Μάθημα 3ο

→ r αντικείμενα (διακεκρ)
n υποδοχές (διακεκρ)
n^r τοποθετήσεις

$|00|000|0\cdots0|$

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$$

r αντικείμενα (μη διακεκρ)
n υποδοχές (διακεκρ)

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$$

Ταυτόσημο πρόβλημα με # συνδυασμών με r στοιχεία με επανάληψη από n στοιχεία. $\binom{n+r-1}{r}$

Γεννήτριες Συναρτήσεις Κεφ 2ο

$\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$ δυναμοσειρά, $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$ (Taylor)

$$\boxed{\alpha_r = f^{(r)}(0)/r!}$$

- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}(-1)^k$

Ανάποδο πρόβλημα: Έχω ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$
θέλω να βρω ποια είναι η $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r$

Γεννήτρια Συνάρτηση.

Ακολουθίες	Γεννήτριες Συναρτήσεις
$\alpha_r = \dfrac{f^{r}(0)}{r!}$	$f(x)$
$1, 1, 1, \ldots$	$f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$
$1/k!$	$f(x) = e^x$
$0, 1, 0, -1/3, 0, 1/5$	$\ln(1+x)$
$(\lambda \alpha_r + \mu b_r)_{r=0}^{\infty}$	$\lambda \cdot A(x) + \mu B(x)$
$(\lambda^r \alpha_r)$	$A(\lambda x)$
$\alpha_{-1} = 0$ $\quad \alpha_{r-1}$	$x A(x)$
$b_r = \begin{cases} 0 & r < n \\ \alpha_{r-n} & r \geq n \end{cases}$ $\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{n}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots$	$x^n A(x)$
$\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$	$\dfrac{A(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k}{x^n}$
$1/2!, 1/3!, \ldots$	$\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

$(r\,\alpha_r)_r$ | $x\,A'(x)$

$\frac{\alpha_r}{r+1}$ | $\frac{\int_0^x A(t)\,dt}{x}$

$b_r = \sum_{k=0}^{r} \alpha_r$ | $\frac{A(x)}{1-x}$

$1, 1, 1, \ldots 1, \ldots$ | $\frac{1}{1-x}$

$1, 2, 3, 4, \ldots$ | $\frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum_{r=0}^{k} \alpha_r b_{k-r}$ | $A(x) \cdot B(x)$ $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} \alpha_r b_{k-r} x^k \right.$ Συνέλιξη $\left. \right)$

<u>Εφαρμογή</u> για συνέλιξη $1, 1, \ldots$ α_0, α_1 $\frac{1}{1-x}$ $A(x)$

Συνέλιξη $\alpha_0, \ \alpha_0+\alpha_1, \ \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2, \ \ldots$

Άρα Γ.Σ. της συνέλιξης: $\frac{A(x)}{1-x}$

10

Πως προσθέτουμε $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

Μάθημα 4ο

Απόδειξη: (Με Γ.Σ.)

$0, 0+1, 0+1+2, 0+1+2+3, \dots$

$0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Η $1,1,1,\dots$ έχει Γ.Σ $\frac{1}{1-x}$

Η $1,2,3,\dots$ έχει Γ.Σ $\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k \Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{(k+1)}$$

$0, 1, 2, \dots$

Άρα για την $0, 0+1, 0+1+2, \dots$ Γ.Σ. είναι $\frac{x}{(1-x)^3}$

Θα γράψω τη συνάρτηση $\frac{x}{(1-x)^3}$ ως δυναμοσειρά

$$\frac{x}{(1-x)^3} = x(1-x)^{-3} = x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}x^k(-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-3}{k}x^{k+1}$$

$$1+2+3+\dots+k = (-1)^{k-1}\binom{-3}{k-1} = (-1)^{k-1}\frac{(-3)(-3-1)\dots(-3-(k-1)+1)}{(k-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)\dots\dots 3}{(k-1)!} = \frac{k(k+1)}{2}$$

Να υπολογιστεί το $0+1^2+2^2+\dots+k^2$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^k \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^{k-1} \Rightarrow$$

$$x \frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k \Rightarrow \frac{1}{1-x}\, x \frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}$$ είναι η

Γ.Σ. της ακολ. $0+1^2+\dots+k^2$ είναι $\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$

Να γραφεί ως διαφορά η $\frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{x}{(1-x)^4} + \frac{x^2}{(1-x)^4}$

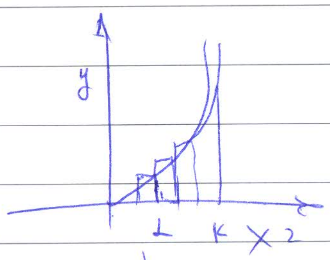
• $\frac{x}{(1-x)^4} = x(1-x)^{-4} = x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-4}{k}x^k$

$$\frac{1}{(1-x)^4} = (-1)^k\binom{-4}{k} = (-1)^k\frac{(-4)(-5)\cdots(-4-k+1)}{(k!)} = \frac{4\cdot5\cdots(k+3)}{k!}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

$$\frac{x}{(1-x)^4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}x^k$$

$$1+2^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k-1)k(k+1)}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$



$$\int_1^k x^2\,dx = \frac{k^3}{3} - \frac{1}{3}$$

$$E = 1+2^2+3^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Να βρεθεί το $1^3+2^3+\dots+k^3$

12

Σελ 32 Ασκ 1.1 (λύση σελ 119)

Ασκ 1.4.

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Άρα έχει $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Ασκ 1.5. 8^6 αν μας ενδιαφέρει η σειρά

$\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ αν όχι.

Ασκ 1.8

Πρώτα τοποθετώ 9 σε κάθε κουτί.

$r-9n$ έμειναν άρα $\begin{bmatrix} n \\ r-9n \end{bmatrix}$