Μάθημα 5ο

Να υπολογιστεί το $\sum_{i=1}^{t}\binom{n-i}{j}$. Θεωρώ $\alpha_{ij}=\binom{n-i}{j}$ ακολουθία ως προς j.

Η α_{ij} έχει Γ.Σ. την $(x+1)^{n-i}$

Εμείς θέλουμε τη Γ.Σ. της $\sum_{i=1}^{t}\alpha_{ij}$

Είναι $\sum_{i=1}^{t}(1+x)^{n-i} = (1+x)^n\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{(1+x)^i} = \frac{(1+x)^n}{x} - \frac{(1+x)^{n-t}}{x}$

Άρα $\sum_{i=1}^{t}\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j+1} - \binom{n-t}{j+1}$

Πως μετράμε;

→ Πόσοι συνδυασμοί j αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα υπάρχουν;

$(1+x)^n = (1+x)(1+x)\cdots(1+x)$ n φορές. $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$

→ Να υπολογιστεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε k αντικ. από n με επανάληψη.

$(1+x+x^2+\dots)^n$ $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-n}{k}x^k$

$\parallel$

$(1-x)^{-n}$

→ Να υπολογιστεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε k αντικ. από n με ζυγό αριθμό επαναλήψεων

$(1+x^2+x^4+\dots)^n = (1-x^2)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k}$

Απάντηση $\begin{cases} 0, & \text{αν } k \text{ περιττός} \\ (-1)^s\binom{n}{s} & \text{αν } k=2s. \end{cases}$

$$(1-x^2)^{-n} = (1-x)^{-n}(1+x)^{n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-n}{k}x^k \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i-1}{i}(-1)^{k-i}\binom{n+k-i-1}{k-i}\right)x^k$$

Οι δύο δυναμοσειρές ταυτίζονται άρα

$$\binom{n+s-1}{s} = \sum_{k=0}^{2s}\binom{n+2s-k-1}{2s-k}\binom{n+k-1}{k}(-1)^k.$$

Αριθμός διαμερίσεων

$2=1+1$ $\quad$ $3=3$ $\quad$ $d(4)=5$

$2=2$ $\quad$ $3=2+1$

$3=1+1+1$

$d(2)=2$ $\quad$ $d(3)=3$

Να υπολογιστεί το $d(n)$.

$1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots$ $\quad$ για το πόσες φορές θα θέσω ο 1.

$1+x^2+x^{2+2}+\cdots$ $\quad$ για το " " " το 2.

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

$$\frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^2}\cdots\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$$

Μάθημα 6ο:

Εκθετικές Γ.Σ.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r \frac{x^r}{r!} \qquad \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \underbrace{(r!b_r)}_{\alpha_r} \frac{x^r}{r!}$$

Παράδειγμα:

- Να υπολογιστεί ο αριθμός των διατάξεων r αντικ. επιλ. από n αντικ. με επανάληψη. (n^r)

Υπολογισμός με Γ.Σ. (εκθετικές)

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^n = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \frac{x^r}{r!}$$

απάντηση

(Γνωρίζουμε ότι ο # συνδυασμών με επανάληψη r από n με επανάλ $\binom{n+r-1}{r}$)

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \frac{x^r}{r!}.$$

$$\alpha_r = \sum_{q_1+\dots+q_n=r} \frac{r!}{q_1!\,q_2!\dots q_n!} = n^r$$

- $\underset{1}{\sqcup} \dots \underset{n}{\sqcup}$ ① ○ … ⓡ

Αριθμός τρόπων τοποθετήσεων r διακεκ. αντικειμένων σε n διακεκ. επιλογές με τον περιορισμό κάθε υποδοχή να δεχθεί τουλ. 1 αντικ.

Χωρίς τον περιορισμό $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^n$.

16.

Με τον περιορισμό.

$(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^n$ $\qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$$\left(e^x - 1\right)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} e^{(n-i)x} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \sum_{r=0}^{\infty} (n-i)^r \frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \boxed{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^r} \frac{x^r}{r!}$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^r}{n!} = S(r,n) \overset{\parallel}{\left\{ {r \atop n} \right\}}$$ Αριθμός Stirling Β' είδους

N

- $$\boxed{\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{\lambda} \alpha_{ij} = \sum_{j=0}^{\lambda} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ij}}$$

Π.χ.

- $f : \{1, 2, \dots, r\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$
  Αριθμός συν. $= 2^r$
  Αριθμός 1-1 συν. $n(n-1)\cdots(n-r+1)$
  Αριθμός επί συν. $n!\,S(r,n)$

- Έστω σύνολο $\{1, \dots, r\}$ σε n υποσύνολα : $S(r,n)$

Ασκήσεις: Σελ 124 και 1.14.
131 και 1.24