ΜΑΘΗΜΑ 6: ΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΠΡΟΒΟΛΙΚΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Έστω $\Pi_i \equiv (\mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2$, ΠΕ. Ένας ***μορφισμός προβολικών επιπέδων*** (συντ. ΜΠΕ) από το Π_1 στο Π_2 είναι ένα ζεύγος (ϕ, ψ) απεικονίσεων $\phi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ και $\psi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ που ικανοποιούν την συνθήκη

$$(P, \ell) \in \mathcal{I}_1 \ \Rightarrow\ (\phi(P), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}_2.$$

Ιδιαιτέρως, ένας ΜΠΕ (ϕ, ψ) λέγεται ***μονομορφισμός*** ή ***1-1***, αν οι ϕ και ψ είναι 1-1, και λέγεται ***επιμορφισμός*** ή απλά ***επί***, αν οι ϕ και ψ είναι επί. Τέλος ένας ΜΠΕ (ϕ, ψ) λέγεται ***ισομορφισμός***, αν οι ϕ και ψ είναι αμφιμονοσήμαντες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *(1) Για κάθε ΠΕ $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ το ζεύγος $(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}}) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}) \to (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι ισομορφισμός ΠΕ.*

(2) Έστω $\Pi_i \equiv (\mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2, 3$, ΠΕ. Έστω ακόμη $(\phi_1, \psi_1) : \Pi_1 \to \Pi_2$ και $(\phi_2, \psi_2) : \Pi_2 \to \Pi_3$ ΜΠΕ. Τότε το ζεύγος των συνθέσεων

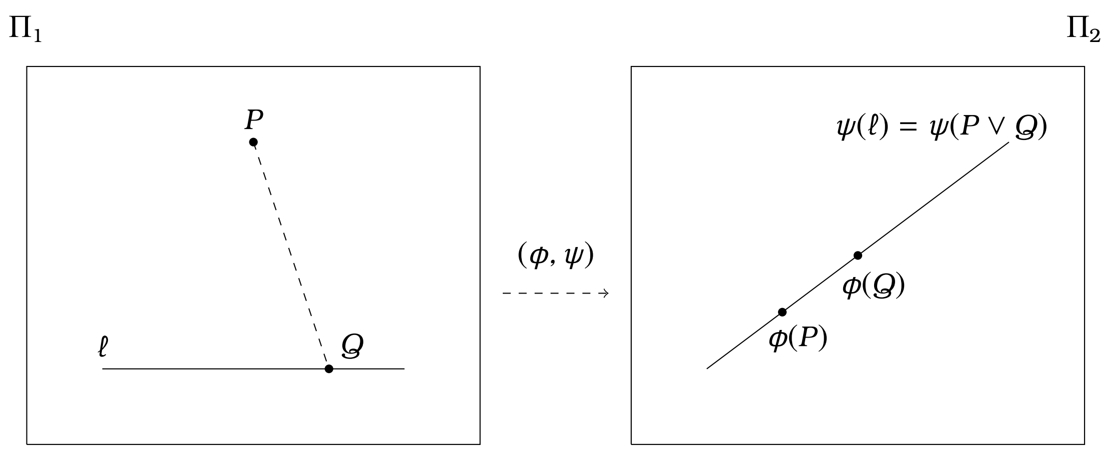
$$(\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1) : \Pi_1 \longrightarrow \Pi_3$$

είναι ΜΠΕ. □

Το ζεύγος $(\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1)$ λέγεται ***σύνθεση*** των μορφισμών (ϕ_1, ψ_1) και (ϕ_2, ψ_2).

ΛΗΜΜΑ. *Έστω $\Pi_i \equiv (\mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2$, ΠΕ και $(\phi, \psi) : \Pi_1 \to \Pi_2$ ένας μονομορφισμός ΠΕ. Έστω ακόμη $(P, \ell) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{L}_1$ με $(P, \ell) \notin \mathcal{I}_1$. Τότε $(\phi(P), \psi(\ell)) \notin \mathcal{I}_2$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $P \in \mathcal{P}_1$ και $\ell \in \mathcal{L}_1$ με $(P, \ell) \notin \mathcal{I}_1$. Έστω (προς άτοπο) ότι $(\phi(P), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}_2$. Θεωρούμε και ένα $Q \in \mathcal{P}_1$ με $(Q, \ell) \in \mathcal{I}_1$ (βλ. Σχήμα 6.1).



Σχήμα 6.1

Τότε, από τον ορισμό του ΜΠΕ θα είναι $(\phi(Q), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}_2$. Αφού $(P, \ell) \notin \mathcal{I}_1$ ενώ $(Q, \ell) \in \mathcal{I}_1$, είναι $P \neq Q$, άρα υπάρχει η ευθεία $P \vee Q$ και $\ell \neq P \vee Q$. Τότε, τα σημεία $\phi(P)$ και $\phi(Q)$ ανήκουν σην ευθεία $\psi(P \vee Q)$ και στην ευθεία $\psi(\ell)$. Λόγω του 1-1 της ϕ, $\phi(P) \neq \phi(Q)$, άρα

$$\psi(\ell) = \phi(P) \vee \phi(Q) = \psi(P \vee Q),$$

που είναι άτοπο από το 1-1 της ψ. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Έστω $\Pi_i \equiv (\mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2$, ΠΕ και $(\phi, \psi) : \Pi_1 \to \Pi_2$ ένας ισομορφισμός ΠΕ. Τότε το ζεύγος των αντίστροφων*

$$(\phi^{-1}, \psi^{-1}) : \Pi_2 \longrightarrow \Pi_1$$

είναι ΜΠΕ. Ιδιαιτέρως, είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Κάθε μια από τις ϕ και ψ είναι 1-1 και επί, άρα υπάρχει το ζεύγος των αντίστροφων (ϕ^{-1}, ψ^{-1}). Για νδο αυτό το ζεύγος είναι ΜΠΕ, αρκεί νδο για κάθε $Q \in \mathcal{P}_2$ και $k \in \mathcal{L}_2$ με $(Q, k) \in \mathcal{I}_2$, ισχύει $(\phi^{-1}(Q), \psi^{-1}(k)) \in \mathcal{I}_1$. Παρατηρούμε ότι θέτοντας $P = \phi^{-1}(Q)$ και $\ell = \psi^{-1}(k)$, η ζητούμενη συνθήκη

$$(Q, k) \in \mathcal{I}_2 \;\Rightarrow\; (\phi^{-1}(Q), \psi^{-1}(k)) \in \mathcal{I}_1$$

γράφεται

$$(\phi(P), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}_2 \;\Rightarrow\; (P, \ell) \in \mathcal{I}_1$$

που ισχύει, λόγω του προηγούμενου λήμματος. Είναι προφανές ότι (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) είναι ισομορφισμός. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Έστω $\Pi_i \equiv (\mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2$, ΠΕ και $(\phi, \psi) : \Pi_1 \to \Pi_2$ ένας ΜΠΕ.*

(i) *Αν η ϕ είναι 1-1, τότε για κάθε $P, Q \in \mathcal{P}_1$ με $P \neq Q$, ισχύει*

$$\psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \psi(Q).$$

(ii) *Αν η ψ είναι 1-1, τότε για κάθε $k, \ell \in \mathcal{L}_1$ με $k \neq \ell$, ισχύει*

$$\phi(k \wedge \ell) = \psi(k) \wedge \psi(\ell).$$

Απόδειξη. (i) Από τον ορισμό του ΜΠΕ, $\phi(P), \phi(Q) \in \psi(P \vee Q)$. Επειδή η ϕ είναι 1-1, $\phi(P) \neq \phi(Q)$. Άρα $\psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \psi(Q)$.

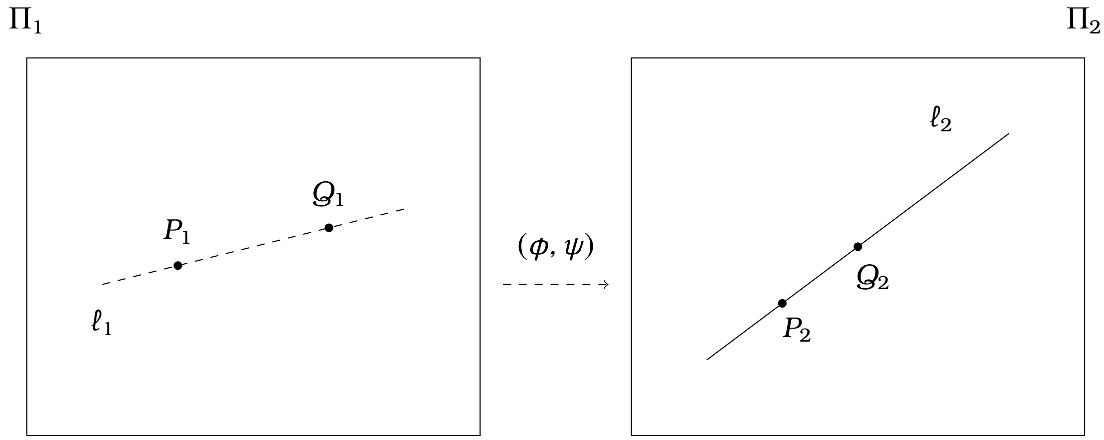
(ii) Δυϊκά. □

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι για *μονομορφισμούς* ΠΕ, η ϕ είναι γνωστή αν και μόνον αν είναι γνωστή η ψ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Έστω $\Pi_i \equiv (\mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2$, ΠΕ και $(\phi, \psi) : \Pi_1 \to \Pi_2$ ένας ΜΠΕ. Τότε η ϕ είναι 1-1 και επί αν και μόνον αν η ψ είναι 1-1 και επί.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι η ϕ είναι 1-1 και επί. Τότε:

(i) *Η ψ είναι επί*: Έστω $\ell_2 \in \mathcal{L}_2$ Υπάρχουν $P_2, Q_2 \in J(\ell_2)$ με $P_2 \neq Q_2$.



Σχήμα 6.2

Επειδή η ϕ είναι επί, υπάρχουν $P_1 \neq Q_1 \in \mathcal{P}_1$ με $\phi(P_1) = P_2$ και $\phi(Q_1) = Q_2$. Θεωρούμε την ευθεία $\ell_1 = P_1 \vee Q_1$. Τότε τα $\phi(P_1) = P_2$ και $\phi(Q_1) = Q_2$ ανήκουν στην $\psi(\ell_1)$, και επειδή είναι διαφορετικά μεταξύ τους,

$$\psi(\ell_1) = \phi(P_1) \vee \phi(Q_1) = P_2 \vee Q_2 = \ell_2,$$

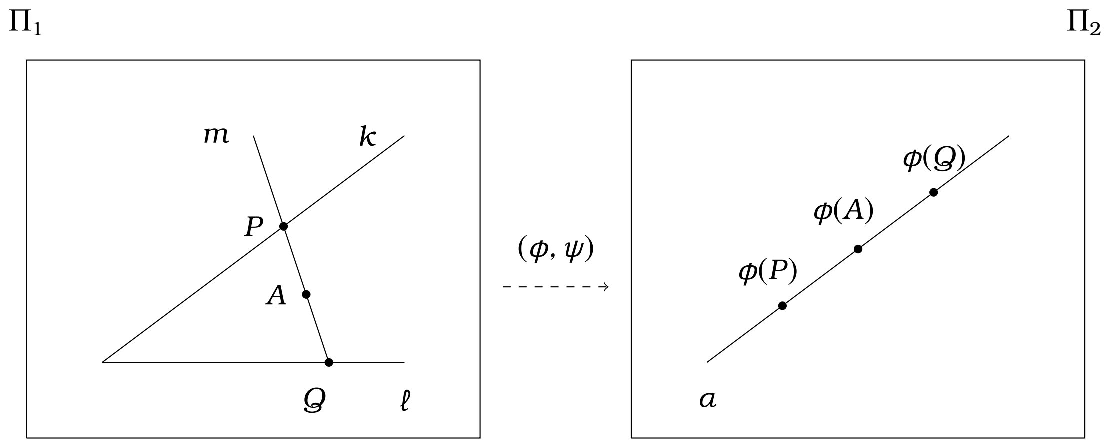
που αποδεικνύει ότι η ψ είναι επί.

(ii) *Η ψ είναι 1-1*: Με άτοπο: Έστω ότι υπάρχουν $k \neq \ell \in \mathcal{L}_1$ με $\psi(k) = \psi(\ell) = a \in \mathcal{L}_2$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \forall\, P \in J(k) &\;\Rightarrow\; \phi(P) \in J(\psi(k)) = J(a) \\ \forall\, Q \in J(\ell) &\;\Rightarrow\; \phi(Q) \in J(\psi(\ell)) = J(a) \end{aligned}$$

Θεωρούμε ένα τυχαίο $A \in \mathcal{L}_1$ με $A \notin J(k)$ και $A \notin J(\ell)$, και μια $m \in J(A)$, που *δεν* περνά από το σημείο $k \wedge \ell$. Προφανώς $m \neq k$ και $m \neq \ell$. Θέτουμε $P = k \wedge m$ και $Q = \ell \wedge m$. Τότε:

$$\begin{aligned} A \in J(P \vee Q) &\;\Rightarrow\; \phi(A) \in J(\psi(P \vee Q)) \\ P \neq Q \text{ και } \phi \text{ 1-1} &\;\Rightarrow\; \psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \phi(Q) \\ P \in J(k) \text{ και } Q \in J(\ell) &\;\Rightarrow\; \phi(P), \phi(Q) \in J(a) \end{aligned}$$



Σχήμα 6.3

Συνθέτοντας τα προηγούμενα συμπεράσματα παίρνουμε

$$\phi(A) \in J(\psi(P \vee Q)) = J(\phi(P) \vee \phi(Q)) = J(a).$$

Άρα όλα τα σημεία του $\mathcal{P}_1$ απεικονίζονται μέσω της ϕ στην $J(a)$, δηλ. $\phi(\mathcal{P}_1) \subseteq J(a)$. Επειδή η ϕ είναι επί, προκύπτει $\mathcal{P}_2 = \phi(\mathcal{P}_1) \subseteq J(a)$, δηλ. όλα τα σημεία του $\mathcal{P}_2$ είναι συγγραμμικά, άτοπο.

($\Leftarrow$) Δυϊκά. □

Από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$\phi \text{ επί } \Leftrightarrow \psi \text{ επί}$$

ενώ δεν ισχύει το ίδιο για το 1-1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα ΠΕ. Θέτουμε $\widetilde{\mathcal{L}} = \{J(\ell) \mid \ell \in \mathcal{L}\}$. Τότε:*

(i) Η τριάδα $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \in)$ είναι ΠΕ.

(ii) Τα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ και $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \in)$ είναι ισόμορφα.

Απόδειξη. (i) Άμεσο, λόγω της ισοδυναμίας $(P, \ell) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow P \in J(\ell)$.

(ii) Θέτουμε

$$\phi = id_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P},$$
$$\psi = J : \mathcal{L} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}} : \ell \longmapsto J(\ell).$$

Τότε $(\phi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}) \to (\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \in)$ είναι ΜΠΕ, διότι

$$P \mathcal{I} \ell \Rightarrow \phi(P) = P \in J(\ell)$$

και είναι ισομορφισμός, αφού η $\phi = id_{\mathcal{P}}$ είναι 1-1 και επί. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $\Pi_i \equiv (\mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2$, ΠΕ και $\phi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ απεικόνιση 1-1 και επί, που στέλνει συγγραμμικά σημεία του $\mathcal{P}_1$ σε συγγραμμικά σημεία του $\mathcal{P}_2$. Νδο υπάρχει μια μοναδική $\psi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, τέτοια ώστε $(\phi, \psi) : \Pi_1 \to \Pi_2$ να είναι ισομορφισμός ΠΕ.

2. Βρείτε ΜΠΕ (ϕ, ψ) με ϕ 1-1 και ψ όχι 1-1.

3. Έστω $\Pi_i \equiv (\mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2$, ΠΕ και $(\phi, \psi) : \Pi_1 \to \Pi_2$ ΜΠΕ. Θεωρούμε την τριάδα $(\phi(\mathcal{P}_1), \psi(\mathcal{L}_1), \mathcal{I}_2|_{\phi(\mathcal{P}_1)\times\psi(\mathcal{L}_1)})$. Είναι ΠΕ ;