27 Μάθημα 10

Μέθοδος Ε-Α

N το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Ω.

$\underbrace{C_1, \ldots, C_t}_{\text{κακά υποσύνολα.}} \subseteq \Omega$.

Πόσα είναι τα στοιχεία του Ω που είναι έξω από τα κακά σύνολα

Συμβολισμός $N(C_1 \wedge C_2 \wedge \bar{C_3})$ ο αριθμός των στοιχείων που δεν ανήκουν στο C_3 ανήκουν στο C_1 & στο C_2.

Ζητάμε το $N(\bar{C_1} \cdots \bar{C_t}) = N - N(C_1) - \cdots - N(C_t)$
$+ N(C_1 C_2) + \cdots + N(C_{t-1}, C_t) - \cdots\cdots (-1)^t N(C_1 \cdots C_t)$

Π.χ.

- Πόσες ακολουθίες με n όρους από 0,1,2,3 υπάρχουν που περιέχουν τουλάχιστον 1 από τα ~~τρία στ~~ τρία ψηφία.

$N = 3^n$, $C_1 = 2^n$ (οι ακολ που δεν περιέχουν το 1)
$C_2 = 2^n$ (" " " 2)
$C_3 = 2^n$ (" " " 3)

Ζητάμε το $N(\bar{C_1}\bar{C_2}\bar{C_3}) = N - N(C_1) - N(C_2) - N(C_3)$
$+ N(C_1 C_2) + N(C_2 C_3) + N(C_1 C_3) - N(C_1 C_2 C_3)$
$= 3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1 + 1 + 1 - 0 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.

Τύπος Euler

Φυσικοί Αριθμοί $\mathbb{N}$

Πρώτοι μεταξύ τους είναι οι αριθμοί που ο μ.κ.δ τους είναι ο 1. Π.χ. 4,9.

$$m \geq 2 \quad \phi(m) = |\{\, n > 0,\ n \leq m : \text{ΜΚΔ}(n,m) = 1 \}|$$

Τύπος για $\phi(m)$

$$\phi(m) = m \prod_{\substack{p/m \\ p \text{ πρώτος}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

$\phi(4) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2.$

28

$\phi(6) = 6\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2$ $\qquad$ $1, \cancel{4}, 5$

$\phi(18) = 18\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 6.$

<u>Απόδειξη τύπου:</u>

$$\phi(m) = m - \frac{m}{p_1} - \frac{m}{p_2} - \cdots - \frac{m}{p_t} + \frac{m}{p_1 p_2} + \cdots \quad (-1)^t \frac{m}{p_1 p_2 \cdots p_t}.$$

Έστω $p_1, \ldots p_t$ οι πρώτοι που διαιρούν το m.

C_1 = αριθμοί (στο σύνολο) που διαιρούνται από το p_1.

$\vdots$

C_t

$N(C_1) = \frac{m}{p_1}$ $\cdots$ $N(C_t) = \frac{m}{p_t}$

$N(C_i C_j) = \frac{m}{p_i p_j}$ $\cdots$

$$N(C_1 \cdots C_t) = \frac{m}{p_1 \cdots p_t}$$

$$\phi(m) = m \prod_{p/m}\left(1-\frac{1}{p}\right) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_t}\right)$$

$$= m\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)\left(\frac{p_2-1}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{p_t-1}{p_t}\right)$$

$$= \frac{m}{p_1 \cdots p_t}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_t-1)$$

$$= \frac{m}{p_1 \cdots p_t}\left(p_1 \cdots p_t + (-1)^{t-1} p_1 + (-1)^{t-1} p_t + \cdots + (-1) p_1 \cdots p_{t-1}\right)$$

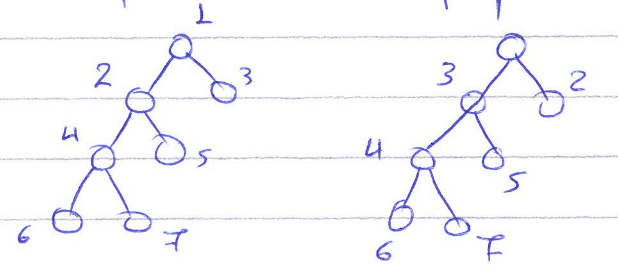
$$= m\left(-1 - \frac{1}{p_t} - \cdots - \frac{1}{p_{t-1}} + \frac{1}{p_1 p_2} + \cdots + \frac{(-1)^t}{p_1 \cdots p_t}\right)$$

$$= m - \frac{m}{p_1} - \cdots - \frac{m}{p_t} + \frac{m}{p_1 p_2} + \cdots \quad (-1)^t \frac{m}{p_1 p_2 \cdots p_t}$$

29

Ισχύει $N(C_1 \cup \cdots \cup C_t) = N - N(\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_t)$

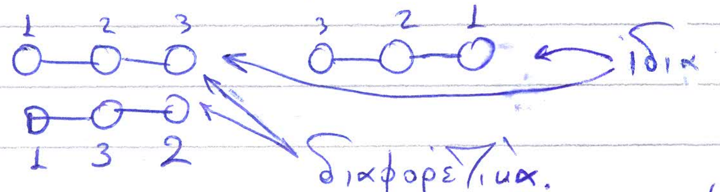
Πλήρη δυαδικά δέντρα



Εδώ έχω ταυτότητες στους κόμβους. Αυτά τα δυαδικά δέντρα δεν είναι ίδια

Χωρίς ταυτότητες $T_N = \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}$.

• Να μετρηθούν τα απλά γραφήματα με 5 κόμβους (επώνυμα) χωρίς απομονωμένους κόμβους



Τα απλά γραφήματα είναι $2^{\binom{5}{2}}$ το πλήθος, διότι $\binom{5}{2}$ όλες οι δυνατές ακμές. $2^{\binom{5}{2}} = 2^{10} = 1024$.