ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΡΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ (2013–14)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

(Ημερομηνία Παράδοσης: 20 Ιανουαρίου 2014)

1. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K. Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|}dx = |K|\cdot\int_0^\infty t^n e^{-t}dt.$$

Γενικότερα, δείξτε ότι για κάθε $p>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = |K|\cdot\int_0^\infty pt^{n+p-1}e^{-t^p}dt.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να γράψετε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\|x\|}^\infty pt^{p-1}e^{-t^p}dt\right)dx.$$

2. Για κάθε $p\geq 1$, η συνάρτηση

$$\|x\|_p = (|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$B_p^n = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_p\leq 1\}.$$

Δείξτε ότι ο όγκος της B_p^n είναι ίσος με

$$|B_p^n| = \frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}.$$

3. (α) Έστω A συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A° είναι το πολικό σώμα του A, δείξτε ότι

$$|A^\circ| = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-h_A(x)}dx.$$

(β) Έστω A, B συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $0<t<1$, δείξτε ότι

$$|((1-t)A+tB)^\circ| \leq |A^\circ|^{1-t}|B^\circ|^t.$$

4. Έστω K και T δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.
(α) Δείξτε ότι $\frac{1}{2}[K\cap(x+T)]+\frac{1}{2}[K\cap(-x+T)]\subseteq K\cap T$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$.
(β) Δείξτε ότι $|K\cap(x+T)|\leq|K\cap T|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$.
(γ) Αν $N:=N(K,T)$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο υπάρχουν $x_1,\ldots,x_N\in\mathbb{R}^n$ ώστε $K\subseteq(x_1+T)\cup\cdots\cup(x_N+T)$, δείξτε ότι

$$N(K,T)\geq\frac{|K|}{|K\cap T|}.$$

5. Έστω A και B δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$(A\cap B)^\circ = \mathrm{conv}(A^\circ\cup B^\circ).$$

6. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(T(K))^\circ = (T^t)^{-1}(K^\circ)$ και συμπεράνατε ότι

$$|K|\,|K^\circ| = |T(K)|\,|(T(K))^\circ|.$$

Έστω $F \in G_{n,k}$, $1 \leq k < n$. Δείξτε ότι

$$(K \cap F)^\circ = P_F(K^\circ).$$

7. Έστω K και T δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την ιδέα της απόδειξης της ανισότητας Rogers-Shephard δείξτε ότι

$$|K+T|\,|K \cap (-T)| \leq \binom{2n}{n}|K|\,|T|$$

και

$$|K|\,|T| \leq |K+T| \sup_x |K \cap (x-T)|.$$

B. Συμπληρώματα από την θεωρία

8. Η συνάρτηση $\Gamma : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ ορίζεται μέσω της

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Δείξτε ότι:

(α) $\Gamma(1) = 1$.

(β) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x > 0$.

(γ) $\Gamma(n+1) = n!$ *για κάθε* $n = 0, 1, 2, \dots$

(δ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση Γ είναι *λογαριθμικά κυρτή*: η $\log \Gamma$ είναι κυρτή συνάρτηση.

9 (κυρτή θήκη). (α) Έστω $m \geq 1$ και $\{x_1, \dots, x_m\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^n$. Αν $t_1, \dots, t_m \geq 0$ και $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε το

$$x = t_1x_1 + \cdots + t_mx_m$$

λέγεται *κυρτός συνδυασμός* των $x_1, \dots, x_m$. Δείξτε ότι ένα μη κενό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό αν και μόνο αν κάθε κυρτός συνδυασμός σημείων του A ανήκει στο A.

(β) Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η *κυρτή θήκη* του S είναι το σύνολο $\mathrm{conv}(S)$ που αποτελείται από όλους τους κυρτούς συνδυασμούς σημείων του S. Δείξτε ότι η κυρτή θήκη του S είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το S. Δηλαδή,

1. Το σύνολο $\mathrm{conv}(S)$ είναι κυρτό.
2. Αν το A είναι κυρτό σύνολο και $A \supseteq S$ τότε $A \supseteq \mathrm{conv}(S)$.

(γ) Έστω A ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(A)$ του A είναι ανοικτό σύνολο.

(δ) Έστω S μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι τα S και $\mathrm{conv}(S)$ έχουν την ίδια διάμετρο.

(ε) Έστω S, T μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{conv}(S+T) = \mathrm{conv}(S) + \mathrm{conv}(T).$$

10. (α) Έστω $T = \mathrm{conv}(\{\pm v_1, \ldots, \pm v_m\})$. Δείξτε ότι

$$T^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_j\rangle| \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m\}.$$

(β) Έστω $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ και

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_j\rangle| \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m\}.$$

Δείξτε ότι $P^\circ = \mathrm{conv}(\{\pm v_1, \ldots, \pm v_m\})$.

11 (Μετρική Hausdorff). (α) Έστω K και T δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$d(K, T) = \|h_K - h_T\|_\infty = \max\{|h_K(\theta) - h_T(\theta)| : \theta \in S^{n-1}\}.$$

(β) Έστω $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ και K κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $d(K_m, K) \to 0$ αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα τα εξής:

1. Κάθε $x \in K$ είναι το όριο μιας ακολουθίας $\{x_m\}$ με $x_m \in K_m$.
2. Αν $\{K_{m_j}\}$ είναι μια υπακολουθία της $\{K_m\}$, αν $x_{m_j} \in K_{m_j}$ και $x_{m_j} \to x$, τότε $x \in K$.

(γ) Έστω K, L δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$d(\mathrm{conv}(K), \mathrm{conv}(L)) \leq d(K, L).$$

(δ) Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολύτοπο P στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $d(K, P) < \varepsilon$.

(ε) Έστω K και T δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με $T \subset \mathrm{int}(K)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν M είναι ένα κυρτό σώμα με $d(K, M) < \varepsilon$ τότε $T \subseteq M$.

(στ) Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Δείξτε ότι: για κάθε $r > 1$ υπάρχει πολύτοπο P στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $P \subseteq K \subseteq rP$.