ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΡΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ (2013–14)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4
(Ημερομηνία Παράδοσης: 4 Απριλίου 2014)

1. Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ μια 1-Lipschitz συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(α) $|\mathbb{E}(f) - \mathrm{med}(f)| \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$.

(β) $0 \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(f^2)} - \mathbb{E}(|f|) \leqslant \frac{c_2}{\sqrt{n}}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$.

(γ) Για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \sqrt{\mathbb{E}(f^2)}| \geqslant t\}) \leqslant c_3 \exp(-c_4 t^2 n),$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ απόλυτες σταθερές.

2. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $N \leqslant \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^n$ και $T : X \to \ell_\infty^n$ με την ιδιότητα

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leqslant \|T(x)\|_{\ell_\infty^n} \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

3. Έστω $g_1, \ldots, g_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας Ω και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.
(α) Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Δείξτε ότι

$$\|G\|_q := \left(\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\right\|^q d\omega\right)^{1/q} = c_{n,q} M_q(X)$$

όπου

$$M_q(X) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^q d\sigma(x)\right)^{1/q},$$

και υπολογίστε τις σταθερές $c_{n,1}$ και $c_{n,2}$.
(β) Δείξτε ότι, αν $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^k g_i(\omega)e_i\right\| d\omega \leqslant \int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\right\| d\omega.$$

4. Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ με μοναδιαία μπάλα το συμμετρικό κυρτό σώμα K, και έστω b η μικρότερη θετική σταθερά με την ιδιότητα $\|x\| \leqslant b|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και για κάθε $E \in G_{n,k}$ ισχύει

$$M(K \cap E) = \int_{S^{n-1} \cap E} \|x\|\, d\sigma_E(x) \leqslant c\sqrt{n/k} \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\sigma(x) = c\sqrt{n/k}\, M(K).$$

Παίρνοντας $k = 1$ συμπεράνατε ότι $b \leqslant c\sqrt{n}\, M(K)$.

5. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Συμβολίζουμε με b τη μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\max\left\{M_1, c_1 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\} \leqslant M_q \leqslant \max\left\{2M_1, c_2 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\}$$

για κάθε $q \in [1,n]$, όπου c_1, c_2 είναι απόλυτες θετικές σταθερές.
(α) *Υπόδειξη για την δεξιά ανισότητα.* Η συνάρτηση $\|\cdot\| : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Από τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα έπεται ότι

$$\sigma\big(x \in S^{n-1} : \big|\, \|x\| - M_1 \,\big| > t\big) \leqslant 2\exp(-ct^2 n/b^2)$$

για κάθε $t > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα στον $L^q(S^{n-1})$,

$$M_q - M_1 \leqslant \|\, \|x\| - M_1 \,\|_q.$$

(β) *Υπόδειξη για την αριστερή ανισότητα.* Υπάρχει $z \in S^{n-1}$ ώστε $B_X \subseteq \{y : |\langle y, z\rangle| \leqslant 1/b\}$. Συνεπώς,

$$\{x \in S^{n-1} : \|x\| \geqslant t\} \supseteq C_t := \{x \in S^{n-1} : |\langle x, z\rangle| \geqslant t/b\}$$

για κάθε $t > 0$. Χρησιμοποιήστε την

$$M_q = \left(q\int_0^\infty t^{q-1}\sigma(\{x : \|x\| \geqslant t\})\,dt\right)^{1/q} \geqslant \left(q\int_0^\infty t^{q-1}\sigma(C_t)\,dt\right)^{1/q}.$$

6. Έστω $x_1, \ldots, x_t \in S^{n-1}$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in S^{n-1}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^t |\langle y, x_i\rangle| \geqslant \sqrt{t}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε όλα τα διανύσματα της μορφής $z(\varepsilon) = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i x_i$ όπου $\varepsilon_i = \pm 1$, και επιλέξτε ένα με τη μεγαλύτερη δυνατή Ευκλείδεια νόρμα.

7. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Έστω $t(X)$ ο μικρότερος φυσικός t για τον οποίο υπάρχουν $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$ ώστε

$$(*) \qquad \frac{1}{2}M\|x\|_2 \leqslant \frac{1}{t}\sum_{i=1}^t \|U_i(x)\| \leqslant 2M\|x\|_2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$t(X) \geqslant \frac{1}{4}(b/M)^2,$$

όπου b η μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.
Υπόδειξη. Υποθέστε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιους $U_1, \ldots, U_t \in O(n)$. Θεωρήστε $x_0 \in S^{n-1}$ με $\|x_0\| = b$ και χρησιμοποιήστε την προηγούμενη Άσκηση για τα $x_i = U_i^{-1}(x_0)$.

8. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ και $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Υποθέτουμε ότι $v(B_X) \leqslant n^\alpha$ και $v(B_{Y^*}) \leqslant n^\beta$ για κάποιους $\alpha, \beta \geqslant 1$, όπου $v(P)$ είναι το πλήθος των κορυφών ενός πολυτόπου P. Δείξτε ότι

$$d(X,Y) \leqslant c\sqrt{\alpha+\beta}\sqrt{n\log n}.$$

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n \subseteq B_X \subseteq B_2^n \subseteq B_Y \subseteq \sqrt{n}B_2^n.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $U \in O(n)$, ισχύουν οι $\|U^{-1} : Y \to X\| \leqslant n$ και

$$\|U : X \to Y\| = \sup_{x \in B_X} \|U(x)\|_Y = \max_{x \in \mathrm{ext}(B_X)} \max_{y^* \in \mathrm{ext}(B_{Y^*})} |\langle U(x), y^*\rangle|,$$

όπου $\mathrm{ext}(P)$ είναι το σύνολο των κορυφών του πολυτόπου P. Για σταθερά x, y^* και $\varepsilon > 0$ εκτιμήστε το

$$\nu(\{U \in O(n) : |\langle U(x), y^* \rangle| \geqslant \varepsilon\}).$$

9. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K και ότι $(|K|/|B_2^n|)^{1/n} = A$.

(α) Δείξτε ότι

$$\int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|U\theta\|^n \|\theta\|^n} \sigma(d\theta)\nu(dU) = A^{2n}.$$

(β) Για κάθε $U \in O(n)$ και $\theta \in S^{n-1}$ θέτουμε $N_U(\theta) = \frac{\|U\theta\| + \|\theta\|}{2}$. Δείξτε ότι υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{[N_U(\theta)]^{2n}} \sigma(d\theta) \leqslant A^{2n}$$

και συμπεράνατε ότι $N_U(\theta) \geqslant \frac{c}{A^2}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

(γ) Αν ο U ικανοποιεί το (β), δείξτε ότι

$$B_2^n \subseteq K \cap U(K) \subseteq 8A^2 B_2^n.$$

10. (α) Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $|K| = |B_2^n|$ και $N(K, B_2^n) \leqslant \exp(cn)$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{vr}(\mathrm{conv}(K^\circ \cup B_2^n)) \leqslant C,$$

όπου $C > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από την c (με $\mathrm{vr}(A)$ συμβολίζουμε τον *λόγο όγκων* του A).

(β) Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $|K| = |B_2^n|$ και $N(K, B_2^n) \leqslant \exp(cn)$. Δείξτε ότι

$$N(K^\circ, B_2^n) \leqslant \exp(Cn),$$

όπου $C > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από την c.