ΜΑΘΗΜΑ 21

Όπως είδαμε στα προηγούμενα, αν $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ είναι ένα προβολικό επίπεδο Desargues, σε κάθε ευθεία του – μετά την αφαίρεση ενός σημείου – ορίζεται η αλγεβρική δομή ενός διαιρετικού δακτυλίου. Σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, ο διαιρετικός δακτύλιος που προκύπτει έχει μεταθετικό πολλαπλασιασμό, άρα είναι σώμα. Π.χ., αν το επίπεδο είναι το $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, βρίσκουμε ένα δακτύλιο $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ όπου η προσθετική ομάδα $(\mathcal{R}, +)$ είναι ισόμορφη με μια ομάδα $\mathbb{E}(A, \ell)$, άρα με την $(\mathbb{R}, +)$, και η πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathcal{R}_*, \cdot)$ είναι ισόμορφη με μια ομάδα $\mathbb{H}(A, \ell)$, άρα με την $(\mathbb{R}, \cdot)$. Επομένως ο δακτύλιος $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ που προκύπτει είναι ισόμορφος με το σώμα $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Παρόμοια, αν έχουμε το επίπεδο των 7 σημείων, βρίσκουμε προσθετική ομάδα $(\mathcal{R}, +)$ ισόμορφη με την $\mathbb{E}(A, \ell) = \{id, \phi\} \equiv \{0, 1\}$ και πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathcal{R}_*, \cdot)$ ισόμορφη με την $\mathbb{H}(A, \ell) = \{id\} \equiv \{0\}$, που είναι μεταθετική. Άρα τώρα ο δακτύλιος $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ είναι ισόμορφος με το σώμα $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένα προβολικό επίπεδο Desargues λέγεται **επίπεδο του Πάππου**, αν ο αντίστοιχος διαιρετικός δακτύλιος είναι σώμα, άρα οι ομάδες $\mathbb{H}(A, \ell)$ με $A \notin \ell$ είναι αβελιανές.

Όπως και στα επίπεδα Desargues, παράλληλα με την αλγεβρική προσέγγιση του ορισμού υπάρχει η αντίστοιχη γεωμετρική. Ας θεωρήσουμε σε ένα επίπεδο Desargues $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ δύο ευθείες $k \neq \ell$ και δύο τριάδες σημείων $A, B, C \in k$, $A', B', C' \in \ell$ που είναι διαφορετικά μεταξύ τους και δεν συμπίπτουν με την τομή $S = k \wedge \ell$. Φέρουμε τις ευθείες

$$A \vee B',\ A \vee C',\ B \vee A',\ B \vee C',\ C \vee A',\ C \vee B'$$

και θεωρούμε τις τομές

$$E = (A \vee B') \wedge (A' \vee B), \qquad F = (A \vee C') \wedge (A' \vee C), \qquad G = (B \vee C') \wedge (B' \vee C).$$

Σε ένα τυχαίο επίπεδο Desargues μπορεί τα σημεία E, F, G να είναι ή να μην είναι συγγραμμικά. Θεωρούμε την συνθήκη

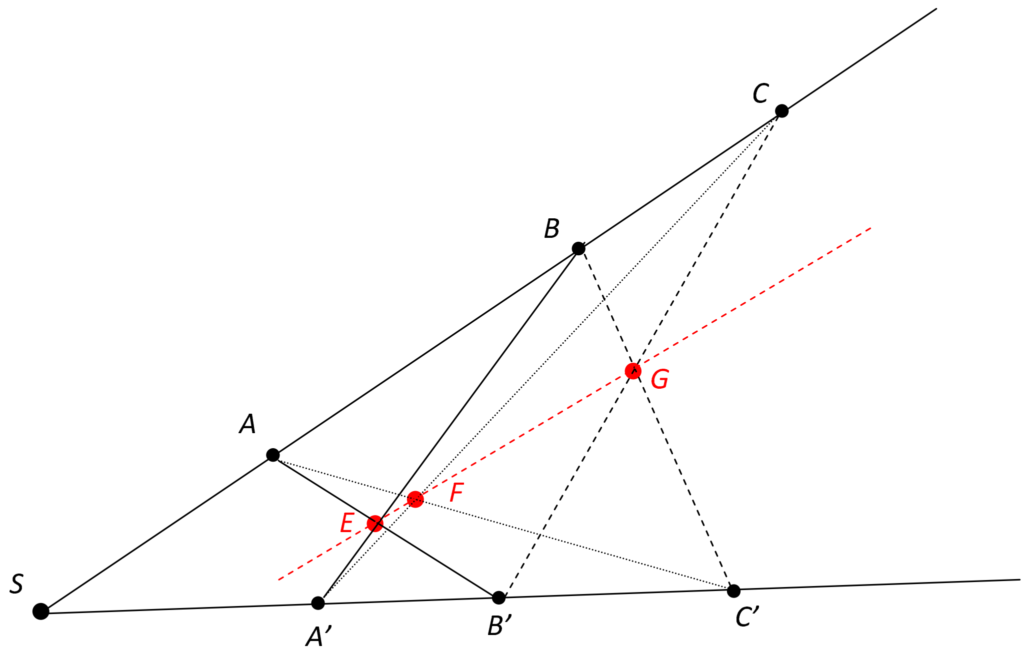
Θεωρούμε την επόμενη

Συνθήκη (Π) *Για οποιεσδήποτε τριάδες σημείων A, B, C και A', B', C', όπως ανωτέρω, τα E, F, G είναι συγγραμμικά.*

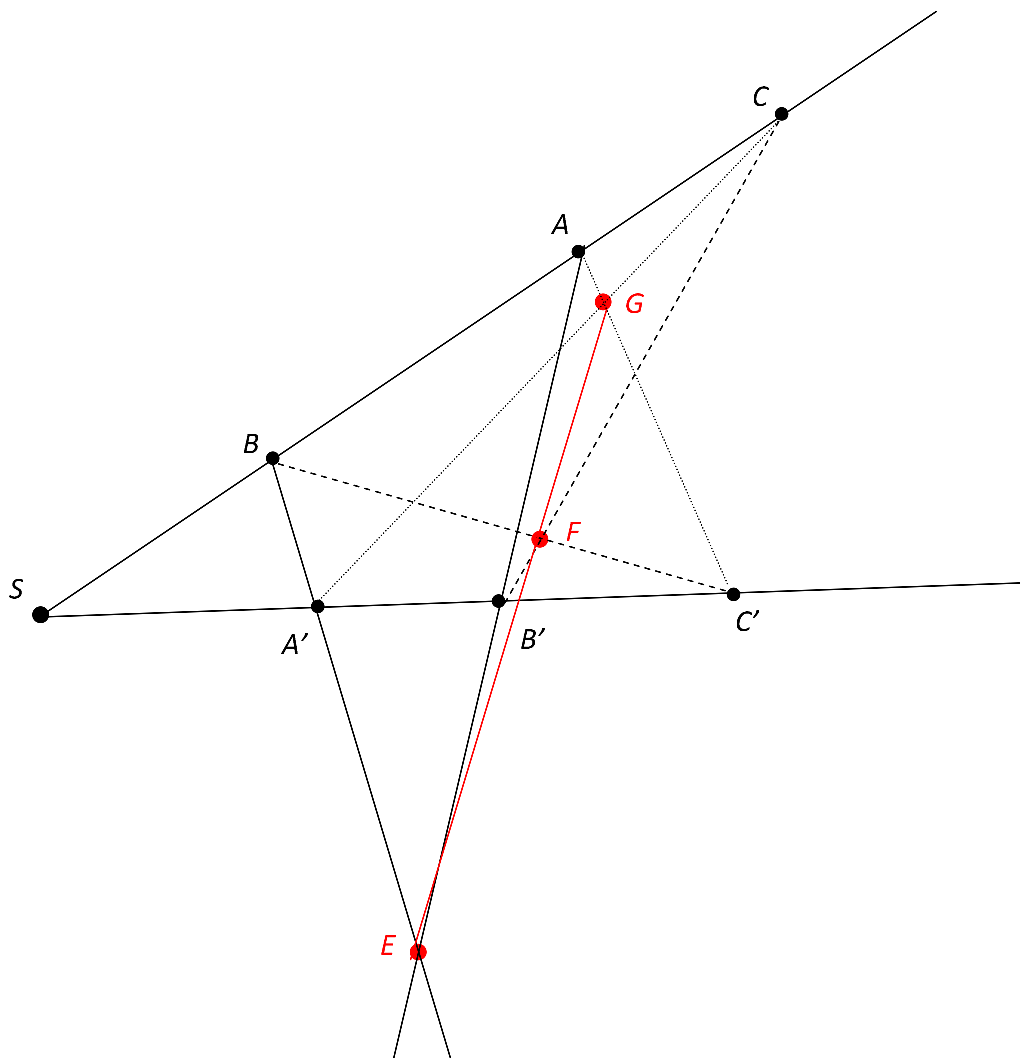
Ισχύει το επόμενο

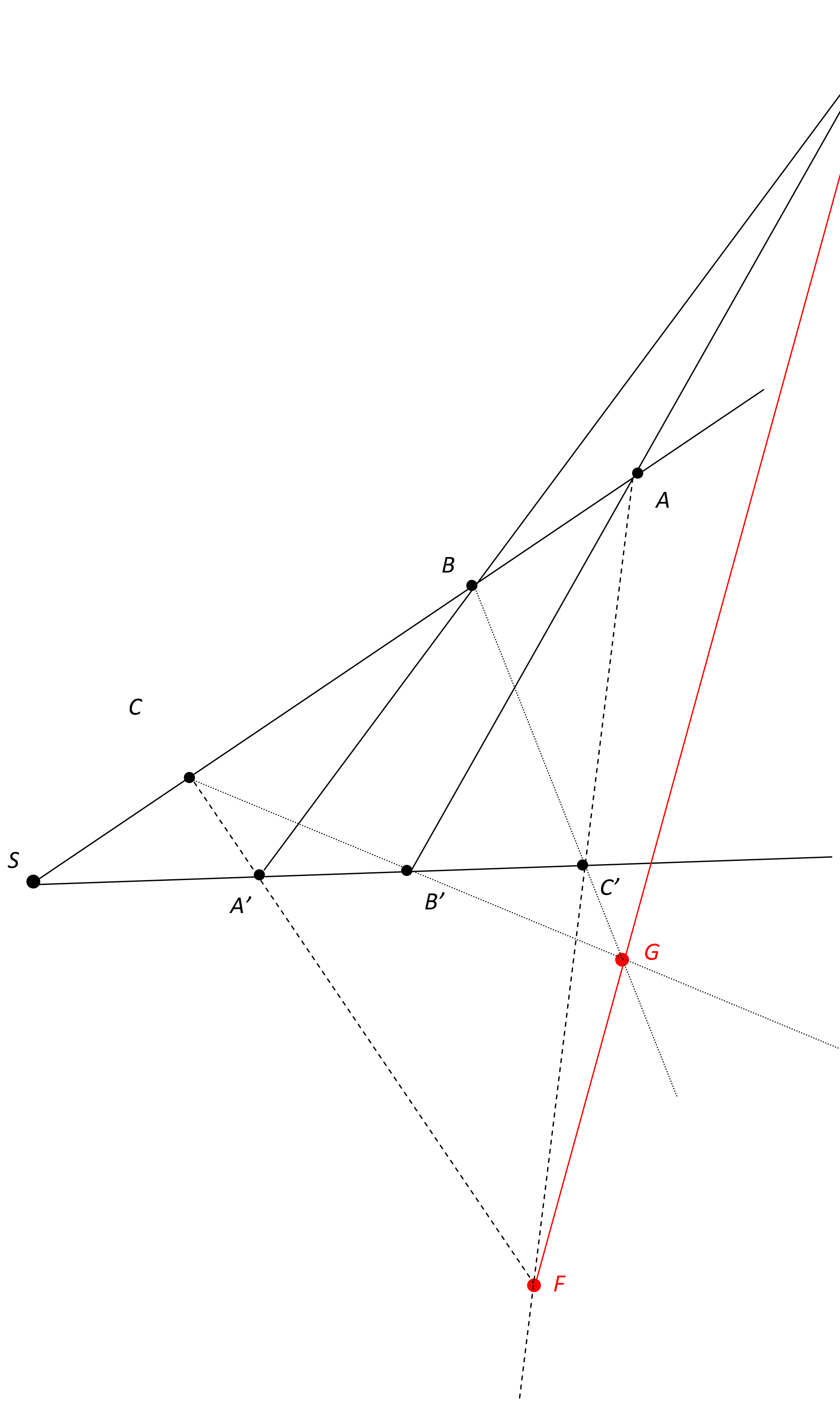
ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ένα προβολικό επίπεδο Desargues είναι επίπεδο του Πάππου, αν και μόνον αν ισχύει η συνθήκη (Π).*

Στα επόμενα σχήματα φαίνεται η ευθεία EFG για τις διάφορες θέσεις των A, B, C.



Το παρακάτω σχήμα προκύπτει από το προηγούμενο με μια αντιμετάθεση των A και B.




E
A
B
C
S
A'
B'
C'
G
F