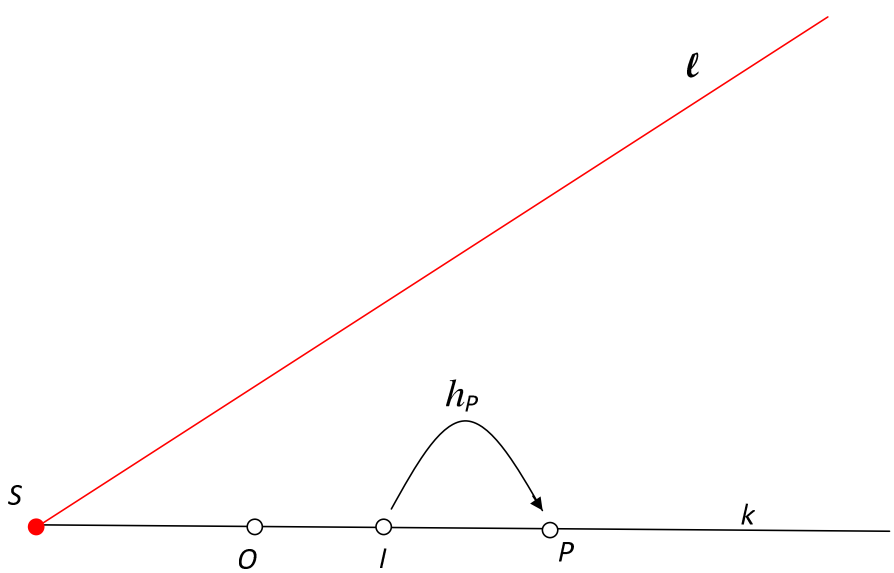
ΜΑΘΗΜΑ 17

Όπως στο προηγούμενο μάθημα, θεωρούμε ένα προβολικό επίπεδο Desargues $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$, σταθεροποιούμε δύο ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ που τέμνονται σε ένα σημείο $S = k \wedge \ell$, και ένα σημείο $O \in k$ με $O \neq S$. Θεωρούμε πάλι το σύνολο $\mathcal{R} = J(k) \setminus \{S\}$ και συμβολίζουμε

$$\mathcal{R}_* = \mathcal{R} \setminus \{O\} = J(k) \setminus \{S, O\}.$$

Σταθεροποιούμε ένα επιπλέον σημείο $I \in \mathcal{R}$ με $I \neq O$, δηλ. $I \in \mathcal{R}_*$. Αν τώρα θεωρήσουμε τις συγγραμμικότητες με τον ίδιο άξονα ℓ αλλά με κέντρο O, αυτές είναι ομολογίες που προσδιορίζονται πλήρως από τετράδες της μορφής (O, ℓ, X, X'), όπου τα O, X, X' είναι συγγραμμικά και τα X, X' δεν ανήκουν στην ℓ και δεν συμπίπτουν με το κέντρο O. Ένα τέτοιο σημείο X είναι το I. Άρα κάθε σημείο $P \in \mathcal{R} \setminus \{O\} = \mathcal{R}_*$ αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε μια τετράδα (O, ℓ, I, P) η οποία με τη σειρά της αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε μια ομολογία που *υπάρχει* (αφού το επίπεδο είναι Desargues), που θα συμβολίζουμε με $h_P \in \mathbb{H}(O, \ell)$ και που προσδιορίζεται από την ισότητα

$$h_P(I) = P. \tag{1}$$



Άρα έχουμε δύο αμφιμονοσήμαντες αντιστοιχίες

$$\mathcal{R}_* \ni P \longleftrightarrow (O, \ell, I, P) \longleftrightarrow h_P \in \mathbb{H}(O, \ell).$$

Συμβολίζουμε με h την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$h : \mathcal{R}_* \longrightarrow \mathbb{H}(O, \ell) : P \longmapsto h(P) = h_P.$$

Όπως και προηγουμένως, η αλγεβρική δομή της (όχι κατ' ανάγκη αβελιανής) ομάδας $\mathbb{H}(O, \ell)$ περνά στο σύνολο $\mathcal{R}_*$ μέσω της ισότητας

$$P \cdot Q := h^{-1}(h(P) \circ h(Q)) = h^{-1}(h_P \circ h_Q), \tag{2}$$

δηλ. για να "πολλαπλασιάσουμε" τα σημεία P και Q του $\mathcal{R}_*$ τα μεταφέρουμε στο $\mathbb{H}(O, \ell)$, συνθέτουμε τις εικόνες τους, και ξαναγυρίζουμε την σύνθεση πίσω στο $\mathcal{R}_*$. Η διαδικασία φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_* \times \mathcal{R}_* \arrow[r, "h \times h"] \arrow[d, dashed, "\cdot"'] & \mathbb{H}(O, \ell) \times \mathbb{H}(O, \ell) \arrow[d, "\circ"] \\
\mathcal{R}_* & \mathbb{H}(O, \ell) \arrow[l, "h^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Ακολουθούμε τώρα τα βήματα που έγιναν στο προηγούμενο μάθημα: Εφαρμόζοντας την h στα δύο μέλη της ισότητας (2) παίρνουμε

$$h_{P \cdot Q} = h_P \circ h_Q. \tag{3}$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (3) παίρνουμε

$$P \cdot Q = h_{P \cdot Q}(I) = h_P \circ h_Q(I) = h_P(Q). \tag{4}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η ομολογία που αντιστοιχεί στην προσδιοριστική τετράδα (O, ℓ, I, I) είναι η $(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$, άρα

$$h_I = id_{\mathcal{P}}. \tag{5}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι, για κάθε $P \in \mathcal{R}_*$, η ομολογία $h_P \in \mathbb{H}(O, \ell)$ έχει αντίστροφη $h_P^{-1} \in \mathbb{H}(O, \ell)$, η οποία εφαρμοσμένη στην (1) δίνει

$$h_P^{-1}(P) = I. \tag{6}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Το σύνολο $\mathcal{R}_*$ με πολλαπλασιασμό που ορίζεται από την σχέση (2) είναι ομάδα και η απεικόνιση*

$$h : (\mathcal{R}_*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{H}(O, \ell), \circ)$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. (i) Ο πολλαπλασιασμός που ορίστηκε στην (2) είναι προσεταιριστικός:

$$\begin{aligned} P\cdot(Q\cdot R) &= h^{-1}(h_P \circ h_{Q\cdot R}) \\ &\overset{(3)}{=} h^{-1}(h_P \circ (h_Q \circ h_R)) \\ &= h^{-1}((h_P \circ h_Q)\circ h_R) \\ &\overset{(3)}{=} h^{-1}(h_{P\cdot Q} \circ h_R) \\ &= (P\cdot Q)\cdot R \end{aligned}$$

Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, το σημείο I: Για κάθε $P \in \mathcal{R}_*$

$$I\cdot P = h^{-1}(h_I \circ h_P) \overset{(5)}{=} h^{-1}(id_{\mathcal{P}} \circ h_P) = h^{-1}(h_P) = h^{-1}\circ h(P) = P,$$

και

$$P\cdot I = h^{-1}(h_P \circ h_I) \overset{(5)}{=} h^{-1}(h_P \circ id_{\mathcal{P}}) = h^{-1}(h_P) = h^{-1}\circ h(P) = P.$$

Παρατηρείστε ότι η νέα πράξη δεν είναι κατ' ανάγκη μεταθετική, άρα χρειάζεται ο έλεγχος και των δύο ανωτέρω ισοτήτων.

Τέλος, κάθε $P \in \mathcal{R}$ έχει "*αντίστροφο*", το σημείο

$$P^{-1} = h_P^{-1}(I). \tag{7}$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την (4) έχουμε

$$P\cdot P^{-1} = h_P(P^{-1}) = h_P(h_P^{-1}(I)) = I.$$

Επίσης, ανάλογα με την Παρατήρηση (2) του Μαθήματος 16, έχουμε

$$P^{-1} = h_{P^{-1}}(I) = h_P^{-1}(I) \;\Rightarrow\; h_{P^{-1}} = h_P^{-1},$$

άρα

$$P^{-1}\cdot P = h_{P^{-1}}(P) = h_P^{-1}(P) = h_P^{-1}(h_P(I)) = I,$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη ότι το P^{-1} είναι αντίστροφο του P.

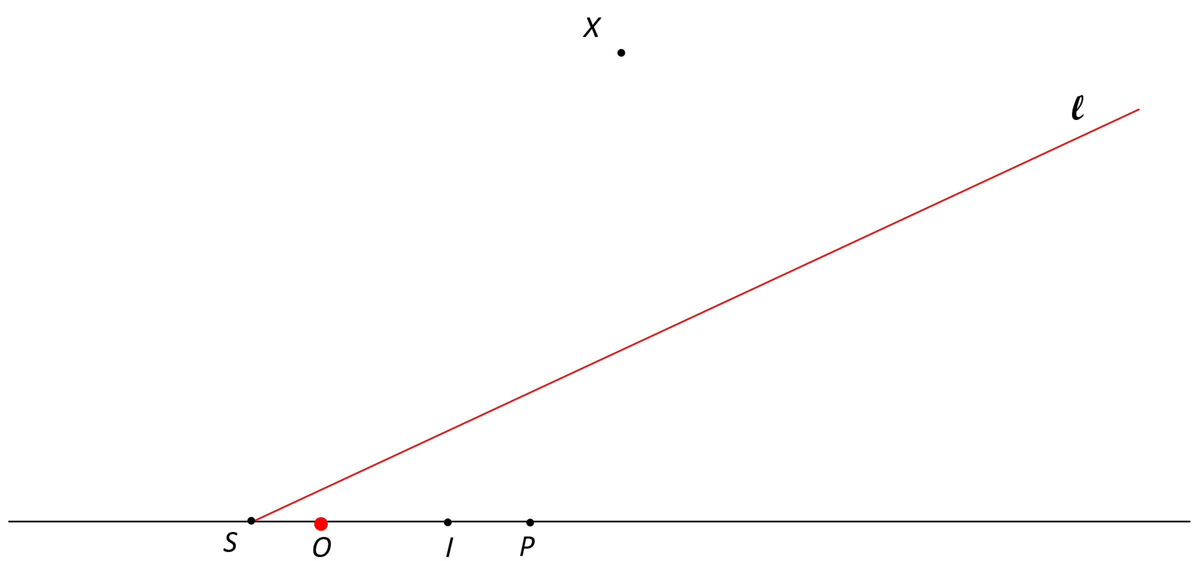
(ii) Η h είναι ισομορφισμός ομάδων: είναι 1-1 και επί και διατηρεί την πράξη: για κάθε $P, Q \in \mathcal{R}_*$ είναι

$$h(P\cdot Q) = h_{P\cdot Q} = h_P \circ h_Q = h(P)\circ h(Q),$$

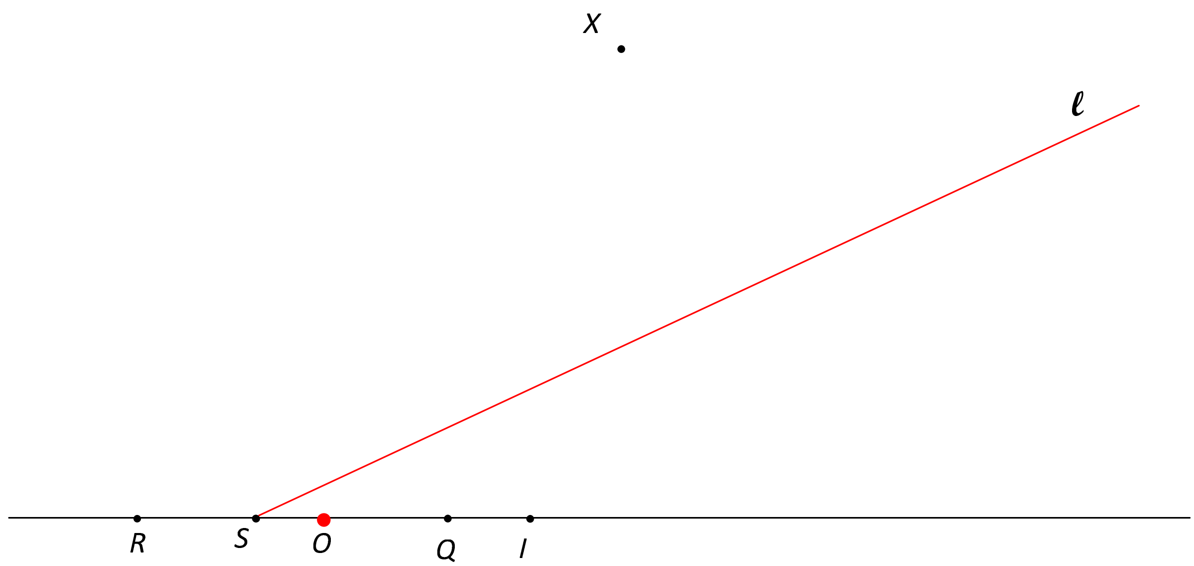
λόγω της (3), και απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

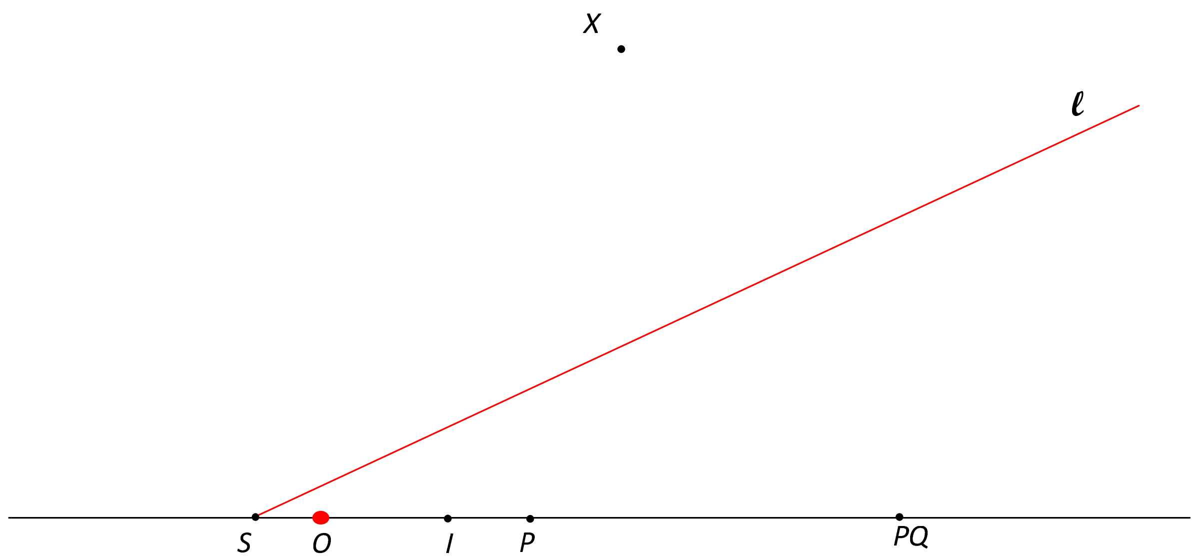
1. Στο επόμενο σχήμα να χρησιμοποιήσετε βοηθητικά το ζεύγος (X, X'), για κατάλληλο X', και να βρείτε τα σημεία $P^2 = P \cdot P$ και P^{-1}.



2. Στο επόμενο σχήμα να χρησιμοποιήσετε βοηθητικά το ζεύγος (X, X'), για κατάλληλο X', και να βρείτε τα σημεία Q^2 και R^2.



3. Στο επόμενο σχήμα να χρησιμοποιήσετε βοηθητικά το ζεύγος (X, X'), για κατάλληλο X' και να βρείτε το σημείο Q.



4. Στο επόμενο σχήμα να χρησιμοποιήσετε βοηθητικά το ζεύγος (X, X'), για κατάλληλο X' και να βρείτε τα σημεία P και I.