \mu_o b_2 & \mu_o b_3 \\ \nu_o c_1 & \nu_o c_2 & \nu_o c_3 \end{pmatrix}.$$

ορίζει ισομορφισμό g_o που με τη σειρά του ορίζει την ζητούμενη (σ, τ). □

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Στο* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *θεωρούμε* $A \in \mathcal{P}$ *και* $\ell \in \mathcal{L}$ *με* $A \notin \ell$. *Τότε*

$$\mathbb{H}(A, \ell) \cong \mathbb{H}([1,0,0], < 1,0,0 >).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο σημεία $B, C \in \ell$ με $B \neq C$ και ένα D, έτσι ώστε τα A, B, C, D ανά τρία να είναι μη συγγραμμικά. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{gathered} h : \mathbb{H}([1,0,0], < 1,0,0 >) \longrightarrow \mathbb{H}(A, \ell) \ : \\ h(\phi, \psi) = (\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}, \tau \circ \psi \circ \tau^{-1}), \quad \forall \ (\phi, \psi) \in \mathbb{H}([1,0,0], < 1,0,0 >), \end{gathered}$$

όπου (σ, τ) η συγγραμμικότητα του προηγούμενου Λήμματος. Τότε:

(1) *Η h είναι καλά ορισμένη, δηλ. η εικόνα $h(\phi,\psi)$ είναι στοιχείο της ομάδας* $\mathbb{H}(A,\ell)$: Πράγματι, η εικόνα είναι συγγραμμικότητα, αφού

$$h(\phi,\psi)=(\sigma,\tau)\circ(\phi,\psi)\circ(\sigma,\tau)^{-1}$$

είναι σύνθεση τριών συγγραμμικοτήτων. Έχει κέντρο A: Έστω $k\in J(A)$. Τότε:

$$\begin{aligned} A\in k \Rightarrow\ & \sigma^{-1}(A)=[1,0,0]\in\tau^{-1}(k) \\ \Rightarrow\ & \psi(\tau^{-1}(k))=\tau^{-1}(k) \qquad (\text{αφού } [1,0,0] \text{ κεντρο της} (\phi,\psi)) \\ \Rightarrow\ & \tau(\psi(\tau^{-1}(k)))=\tau(\tau^{-1}(k))=k \end{aligned}$$

Έχει άξονα ℓ: Έστω $P\in\ell=B\vee C$. Τότε:

$$\begin{aligned} P\in B\vee C \Rightarrow\ & \sigma^{-1}(P)\in\tau^{-1}(B\vee C)=\sigma^{-1}(B)\vee\sigma^{-1}(C) \\ \Rightarrow\ & \sigma^{-1}(P)\in[0,1,0]\vee[0,0,1]=<1,0,0> \\ \Rightarrow\ & \phi(\sigma^{-1}(P))=\sigma^{-1}(P) \qquad (\text{αφού } <1,0,0> \text{ άξονας της}(\phi,\psi)) \\ \Rightarrow\ & \sigma(\phi(\sigma^{-1}(P)))=\sigma(\sigma^{-1}(P))=P \end{aligned}$$

(2) *Η h είναι 1-1 και επί*: Έστω $(\phi_1,\psi_1),(\phi_2,\psi_2)\in\mathbb{H}([1,0,0],<1,0,0>)$ με $h(\phi_1,\psi_1)=h(\phi_2,\psi_2)$. Τότε:

$$\begin{aligned} & h(\phi_1,\psi_1)=h(\phi_2,\psi_2) \ \Rightarrow \\ & (\sigma,\tau)^{-1}\circ h(\phi_1,\psi_1)\circ(\sigma,\tau)=(\sigma,\tau)^{-1}\circ h(\phi_2,\psi_2)\circ(\sigma,\tau) \ \Rightarrow \\ & (\phi_1,\psi_1)=(\phi_2,\psi_2) \end{aligned}$$

και η h είναι 1-1. Έστω και $(\bar\phi,\bar\psi)\in\mathbb{H}(A,\ell)$. Θεωρούμε την συγγραμμικότητα

$$(\phi,\psi)=(\sigma,\tau)^{-1}\circ(\bar\phi,\bar\psi)\circ(\sigma,\tau).$$

Παρόμοια με το (1), αποδεικνύουμε ότι $(\phi,\psi)\in\mathbb{H}([1,0,0],<1,0,0>)$. Είναι προφανές ότι $h(\phi,\psi)=(\bar\phi,\bar\psi)$, και η h είναι επί.

(3) *Η h είναι μορφισμός ομάδων*: Έστω $(\phi_1,\psi_1),(\phi_2,\psi_2)\in\mathbb{H}([1,0,0],<1,0,0>$. Τότε:

$$\begin{aligned} h((\phi_2,\psi_2)\circ(\phi_1,\psi_1)) &= (\sigma,\tau)\circ(\phi_2,\psi_2)\circ(\phi_1,\psi_1)\circ(\sigma,\tau)^{-1} \\ &= (\sigma,\tau)\circ(\phi_2,\psi_2)\circ(\sigma,\tau)^{-1}\circ(\sigma,\tau)\circ(\phi_1,\psi_1)\circ(\sigma,\tau)^{-1} \\ &= h(\phi_2,\psi_2)\circ h(\phi_1,\psi_1) \end{aligned}$$

που δείχνει ότι η h διατηρεί την πράξη των ομάδων, άρα είναι μορφισμός. □

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Στο* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, *για κάθε* $A \in \mathcal{P}$ *και* $\ell \in \mathcal{L}$ *με* $A \notin \ell$, *ισχύει*

$$(\mathbb{H}(A,\ell),\circ) \cong (\mathbb{H}([1,0,0],<1,0,0>),\circ) \cong (\widetilde{\mathcal{M}},\cdot) \cong (\mathbb{R}_*,\cdot).$$

ΑΣΚΗΣΗ. Να εξετάσετε ποιοί από τους παρακάτω γραμμικούς ενδομορφισμούς του $\mathbb{R}^3$ ορίζουν $(\phi,\psi) \in \mathbb{H}([1,0,0],<1,0,0>)$:

(1) $f(x,y,z) = (3x,y,z)$
(2) $f(x,y,z) = (2x,2y,3z)$
(3) $f(x,y,z) = (2x,x,z)$
(4) $f(x,y,z) = (x,-y,-z)$
(5) $f(x,y,z) = (2x,3y,3z)$