ΜΑΘΗΜΑ 14

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Θεωρούμε ένα προβολικό επίπεδο $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ και $A, X, X' \in \mathcal{P}$, $\ell \in \mathcal{L}$ με: $X \neq A$, $X' \neq A$, A, X, X' συγγραμμικά, $X \notin \ell$, $X' \notin \ell$. Η τετράδα (A, ℓ, X, X') λέγεται ***προσδιοριστική τετράδα***.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. (1) Σε μια προσδιοριστική τετράδα μπορεί $A \in \ell$ ή $A \notin \ell$. Επίσης μπορεί $X = X'$ ή $X \neq X'$.

(2) Όπως προκύπτει από το Θεώρημα του Μαθήματος 8, *αν υπάρχει* μια συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$ του $\mathcal{P}$ με $\phi(X) = X'$, τότε η (ϕ, ψ) προσδιορίζεται πλήρως από την τετράδα $(A, \ell, X, X' = \phi(X))$. Αυτό όμως δεν σημαίναι ότι αν δοθεί μια προσδιοριστική τετράδα όπως στον ανωτέρω ορισμό, κατ' ανάγκη μπορεί να βρεθεί και μια $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$ που να δίνει $\phi(X) = X'$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ λέγεται ***επίπεδο Desargues***, αν για κάθε προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') με $A \notin \ell$, υπάρχει ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$ με $\phi(X) = X'$.

ΛΗΜΜΑ. *Στο $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, για κάθε προσδιοριστική τετράδα της μορφής*

$$([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >, [1, 1, 0], P)$$

υπάρχει ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ με $\phi([1, 1, 0]) = P$.

Απόδειξη. Έστω $P = [p, q, r]$. Από τον ορισμό της προσδιοριστικής τετράδας, προκύπτει:

$$P \neq [1, 0, 0] \;\Rightarrow\; (q, r) \neq (0, 0),$$
$$P \notin < 1, 0, 0 > \;\Rightarrow\; p \neq 0.$$

Επίσης, επειδή $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 0]$, P είναι συνευθειακά,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ p & q & r \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; r = 0.$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις $r = 0$ και $(q, r) \neq (0, 0)$, παίρνουμε $q \neq 0$, άρα

$$P = [p, q, r] = [1, q/p, 0] = [1, a, 0], \qquad a \neq 0.$$

Θέτουμε $s = a^{-1} \neq 0$ και θεωρούμε τον γραμμικό ισομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$ με πίνακα

$$M_f = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και την αντίστοιχη $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}([1,0,0], <1,0,0>)$. Τότε

$$\phi([1,1,0]) = [(1,1,0) \cdot M_f] = [s,1,0] = [1,1/s,0] = [1,a,0] = P. \qquad \square$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ είναι επίπεδο Desargues.*

Απόδειξη. Έστω στο $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ μια προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') με $A \notin \ell$. Θέτουμε $X = D$, θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία $B \neq C$ με $B, C \in \ell$, έτσι ώστε τα A, B, C, D ανά τρία να μην είναι συγγραμμικά, οπότε από το αποτέλεσμα του Λήμματος 4 από το Μάθημα 11, έχουμε την ύπαρξη μιας συγγραμμικότητας (σ, τ) του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με

$$\sigma([1,0,0]) = A, \qquad \sigma([0,1,0]) = B,$$
$$\sigma([0,0,1]) = C, \qquad \sigma([1,1,0]) = D.$$

Από τις ανωτέρω ισότητες προκύπτει

$$\tau(<1,0,0>) = \tau([0,1,0]) \vee [0,0,1]) = \sigma([0,1,0]) \vee \sigma([0,0,1]) = B \vee C = \ell.$$

Θεωρούμε και την αντίστροφη συγγραμμικότητα $(\sigma, \tau)^{-1} = (\sigma^{-1}, \tau^{-1})$ και την εικόνα της στο σημείο X', δηλ. το $\sigma^{-1}(X') = P$. Έχουμε

$$X' \neq A \Rightarrow \; \sigma^{-1}(X') \neq \sigma^{-1}(A) \; \Rightarrow \; P \neq [1,0,0],$$
$$X' \notin \ell \Rightarrow \; \sigma^{-1}(X') \notin \tau^{-1}(\ell) \; \Rightarrow \; P \notin <1,0,0>.$$

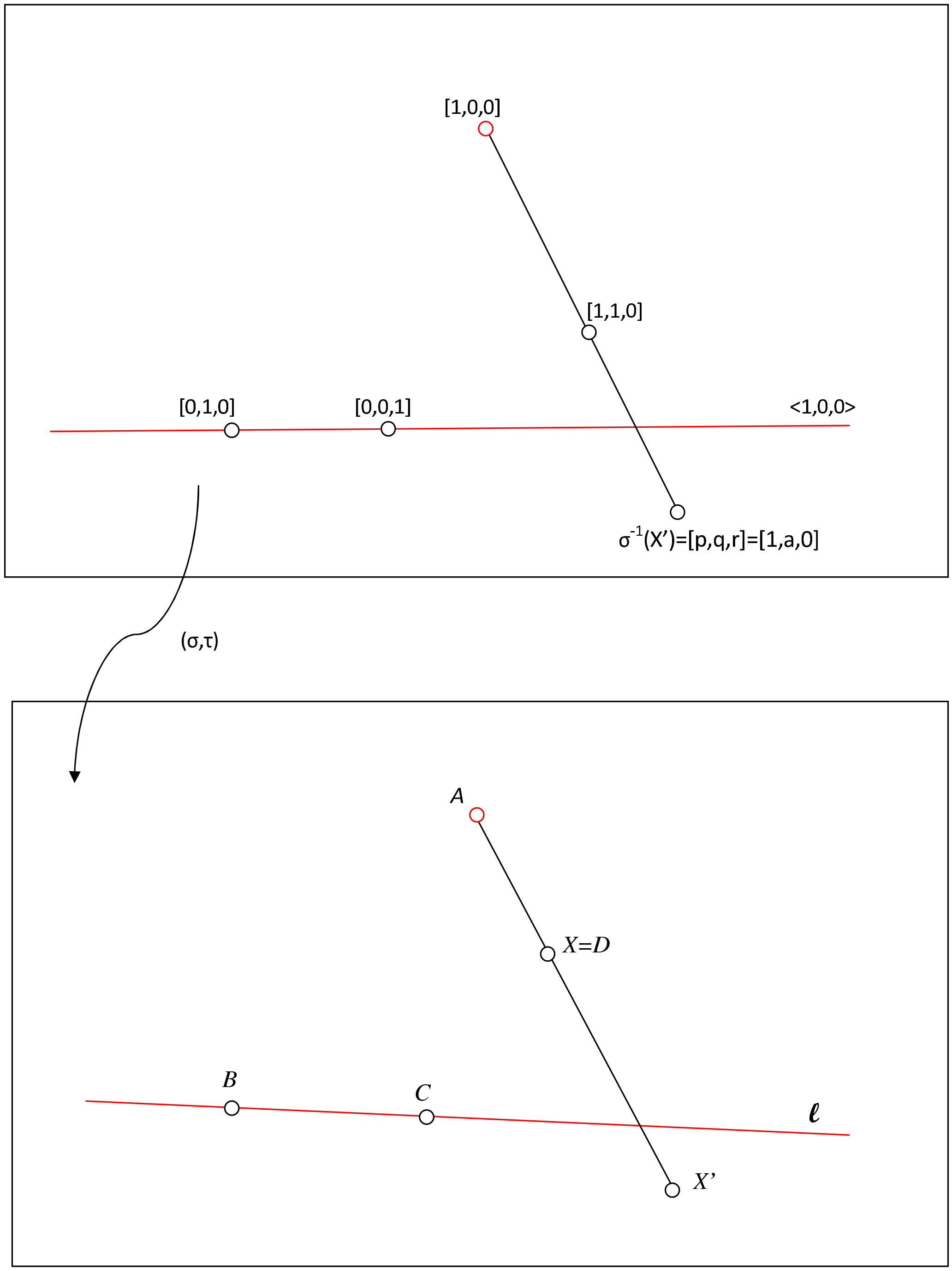
Επίσης τα σημεία A, $X = D$ και X' είναι από την υπόθεση συγγραμμικά, άρα και οι αντίστροφες εικόνες τους $[1,0,0]$, $[1,1,0]$ και P είναι συγγραμμικές. Άρα $([1,0,0], <1,0,0>, [1,1,0], P)$ είναι προσδιοριστική τετράδα και από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει $(\phi_o, \psi_o) \in \mathbb{H}([1,0,0], <1,0,0>)$ με $\phi_o([1,1,0]) = P$. Όπως στο Θεώρημα του Μαθήματος 12, θεωρούμε τον ισομορφισμό ομάδων

$$h : \mathbb{H}([1,0,0], <1,0,0>) \longrightarrow \mathbb{H}(A, \ell) :$$
$$h((\phi, \psi)) = (\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) \circ (\sigma, \tau)^{-1}$$

Τότε $h(\phi_o, \psi_o) \in \mathbb{H}(A, \ell)$ με

$$\sigma \circ \phi_o \circ \sigma^{-1}(X) = \sigma(\phi_o(\sigma^{-1}(X))) = \sigma(\phi_o([1,1,0])) = \sigma(P) = X'$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. Βλ. το αντίστοιχο σχήμα στην επόμενη σελίδα. $\square$



Τα παραπάνω είναι μια *αλγεβρική* προσέγγιση των επιπέδων Desargues. Για την πληρότητα της παρουσίασης, δίνουμε (χωρίς αποδείξεις) την *γεωμετρική* προσέγγιση.

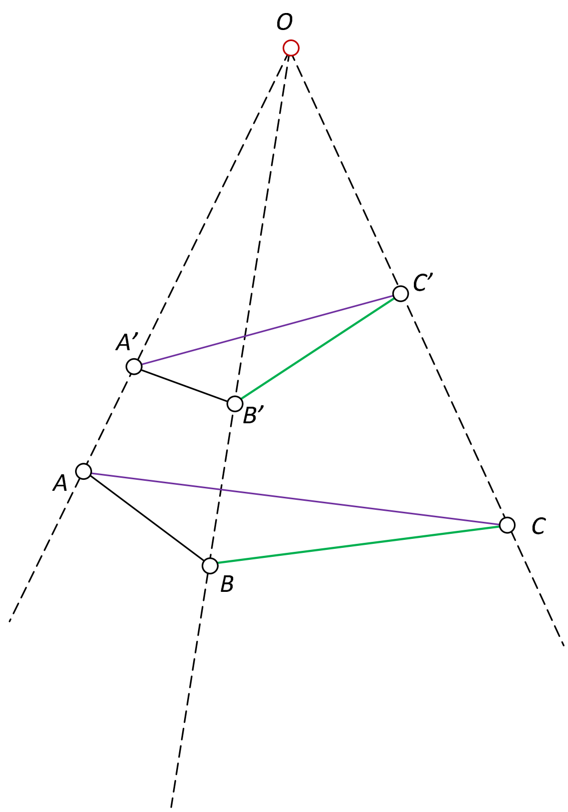
ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Σε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ένα **τρίγωνο** ABC είναι ένα σύνολο τριών μη συγγραμμικών σημείων A, B, C και το σύνολο των τριών ευθειών που αυτά ορίζουν. Δηλ.

$$ABC \equiv \{A, B, C\} \cup \{A \vee B, B \vee C, C \vee A\}.$$

Τα σημεία λέγονται **κορυφές** και οι ευθείες **πλευρές** του τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Μπορούν οι τρεις ευθείες στον ορισμό του τριγώνου να συντρέχουν;

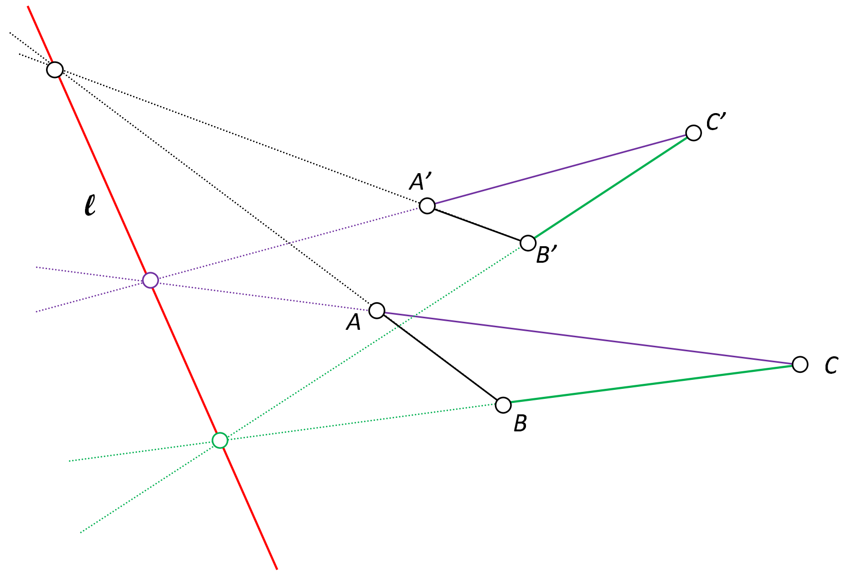
ΟΡΙΣΜΟΣ 4. Δύο τρίγωνα ABC και XYZ λέγονται **προοπτικά ως προς κέντρο**, αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\pi : \{A, B, C\} \longrightarrow \{X, Y, Z\}$ και ένα σημείο $O \in \mathcal{P}$, έτσι ώστε οι τριάδες $(O, P, \pi(P))$, $P = A, B, C$, να αποτελούνται από συγγραμμικά σημεία (βλ. το επόμενο σχήμα).



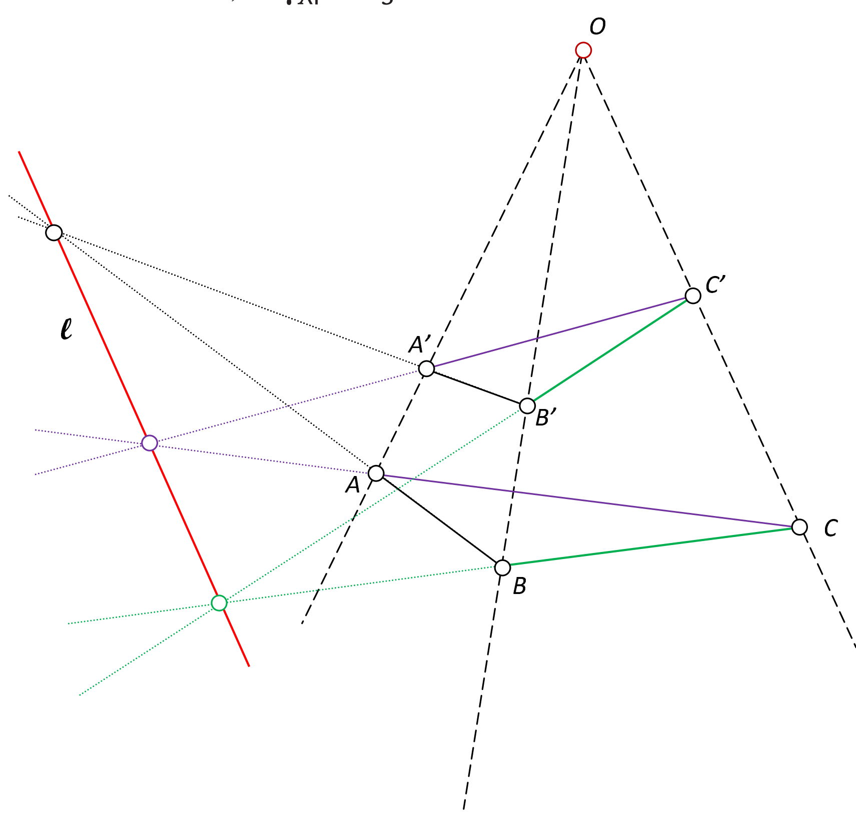
Στο ανωτέρω σχήμα όπως και σε αυτό που ακολουθεί, έχουμε θέσει

$$A' = \pi(A), \qquad B' = \pi(B), \quad C' = \pi(C).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5. Δύο τρίγωνα ABC και XYZ λέγονται **προοπτικά ως προς άξονα**, αν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\pi : \{A, B, C\} \longrightarrow \{X, Y, Z\}$ και μια ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$, έτσι ώστε οι τριάδες $(\ell, A \vee B, \pi(A) \vee \pi(B))$, $(\ell, B \vee C, \pi(B) \vee \pi(C))$, $(\ell.C \vee A, \pi(C) \vee \pi(A))$ να αποτελούνται από συντρέχουσες ευθείες (βλ. το επόμενο σχήμα).



Αν παρατηρήσετε τα δύο σχήματα θα δείτε ότι έχουν χρησιμοποιηθεί *τα ίδια τρίγωνα*. Δηλ.τα τρίγωνα των σχημάτων είναι προοπτικά και ως προς κέντρο και ως προς άξονα. Στο παρακάτω σχήμα διαγράφονται και οι δύο προοπτικότητες των τριγώνων ABC και $A'B'C'$, συγχρόνως.



Θεωρούμε την επόμενη συνθήκη

Συνθήκη (D)	*Δύο τρίγωνα είναι προοπτικά ως προς κέντρο αν και μόνον αν είναι προοπτικά ως προς άξονα.*

Η Συνθήκη *(D)* είναι η γεωμετρική περιγραφή των επιπέδων Desargues, όπως φαίνεται από το επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Ένα προβολοκό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ είναι επίπεδο Desargues αν και μόνον αν ισχύει η συνθήκη (D).* □

ΑΣΚΗΣΗ 2. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ το προβολικό επίπεδο των 7 σημείων, $A \in \mathcal{P}$, $\ell \in \mathcal{L}$.

(1) Αν $A \notin \ell$, να υπολογίσετε την ομάδα $\mathbb{H}(A, \ell)$.

(2) Αν $A \in \ell$, να υπολογίσετε την ομάδα $\mathbb{E}(A, \ell)$.

(3) Να εξετάσετε αν το $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ είναι επίπεδο Desargues.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ένα προβολικό επίπεδο Desargues. Να εξετάσετε αν το δυϊκό του είναι επίπεδο Desargues.