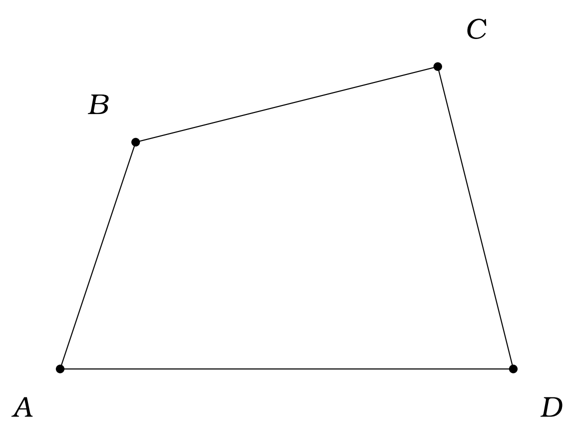
ΜΑΘΗΜΑ 3: ΔΥΪΣΜΟΣ

Στο προηγούμενο Μάθημα 2 είδαμε ότι σε ένα ΠΕ, από το αξίωμα (ΠΕ 3), υπάρχουν 4 σημεία, διαφορετικά μεταξύ τους, που ανά 3 είναι η συγγραμμικά. Αποδεικνύουμε τώρα ότι συμβαίνει το "ανάλογο" με τις ευθείες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Κάθε ΠΕ έχει (τουλάχιστον) 4 διαφορετικές ευθείες, που ανά 3 είναι μη συντρέχουσες.*

Απόδειξη. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ και A, B, C και D τα 4 σημεία του αξιώματος (ΠΕ 3). Επειδή τα σημεία αυτά είναι διαφορετικά, ορίζονται οι ευθείες $A \vee B$, $B \vee C$, $C \vee D$ και $D \vee A$. Αυτές είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Πράγματι, αν $A \vee B = B \vee C$, τότε A, B και C είναι συγγραμμικά, άτοπο. Ομοίως για τους άλλους συνδυασμούς.



Σχήμα 3.1

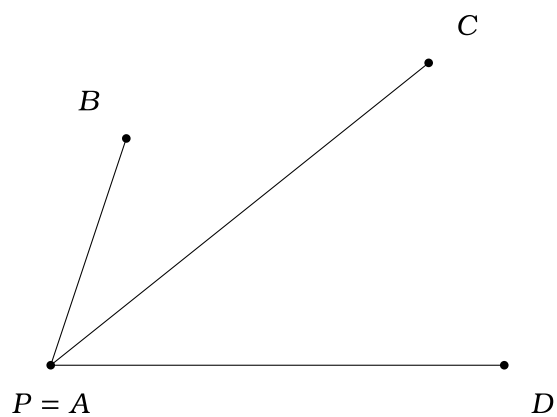
Αποδεικνύουμε τώρα ότι κάθε τριάδα από τις ανωτέρω ευθείες δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Έστω προς άτοπο ότι οι $A \vee B$, $B \vee C$ και $C \vee D$ διέρχονται από το σημείο $P \in \mathcal{P}$. Οι $A \vee B$ και $B \vee C$ διέρχονται από το B. Αν διέρχονται και από το $P \neq B$, τότε διέρχονται από δύο διαφορετικά σημεία, άρα $A \vee B = B \vee C$ και τα A, B και C είναι συγγραμμικά, άτοπο. Άρα $P = B$. Επίσης, οι $B \vee C$ και $C \vee D$ διέρχονται από το C. Άρα, όπως προηγουμένως, $P = C$. Δηλ. $B = C$, που είναι άτοπο από την υπόθεση. Παρόμοια για κάθε τριάδα από τις ανωτέρω ευθείες. $\square$

Επίσης στο προηγούμενο μάθημα αποδείξαμε ότι κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον 3 σημεία. Αποδεικνύουμε ότι πάλι ισχύει το αντίστοιχο "ανάλογο" για τα σημεία:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Αν $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι ένα ΠΕ, από κάθε σημείο $P \in \mathcal{P}$ διέρχονται τουλάχιστον 3 ευθείες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε 4 σημεία A, B, C και D διαφορετικά μεταξύ τους, που ανά 3 είναι μη συγγραμμικά (η ύπαρξη των οποίων εξασφαλίζεται από το αξίωμα (ΠΕ 3)) και ένα σημείο $P \in \mathcal{P}$. Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

(1) Το P συμπίπτει με ένα από τα A, B, C, D, έστω το A.



Σχήμα 3.2

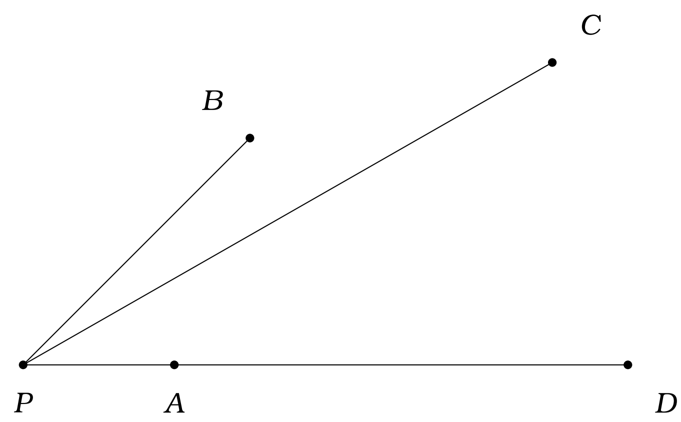
Τότε οι ευθείες $P \vee B$, $P \vee C$ και $P \vee D$ διέρχονται από το P, και είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Πράγματι, αν $P \vee B = P \vee C$, τότε τα P, B και C, δηλ. τα A, B και C είναι συγγραμμικά, άτοπο. Ομοίως για τις άλλες περιπτώσεις.

(2) Το P δεν συμπίπτει με κανένα από τα A, B, C και D. Τότε θεωρούμε τις ευθείες

$$(*) \qquad P \vee A, \qquad P \vee B, \qquad P \vee C, \qquad P \vee D$$

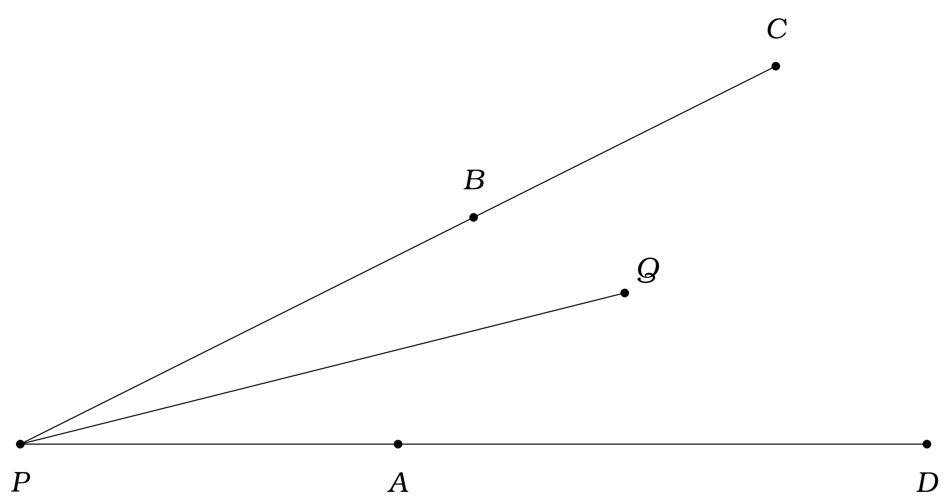
και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(2α) Τρεις (τουλάχιστον) από τις τέσσερεις ευθείες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, όπως στο Σχ. 3.3 (όπου $P \vee A = P \vee D$). Τότε ισχύει το ζητούμενο.



Σχήμα 3.3

(2β) Οι ευθείες (∗) συμπίπτουν ανά δύο, π.χ. $P \vee A = P \vee D$ και $P \vee B = P \vee C$, όπως στο Σχ. 3.4.



Σχήμα 3.4

Οι ευθείες $P \vee A = P \vee D$ και $P \vee B = P \vee D$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αλλιώς τα A, B, C και D είναι συγγραμμικά, άτοπο. Άρα (Μάθημα 2, Πρόταση 3) υπάρχει σημείο $Q \in \mathcal{P}$ που δεν κείται σε καμία από τις δύο αυτές ευθείες. Τότε η $P \vee Q$ είναι η τρίτη ευθεία που περνά από το P.

(2γ) Η σύμπτωση τριών ή όλων των ευθειών $(*)$ δεν είναι δυνατή, γιατί οδηγεί σε συγγραμμικότητα τριών ή όλων των A, B, C και D, άτοπο. □

Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ. Θέτουμε

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{L}$$
$$\mathcal{L}^* = \mathcal{P}$$
$$\mathcal{I}^* = \mathcal{I}^{-1} = \{(\ell, P) \in \mathcal{L} \times \mathcal{P} \mid (P, \ell) \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{P}^* \times \mathcal{L}^*$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. *Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ. Τότε η τριάδα*

$$(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*) = (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I}^{-1})$$

είναι ΠΕ.

Απόδειξη. (ΠΕ 1) Έστω δύο διαφορετικά σημεία $P^* \neq Q^*$ στο $\mathcal{P}^*$, δηλ. δύο διαφορετικές ευθείες $p \neq q$ στο $\mathcal{L}$. Από την Πρόταση 1 του Μαθήματος 3, υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $A \in \mathcal{P}$, δηλ. ακριβώς μία ευθεία $a^* \in \mathcal{L}^*$, με $(A, p) \in \mathcal{I}$ και $(A, q) \in \mathcal{I}$, δηλ. $(P^*, a^*) = (p, A) \in \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}^*$ και $(Q^*, a^*) = (q, A) \in \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}^*$.

(ΠΕ 2) Έστω δύο διαφορετικές ευθείες $k^* \neq \ell^*$ στο $\mathcal{L}^*$, δηλ. δύο διαφορετικά σημεία $K \neq L$ στο $\mathcal{P}$. Από το αξίωμα (ΠΕ 1) για το αρχικό ΠΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, υπάρχει (και μάλιστα ακριβώς μία) ευθεία $a \in \mathcal{L}$, δηλ. ακριβώς ένα σημείο $A^* \in \mathcal{P}^*$, με $(K, a) \in \mathcal{I}$ και $(L, a) \in \mathcal{I}$, δηλ. $(A^*, k^*) = (a, K) \in \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}^*$ και $(A^*, \ell^*) = (a, L) \in \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}^*$.

(ΠΕ 3) Το 3ο αξίωμα για την τριάδα $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ ισοδυναμεί με την Πρόταση 1, προηγουμένως. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ. Το ΠΕ $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ λέγεται ***δυϊκό*** του $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ, $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ το δυϊκό του και $(\mathcal{P}^{**}, \mathcal{L}^{**}, \mathcal{I}^{**})$ το δυϊκό του δυϊκού. Τότε

$$(\mathcal{P}^{**}, \mathcal{L}^{**}, \mathcal{I}^{**}) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Έστω S μια πρόταση που διατυπώνεται για σημεία, ευθείες και την σχέση $\mathcal{I}$. Ονομάζουμε ***δυϊκή της*** S και συμβολίζουμε με S^* την πρόταση που προκύπτει από την S αν αντικαταστήσουμε τα σημεία με ευθείες, τις ευθείες με σημεία και την σχέση $\mathcal{I}$ με την $\mathcal{I}^{-1}$.

Παρατηρούμε ότι όπως το δυϊκό του δυϊκού ενός ΠΕ είναι το αρχικό ΠΕ, έτσι και για μια πρόταση

$$S^{**} = S.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Δίνουμε μερικά παραδείγματα πρότασης S και της δυϊκής της. Σημειώνουμε αν η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής.

S_1: Σε ένα ΠΕ όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία $\ell_o \in \mathcal{L}$. (Ψ)

S_1^*: Σε ένα ΠΕ όλες οι ευθείες περνούν από ένα σημείο $P_o \in \mathcal{P}$. (Ψ)

S_2: Σε ένα ΠΕ από δύο διαφορετικά σημεία περνά ακριβώς μία ευθεία. (Α)

S_2^*: Σε ένα ΠΕ δύο διαφορετικές ευθείες τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο. (Α)

S_3: Υπάρχει ΠΕ με ακριβώς 13 σημεία. (;)

S_3^*: Υπάρχει ΠΕ με ακριβώς 13 ευθείες. (;)

S_4: Κάθε ΠΕ έχει ακριβώς 7 σημεία. (Ψ)

S_4^*: Κάθε ΠΕ έχει ακριβώς 7 ευθείες. (Ψ)

S_5: Το ΠΕ του Fano έχει ακριβώς 7 σημεία. (Α)

S_5^*: Το ΠΕ του Fano έχει ακριβώς 7 ευθείες. (Α)

S_6: Σε ένα ΠΕ για κάθε τριάδα διαφορετικών σημείων υπάρχει ευθεία στην οποία κείνται και τα τρία. (Ψ)

S_6^*: Σε ένα ΠΕ για κάθε τριάδα διαφορετικών ευθειών υπάρχει σημείο από όπου διέρχονται και οι τρεις. (Ψ)

Αν οι S_3 και S_3^* αληθεύουν θα συζητηθεί αργότερα.

Το επόμενο λήμμα είναι προφανές:

ΛΗΜΜΑ. *Αν η πρόταση S αληθεύει στο ΠΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, τότε η S^* αληθεύει στο $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$.* □

ΘΕΩΡΗΜΑ (Αρχή του Δυϊσμού). *Αν μια πρόταση S ισχύει σε κάθε ΠΕ, τότε και η δυϊκή S^* ισχύει σε κάθε ΠΕ.*

Απόδειξη. Έστω S μια πρόταση που ισχύει σε κάθε ΠΕ. Έστω και $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ. Θδο η S^* ισχύει στο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Θεωρούμε το δυϊκό $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$. Αφού η S ισχύει σε όλα τα ΠΕ, ισχύει στο $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$. Άρα η S^* ισχύει στο δυϊκό ΠΕ $(\mathcal{P}^{**}, \mathcal{L}^{**}, \mathcal{I}^{**}) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ (βλ. προηγούμενο λήμμα). □

ΑΣΚΗΣΗ. Να εξετάσετε αν:

(1) Το δυϊκό ενός ΣΕ είναι ΣΕ.

(2) Αν ισχύει η Αρχή του Δυϊσμού στα ΣΕ.