ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΡΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ (2013–14)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3
(Ημερομηνία Παράδοσης: 10 Μαρτίου 2014)

1. (*το Λήμμα του Borell*) Έστω B κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε
$$\mu_B(A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$
(α) Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0. Δείξτε ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει ο εγκλεισμός
$$\mathbb{R}^n \setminus M \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tM) + \frac{t-1}{t+1}M.$$
(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu_B(M) = a > 0$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την ανισότητα Brunn-Minkowski δείξτε ότι, για κάθε $t > 1$,
$$1 - \mu_B(tM) \leqslant a \left(\frac{1-a}{a}\right)^{(t+1)/2}.$$

2. Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ.
(α) Δείξτε ότι $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha_\mu(t) = 0$.
(β) Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$ και κάποιο $t > 0$ ισχύει $\alpha_\mu(t) < \varepsilon$. Δείξτε ότι: αν $A \in \mathcal{B}(X)$ και $\mu(A) \geqslant \varepsilon$, τότε
$$1 - \mu(A_{t+r}) \leqslant \alpha_\mu(r)$$
για κάθε $r > 0$.

3. Έστω (X, d), (Y, σ) μετρικοί χώροι και έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ Lipsichtz συνεχής συνάρτηση με νόρμα $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in X$ ισχύει
$$\sigma(f(x), f(y)) \leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}} d(x, y).$$
Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον X και έστω ν το Borel μέτρο πιθανότητας $f(\mu)$ το οποίο ορίζεται μέσω της
$$\nu(A) = \mu(f^{-1}(A)), \qquad A \in \mathcal{B}(Y).$$
Δείξτε ότι
$$\alpha_\nu(t) \leqslant \alpha_\mu(t/\|f\|_{\mathrm{Lip}})$$
για κάθε $t > 0$.

4. Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και έστω α_μ η συνάρτηση συγκέντρωσης του μ. Δείξτε ότι:
(α) Αν $F : (X, d) \to \mathbb{R}$ είναι μια 1-Lipschitz συνεχής συνάρτηση, τότε
$$(\mu \otimes \mu)\left(\{(x, y) \in X \times X : |F(x) - F(y)| \geqslant t\}\right) \leqslant 2\alpha_\mu(t/2)$$
για κάθε $t > 0$.
(β) Αν $A, B \in \mathcal{B}(X)$ και $\mathrm{dist}(A, B) = \delta > 0$, τότε
$$\mu(A)\mu(B) \leqslant 4\alpha_\mu(\delta/2).$$

5. Έστω $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i \leqslant n$, πεπερασμένη ακολουθία χώρων με νόρμα. Για κάθε $i \leqslant n$ θεωρούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο Ω_i του X_i με διάμετρο μικρότερη ή ίση του 1. Έστω P_i μέτρο πιθανότητας στο Ω_i. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $X^{(n)} = \big(\sum_{i\leqslant n} \oplus X_i\big)_2$ και θέτουμε

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$$

και

$$P = P^n = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n.$$

(το μέτρο γινόμενο στο Ω). Για κάθε $A \subseteq \Omega$ ορίζουμε

$$\phi_A(t) = d(t, \mathrm{conv}(A)),$$

την απόσταση του t από την κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(A)$ του A στον $X^{(n)}$. Δείξτε ότι, για κάθε $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{E}\left(e^{\phi_A^2}/4\right) \leqslant \frac{1}{P(A)}.$$

6. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα e^{-V}, όπου $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ώστε

$$V(x) + V(y) - 2V\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant w(x-y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι: για κάθε $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ με $\int e^{-f} d\mu \in (0,\infty)$, ισχύει

$$\int e^{f \Box w} d\mu \cdot \int e^{-f} d\mu \leqslant 1.$$

7. Έστω W συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^{2n}$. Δείξτε ότι, για κάθε n-διάστατο υπόχωρο F του $\mathbb{R}^{2n}$ ισχύει

$$|W + D_{2n}|^{\frac{1}{2n}} \geq c|P_F(W)|^{\frac{1}{2n}},$$

όπου D_{2n} είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^{2n}$ και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. [*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα ότι $N(W, D_{2n}) \leqslant 2^{2n}|W + D_{2n}|$ και $N(P_F(W), P_F(D_{2n})) \leqslant N(W, D_{2n})$.]

8. Έστω A, B, C συμμετρικά κυρτά σώματα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$|A+B|^{1/n} \leqslant c_1 |A+C|^{1/n} |B+C|^{1/n},$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.

9. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $B_2^n \subseteq \rho K$ για κάποιον $\rho \geq 1$. Έστω W ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $\dim W = m$ και έστω ότι $P_{W^\perp}(K) \supseteq B_{W^\perp}$. Δείξτε ότι

$$N(B_2^n, 4K) \leq \overline{N}(B_2^n, 2K) \leq (3\rho)^m.$$

[*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα ότι για κάθε $x \in B_2^n$ υπάρχει $w_x \in (1+\rho)(K \cap W)$ τέτοιο ώστε $x \in w_x + K$.]

10. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι:

(α) Αν $K \subseteq 4B_2^n$ τότε $N(K, B_2^n) \leq N\Big(B_2^n, \frac{1}{16}K^\circ\Big)$.

(β) Αν $B_2^n \subseteq 4K$ τότε $N(B_2^n, K) \leq N\Big(K^\circ, \frac{1}{16}B_2^n\Big)$.