ΜΑΘΗΜΑ 4: ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ. Για κάθε $m \in \mathcal{L}$ ονομάζουμε ***σημειοσειρά*** ή ***δέσμη σημείων*** της m το σύνολο

$$J(m) = \{P \in \mathcal{P} \mid P\ \mathcal{I}\ m\}.$$

Η ευθεία m λέγεται ***άξονας*** της $J(m)$.

Για κάθε $O \in \mathcal{P}$ ονομάζουμε ***δέσμη ευθειών*** του O το σύνολο

$$J(O) = \{k \in \mathcal{L} \mid O\ \mathcal{I}\ k\}.$$

Το σημείο O λέγεται ***κέντρο*** της $J(O)$.

Παρατηρούμε ότι για τυχαία $P \in \mathcal{P}$ και $k \in \mathcal{L}$, ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$P \in J(k) \iff (P, k) \in \mathcal{I} \iff k \in J(P).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ και $k, \ell \in \mathcal{L}$. Τότε*

$$k = \ell \iff J(k) = J(\ell).$$

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Προφανές.

$(\Leftarrow)$ Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν (τουλάχιστον) 3 διαφορετικά σημεία A, B, C που κείνται πάνω στην k. Τότε

$$A, B \in J(k) = J(\ell) \Rightarrow k = A \vee B = \ell,$$

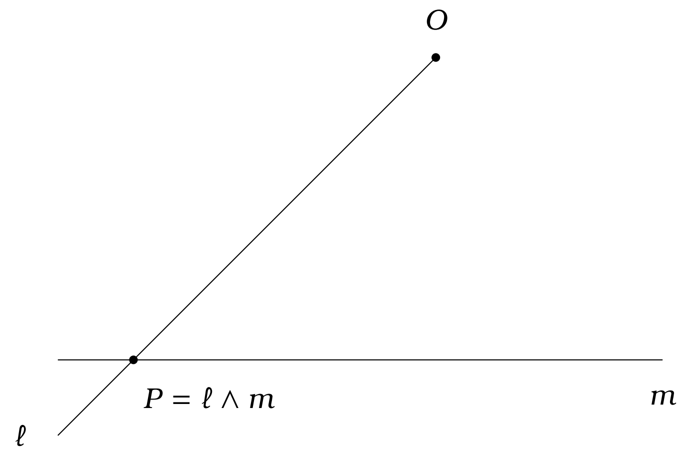
που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παρακάτω θα συγκρίνουμε την ισχύ των συνόλων $J(O)$ και $J(m)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ, $O \in \mathcal{P}$ και $m \in \mathcal{L}$ με $(O, m) \notin \mathcal{I}$. Ονομάζουμε ***στοιχειώδη απεικόνιση*** την απεικόνιση

$$\delta_{O,m} : J(O) \longrightarrow J(m) : \ell \longmapsto \ell \wedge m$$

(βλ. Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Σε ένα ΠΕ* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$*, για κάθε ζεύγος* $(O, m) \notin \mathcal{I}$ *η στοιχειώδης απεικόνιση* $\delta_{O,m}$ *είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.*

Απόδειξη. Επειδή $(O, m) \notin \mathcal{I}$, έχουμε $m \notin J(O)$. Άρα, για κάθε $\ell \in J(O)$, είναι $m \neq \ell$, και ορίζεται ακριβώς ένα σημείο $P = \ell \wedge m \in J(m)$. Δηλ. η $\delta_{O,m}$ είναι καλά ορισμένη.

(2) Έστω $k, \ell \in J(O)$ με $\delta_{O,m}(k) = \delta_{O,m}(\ell)$, δηλ. $k \wedge m = \ell \wedge m = P \neq O$. Τότε

$$k = O \vee P = \ell$$

και η $\delta_{O,m}$ είναι 1-1.

(3) Έστω $P \in J(m)$. Τότε $P \neq O$, δηλ. υπάρχει η ευθεία $O \vee P \in J(O)$ για την οποία ισχύει

$$\delta_{O,m}(O \vee P) = (O \vee P) \wedge m = P,$$

και η $\delta_{O,m}$ είναι επί. □

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι υπάρχει η αντίστροφη

$$\delta_{m,O} := \delta_{O,m}^{-1} : J(m) \longrightarrow J(O) : P \longmapsto P \vee O.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. *Σε ένα ΠΕ* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$*, για κάθε ζεύγος* $(O, m) \notin \mathcal{I}$*, τα σύνολα* $J(m)$ *και* $J(O)$ *είναι ισοπληθικά, δηλ.*

$$|J(O)| = |J(m)|.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. *Σε ένα ΠΕ* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$*, για κάθε* $k, \ell \in \mathcal{L}$*, ισχύει*

$$|J(k)| = |J(\ell)|.$$

Απόδειξη. Αν $k = \ell$, η ισότητα είναι προφανής. Έστω $k \neq \ell$. Τότε υπάρχει $P \in \mathcal{P}$ με $(P, k) \notin \mathcal{I}$ και $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$. Οπότε

$$|J(k)| = |J(P)| = |J(\ell)|. \qquad \square$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3. *Σε ένα ΠΕ* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$*, για κάθε* $P, Q \in \mathcal{P}$*, ισχύει*

$$|J(P)| = |J(Q)|.$$

Απόδειξη. Αν $P = Q$, η ισότητα είναι προφανής. Έστω $P \neq Q$. Τότε υπάρχουν η ευθεία $P \vee Q$ και σημείο S της $P \vee Q$ με $S \neq P$ και $S \neq Q$. Επίσης υπάρχει ευθεία $\ell \neq P \vee Q$ με $(S, \ell) \in \mathcal{I}$. Τότε $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$ και $(Q, \ell) \notin \mathcal{I}$. Οπότε

$$|J(P)| = |J(\ell)| = |J(Q)|. \qquad \square$$

Αντί της ανωτέρω απόδειξης, μπορούμε απλώς να παρατηρήσουμε ότι το Πόρισμα 3 είναι δυϊκό του Πορίσματος 2.

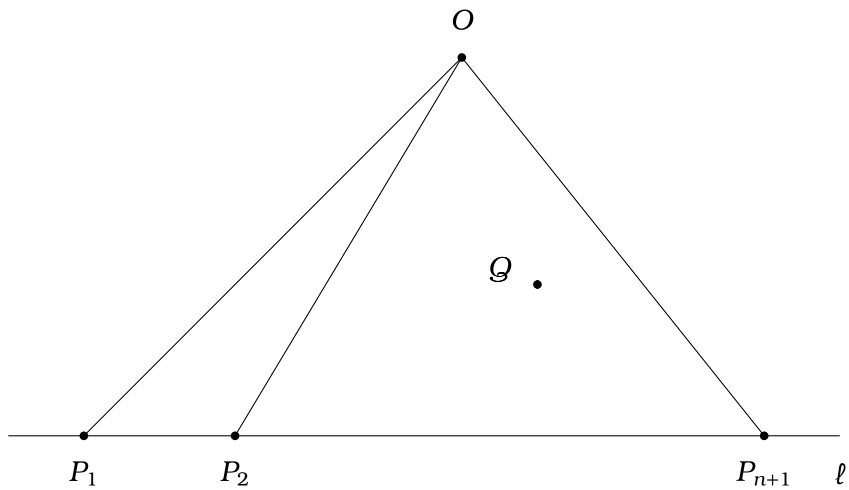
ΠΡΟΤΑΣΗ 3. *Έστω* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *ένα ΠΕ και* $\ell \in \mathcal{L}$ *με* $|J(\ell)| = n + 1 \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$*. Τότε το σύνολο* $\mathcal{P}$ *έχει ακριβώς* $n^2 + n + 1$ *σημεία.*

Απόδειξη. Έστω

$$J(\ell) = \{P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\}.$$

Θεωρούμε ένα σημείο $O \notin J(\ell)$. Γνωρίζουμε ότι το $J(O)$ περιέχει ακριβώς $n + 1$ ευθείες, και αυτές είναι οι

$$O \vee P_1,\ O \vee P_2,\ \ldots\ , O \vee P_{n+1}.$$



Σχήμα 4.2

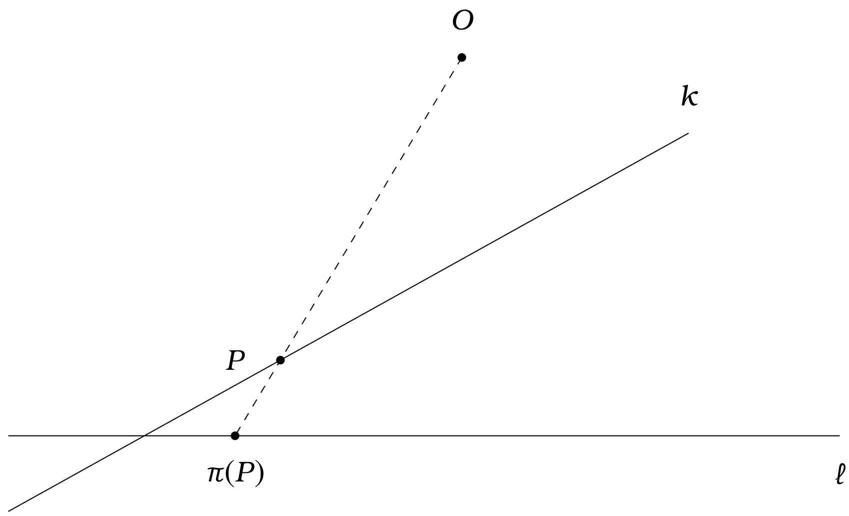
Κάθε μια από αυτές έχει $n+1$ σημεία, δηλ. n σημεία εκτός από το O. Όλες μαζί περιέχουν $(n+1)\cdot n = n^2+n$ σημεία χωρίς το O, άρα με το O περιέχουν n^2+n+1 σημεία.

Ισχυριζόμαστε οτι το $\mathcal{P}$ δεν έχει άλλα σημεία. Πράγματι, αν $O \neq Q \in \mathcal{P}$, τότε υπάρχει η ευθεία $O \vee Q$ και έχει με την ℓ ακριβώς ένα κοινό σημείο, έστω το P_i. Άρα το Q είναι σημείο της $O \vee P_i$ και έχει καταμετρηθεί στα n^2+n+1 σημεία. □

Για το ερώτημα αν *υπάρχει* προβολικό επίπεδο του οποίου οι ευθείες έχουν δεδομένο αριθμό σημείων, βλ. *[Ε. Βασιλείου: Στοιχεία προβολικής Γεωμετρίας]*, σελ. 39, και πρβλ. με τις S_3, S_3^* του Μαθήματος 3, σελ. 5.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ, $k, \ell \in \mathcal{L}$ και $O \in \mathcal{P}$, με $(O,k) \notin \mathcal{I}$ και $(O,\ell) \notin \mathcal{I}$. Ονομάζουμε ***προοπτικότητα*** από την k στην ℓ με κέντρο O την απεικόνιση

$$\pi \equiv \pi(k,\ell,O) : J(k) \longrightarrow J(\ell) : P \longmapsto \ell \wedge (O \vee P).$$



Σχήμα 4.3

Παρατηρείστε ότι σε μια προοπτικότητα όπως παραπάνω, το κέντρο O, το σημείο $P \in J(k)$ και η εικόνα $\pi(P) \in J(\ell)$ είναι συγγραμμικά.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. *Με τις υποθέσεις του προηγούμενου ορισμού, η π είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.*

Απόδειξη. Άμεσο, από την σχέση

$$\pi = \delta_{O,\ell} \circ \delta_{k,O} = \delta_{O,\ell} \circ \delta_{O,k}^{-1}. \qquad \square$$

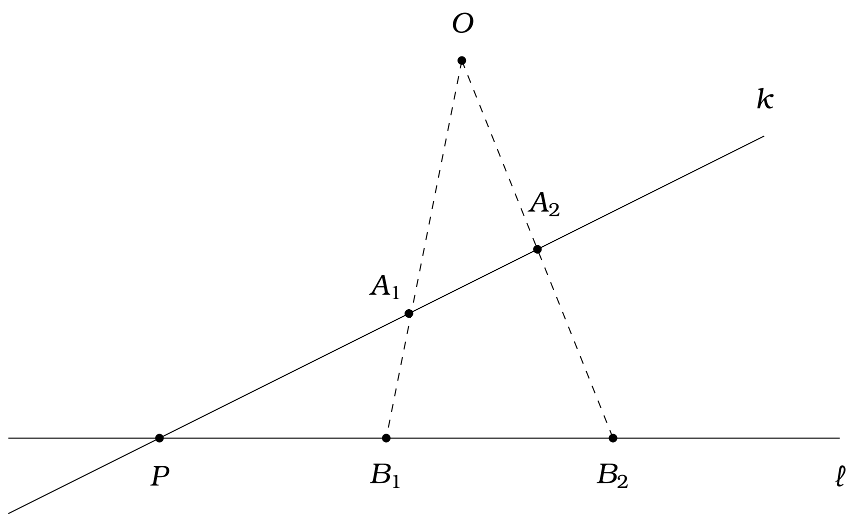
Για τις προοπτικότητες αξίζει να σημειωθούν τα επόμενα δύο αποτελέσματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. *Αν k, ℓ και O είναι όπως στον Ορισμό 3, τότε:*
(i) $\pi(k \wedge \ell) = k \wedge \ell$.
(ii) *Για κάθε $P \in J(k)$ με $P \neq k \wedge \ell$, ισχύει $\pi(P) \neq P$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6. *Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ, $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$ και $P = k \wedge \ell$. Τότε, για κάθε $A_1, A_2 \in J(k) \setminus \{P\}$ με $A_1 \neq A_2$ και για κάθε $B_1, B_2 \in J(\ell) \setminus \{P\}$ με $B_1 \neq B_2$, υπάρχει ακριβώς ένα $O \in \mathcal{P}$ που είναι κέντρο προοπτικότητας $\pi \equiv \pi(k, \ell, O)$ με την ιδιότητα*

$$\pi(A_1) = B_1 \qquad \text{και} \qquad \pi(A_2) = B_2.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις ευθείες $A_1 \vee B_1$ και $A_2 \vee B_2$. Αν αυτές ταυτίζονται, τότε A_1, A_2, B_1, B_2 είναι συγγραμμικά και $k = \ell$, άτοπο. Άρα $A_1 \vee B_1$ και $A_2 \vee B_2$ τέμνονται σε ένα σημείο O. Αυτό είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 4.4

Πράγματι, αν θεωρήσουμε την προοτικότητα $\pi \equiv \pi(k, \ell, O)$, τότε

$$\pi(A_1) = \ell \wedge (A_1 \vee O) = B_1$$
$$\pi(A_2) = \ell \wedge (A_2 \vee O) = B_2$$

Το μονοσήμαντο του O προκύπτει από την παρατήρηση ότι O, A_1, B_1 είναι συγγραμμικά και το ίδιο ισχύει για τα O, A_2, B_2. $\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να διατυπώσετε την δυϊκή της Πρότασης 3 και να ελέγξετε αν ισχύει.

2. Να διατυπώσετε τον δυϊκό του Ορισμού 3.

3. Χρησιμοποιώντας την έννοια που προκύπτει από την Ασκηση 2, να διατυπώσετε την δυϊκή της Πρότασης 6 και να ελέγξετε αν ισχύει.

4. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΣΕ, $P \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$ με $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$. Ισχύει η ισότητα $|J(P)| = |J(\ell)|$;

5. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΣΕ και έστω $\ell \in \mathcal{L}$ με $|J(\ell)| = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Πόσα σημεία έχει το $\mathcal{P}$;