ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΡΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ (2013–14)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2
(Ημερομηνία Παράδοσης: 10 Φεβρουαρίου 2014)

1. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $F \in G_{n,k}$ και έστω $F^{\perp}$ ο ορθογώνιος υπόχωρος του F. Δείξτε ότι

$$\binom{n}{k}^{-1} |K \cap F|_k \, |P_{F^{\perp}}(K)|_{n-k} \leqslant |K| \leqslant |K \cap F|_k \, |P_{F^{\perp}}(K)|_{n-k}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini γράψτε πρώτα

$$|K| = \int_{P_{F^{\perp}}(K)} |K \cap (x+F)|_k \, dx.$$

2. Δίνονται $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) ώστε

$$I = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes x_j.$$

(α) Δείξτε ότι $\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 = n$.
(β) Δείξτε ότι, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_m$,

$$\left| \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2 \right)^{1/2}.$$

3. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει την B_2^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $c_1, \ldots, c_m > 0$ και σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n ώστε

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

4. Έστω $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το συμμετρικό κυρτό πολύεδρο

$$K = \{ y \in \mathbb{R}^n : |\langle y, v_j \rangle| \leq 1 \text{ για κάθε } j = 1, \ldots, m \}$$

ικανοποιεί την $B_2^n \subseteq K \subseteq \alpha B_2^n$ για κάποιον $\alpha > 1$. Δείξτε ότι $m \geq \exp(n/(2\alpha^2))$.

5. Υποθέτουμε ότι $I = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j$ για κάποιους $c_1, \ldots, c_m > 0$ και κάποια $u_1, \ldots, u_m \in S^{n-1}$. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$. Θεωρούμε τη νόρμα

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 = \langle Ax, x \rangle$$

όπου A είναι ο συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας $A := \sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j u_j \otimes u_j$. Δείξτε ότι η δυϊκή νόρμα της $\| \cdot \|$ δίνεται από την

$$\|y\|_*^2 = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{\lambda_j} \theta_j^2 : y = \sum_{j=1}^{m} \theta_j c_j u_j \right\}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\|y\|_*^2 = \langle By, y\rangle,$$

όπου $B = A^{-1}$.

6. (α) Θεωρούμε τον κύβο $Q_n = [-1,1]^n$. Δείξτε ότι

$$h_{Q_n}(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

(β) Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την B_2^n. Δείξτε ότι

$$w(K) \leqslant w(Q_n).$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m \in \mathrm{bd}(K) \cap S^{n-1}$ και $c_1, \ldots, c_m > 0$ τέτοια ώστε

$$I = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

Παρατηρήστε ότι $K \subseteq S = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle y, u_j\rangle| \leqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant m\}$ και δείξτε ότι

$$h_K(x) \leqslant h_S(x) = \inf\left\{\sum_{j=1}^m |t_j| : x = \sum_{j=1}^m t_j u_j\right\}.$$

7. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την B_2^n. Δείξτε ότι

$$\gamma_n(tK) \leqslant \gamma_n(tQ_n)$$

για κάθε $t > 0$, όπου γ_n είναι το n-διάστατο μέτρο του Gauss.
Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση $I = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$ του John δείξτε ότι

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2} = \prod_{j=1}^m g(\langle x, x_j\rangle)^{c_j},$$

όπου $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε την ανισότητα Brascamp-Lieb.

8. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την B_2^n. Δείξτε ότι, για κάθε $F \in G_{n,k}$,

$$|K \cap F|_k^{1/k} \leqslant 2\sqrt{n/k}.$$

Υπόδειξη. Θεωρώντας την αναπαράσταση $I = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$ του John, παρατηρήστε ότι $K \subseteq C_1$ όπου

$$C_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, u_j\rangle| \leqslant 1, j = 1, \ldots, m\} \tag{1}$$

και ότι

$$C_1 \cap F = \{x \in F : |\langle x, v_j\rangle| \leqslant t_j, j = 1, \ldots, m\},$$

όπου $v_j = P_F(u_j)/|P_F(u_j)|$ και $t_j = \|P_F(u_j)\|_2^{-1}$.