ΜΑΘΗΜΑ 18

Στα δύο προηγούμενα μαθήματα θεωρήσαμε μια ευθεία k, και το σύνολο των σημείων της, *αφού αφαιρέθηκε ένα σημείο* S, δηλ. πήραμε το σύνολο

$$\mathcal{R} = J(k) \setminus \{S\}.$$

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{R}$ μπορεί να εφοδιαστεί με δύο πράξεις, "πρόσθεση" (+) και "πολλαπλασιασμό" ($\cdot$), ώστε να γίνει (αν αυτό αποδειχθεί δυνατόν) ένα σώμα.

Πρώτα δείξαμε ότι το $\mathcal{R}$ έρχεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με μια (αβελιανή) ομάδα επάρσεων, από την οποία κληρονομεί μια πρόσθεση, ώστε $(\mathcal{R}, +)$ να είναι αβελιανή ομάδα.

Κατόπιν, αφού αφαιρέσαμε το ουδέτερο της πρόσθεσης, δηλ. το σημείο O, δείξαμε ότι το σύνολο $\mathcal{R}_* = \mathcal{R} \setminus \{O\}$ έρχεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με μια (όχι κατ' ανάγκη αβελιανή) ομάδα ομολογιών, άρα κληρονομεί από αυτήν ένα πολλαπλασιασμό, έτσι ώστε $(\mathcal{R}_*, \cdot)$ να είναι ομάδα.

Η αλγεβρική δομή του σώματος όμως απαιτεί η δεύτερη πράξη, του πολλαπλασιασμού, να ορίζεται σε όλο το σύνολο $\mathcal{R}$. Γι' αυτό, θέτουμε:

$$\forall\, P \in \mathcal{R} \;:\; O \cdot P = O \quad \text{και} \quad P \cdot O = O. \tag{1}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι οι δύο πράξεις συνδέονται μεταξύ τους με την *επιμεριστική ιδιότητα*:

$$P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R \quad \text{και} \tag{2}$$

$$(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R, \tag{3}$$

για κάθε $P, Q, R \in \mathcal{R}$. Χρειαζόμαστε πρώτα μερικά βοηθητικά αποτελέσματα. Υπενθυμίζουμε ότι για μια συγγραμμικότητα (φ, ψ) χρησιμοποιούμε μόνο το γράμμα φ και για τις δύο απεικονίσεις φ και ψ.

ΛΗΜΜΑ. *Για κάθε $X, Y \in \mathcal{R}_*$, ισχύει*

$$\varepsilon_{X \cdot Y} = h_X \circ \varepsilon_Y \circ h_X^{-1}. \tag{4}$$

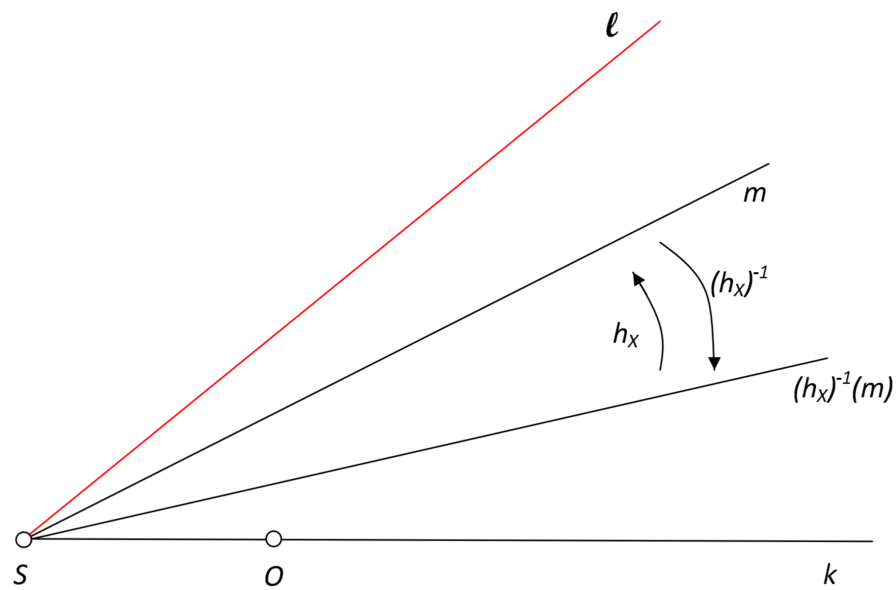
Απόδειξη. Για ευκολία συμβολίζουμε με φ την σύνθεση

$$\varphi = h_X \circ \varepsilon_Y \circ h_X^{-1}.$$

Παρατηρούμε ότι οι συγγραμμικότητες h_X, ε_Y και h_X^{-1} έχουν άξονα ℓ, άρα και η σύνθεση τους είναι συγγραμμικότητα με άξονα ℓ.

Δείχνουμε ότι το S είναι κέντρο της φ: Έστω $m \in J(S)$, $m \neq \ell$. Επειδή το S είναι σημείο του άξονα ℓ, μένει αναλλοίωτο και από τις τρεις συγγραμμικότητες h_X, $\mathcal{E}_Y$ και h_X^{-1}. Δηλ.

$$h_X(S) = \mathcal{E}_Y(S) = h_X^{-1}(S) = S.$$



Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το S είναι κέντρο της $\mathcal{E}_Y$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} S \in m \Rightarrow\ & h_X^{-1}(S) = S \in h_X^{-1}(m) \\ \Rightarrow\ & \mathcal{E}_Y \circ h_X^{-1}(m) = h_X^{-1}(m) \\ \Rightarrow\ & h_X \circ \mathcal{E}_Y \circ h_X^{-1}(m) = h_X \circ h_X^{-1}(m) = m. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $m \in J(S)$, $\varphi(m) = m$, και το S είναι κέντρο της φ. Επομένως $\varphi \in \mathbb{E}(S, \ell)$. Για να βρούμε σε ποιό σημείο P αντιστοιχεί, αρκεί να βρούμε το $P = \varphi(O)$. Επειδή οι h_X και h_X^{-1} έχουν κέντρο O, έχουμε

$$\varphi(O) = h_X \circ \mathcal{E}_Y \circ h_X^{-1}(O) = h_X \circ \mathcal{E}_Y(O) = h_X(Y) = X \cdot Y.$$

Δηλ. $\varphi = h_X \circ \mathcal{E}_Y \circ h_X^{-1} = \mathcal{E}_{X \cdot Y}$. □

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Για κάθε* $P, Q \in \mathcal{R}_*$, *ισχύει*

$$P \cdot (-Q) = -(P \cdot Q). \tag{5}$$

Απόδειξη. Επειδή το O είναι κέντρο των h_P και h_P^{-1} μένει αναλλοίωτο από αυτές, άρα

$$\begin{aligned}
-(P \cdot Q) &= \varepsilon_{P\cdot Q}^{-1}(O) \\
&= (h_P \circ \varepsilon_Q \circ h_P^{-1})^{-1}(O) \\
&= h_P \circ \varepsilon_Q^{-1} \circ h_P^{-1}(O) \\
&= h_P \circ \varepsilon_Q^{-1}(O) \\
&= h_P(-Q) = P \cdot (-Q)
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Για κάθε* $P, Q, R \in \mathcal{R}$, *ισχύει*

$$P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι κανένας παράγοντας δεν είναι ίσος με το O. Δηλ. $P, Q, R \in \mathcal{R}_*$ και $Q + R \neq O$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R &\Leftrightarrow h_P(Q + R) = \varepsilon_{P\cdot Q}(P \cdot R) \\
&\Leftrightarrow h_P \circ \varepsilon_Q(R) = \varepsilon_{P\cdot Q} \circ h_P(R), \quad \forall\, R \in \mathcal{R}_* \\
&\Leftrightarrow h_P \circ \varepsilon_Q = \varepsilon_{P\cdot Q} \circ h_P \\
&\Leftrightarrow h_P \circ \varepsilon_Q \circ h_P^{-1} = \varepsilon_{P\cdot Q},
\end{aligned}$$

που ισχύει, από το Λήμμα.

Εξετάζουμε ιδιαιτέρως τις περιπτώσεις που κάποιος παράγοντας ισούται με O:

Αν $P = O$, η ζητούμενη ισότητα γίνεται $O \cdot (Q + R) = O \cdot Q + O \cdot R$, δηλ. $O = O + O$, που ισχύει.

Αν $Q = O$, η ζητούμενη ισότητα γίνεται $P \cdot (O + R) = P \cdot O + P \cdot R$, δηλ. $P \cdot R = O + P \cdot R$, που ισχύει.

Ομοίως, αν $R = O$, η ζητούμενη ισότητα γίνεται $P \cdot Q = P \cdot Q + O$, που ισχύει.

Αν $Q + R = O$, τότε $R = -Q$ και η ζητούμενη ισότητα ισοδυναμεί τώρα με

$$\begin{aligned} P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R &\Leftrightarrow P \cdot O = P \cdot Q + P \cdot (-Q) \\ &\Leftrightarrow O = P \cdot Q + P \cdot (-Q) \\ &\Leftrightarrow -(P \cdot Q) = P \cdot (-Q) \end{aligned}$$

πράγμα που ισχύει, από το Πόρισμα που προηγήθηκε. □