Μάθημα 11

- Αντικείμενα $1, .., n$
ακολουθία από m αντικείμενα επιλεγμένα από $1, .., n$
που να περιέχει τα 1,2,3 σε οποιαδήποτε σειρά.

Σύμπαν Ω όλες οι ακολ. m ψηφίων από τα $1, .., n$
(με επανάληψη)

$$|\Omega| = n^m$$

C_i το σύνολο που δεν περιέχει το i $i \in \{1,2,3\}$
θέλουμε το

$$N(\bar{C}_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3) = n^m - 3(n-1)^m + 3(n-2)^m - (n-3)^m$$

- Τώρα ζητάμε να μην περιέχουν τα 1,2,3 (ούτε ένα από αυτά).

$$N(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = N(C_1) + \cdots + N(C_3) - N(C_1 C_2) \cdots$$

- Το πλήθος ... που δεν περιέχουν 1,2,3 και δεν περιέχουν 2,3,4 (οποιαδήποτε σειρά, οπουδήποτε).

Αποχρωστικά σύνολα
Οι ακολουθίες με 1,2,3 $= N_{123}$
Οι ακολουθίες με 2,3,4 $= N_{234}$

Ζητούμενο $n^m - \underbrace{N_{123}}_{\text{γνωστό}} - \underbrace{N_{234}}_{\text{γνωστό}} + \underbrace{N_{1234}}_{\text{όμοια το βρίσκουμε.}}$

- Πλήθος που αν έχουν 6,9 δεν έχουν 1,2,3
$\parallel$ $\qquad A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
Πλήθος που είτε δεν έχουν 6,9 είτε δεν έχουν 1,2,3

Το συμπλήρωμα δηλαδή των ακολουθιών που έχουν 6,9 κ έχουν 1,2,3.

• Έχουν 6,9 ⇔ Έχουν 1,2,3 ① Έχουν 6,9 κ 1,2,3
② Δεν έχουν ούτε 6,9 ούτε 1,2,3.

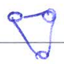
Γραφήματα

Ορισμοί: Γράφημα: Τελίτσες κ γραμμούλες.

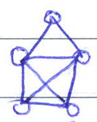
Διαδρομή: Ακολουθία από τελίτσες που ενώνονται με γραμμούλες.

Μονοπάτι: Μια διαδρομή που διέρχεται από κάθε τελίτσα της μια μόνο φορά

Κλειστή διαδρομή: Διαδρομή με ίδιο τέρμα κ αρχή

Κύκλος: 

Μονοκονδυλιά: Διαδρομή όπου δεν επαναλαμβάνεται ακμή



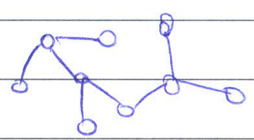
Βαθμός κόμβου: Αριθμός προσπιπτουσών ακμών

Απλά: Χωρίς βρόχους χωρίς πολλαπλές ακμές

Συνεκτικό: Οποιεσδήποτε δυο ακμές του συνδέονται με διαδρομή (άρα κ μονοπάτι).

Συνεκτικές συνιστώσες: Τα συνεκτικά κομμάτια ενός γραφήματος.

Το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών ισούται με το διπλάσιο των ακμών.

Δέντρο: Ακυκλικό συνεκτικό γράφημα. 

(Μαθηματική έννοια)

Φύλλο: Κορυφές βαθμού 1.

Κάθε δέντρο με δύο τουλ. κορυφές έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

Απόδειξη: Θεωρούμε δ μονοπάτι μεγαλύτερου δυνατού μήκους. Τα άκρα του θα είναι φύλλα

Ασκήσεις:

(1) Πόσες τοποθετήσεις των 0, 1, .., 9 υπάρχουν έτσι ώστε το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο του 1 κ το τελευταίο μικρότερο του 8;

Αποδ:

C_1: Οι μεταθέσεις με το πρώτο ψηφίο να είναι ≤ 1

C_2: « « « « τελευταίο ψηφίο να είναι ≥ 8

Ζητάμε $N(\bar{C}_1\bar{C}_2) = N - N(C_1) - N(C_2) + N(C_1C_2)$

$$= 10! - 2\cdot 9! - 2\cdot 9! + 2\cdot 2\cdot 8!$$

(2) 1000 μαθητές. 400 μιλούν Γαλλικά $\to \Gamma$

300 μιλούν Ιταλικά $\to I$

200 « Σουηδικά $\to \Sigma$

200 « μιλούν δύο γλώσσες

100 « κ τις τρεις γλώσσες.

Πόσοι δεν μιλούν καμία γλώσσα;

Λύση:

$$N(\bar{\Gamma}\bar{I}\bar{\Sigma}) = N - N(\Gamma) - N(I) - N(\Sigma) + [N(\Gamma I) + N(I\Sigma) + N(\Sigma\Gamma)] - N(\Gamma I \Sigma)$$

$$= 1000 - 400 - 300 - 200 + 200 - 100$$

$$= 200$$

(3) Πόσες ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση

$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 20$

δεδομένου ότι $0 \le x_i \le 8$

C_i = Το i κελί περιέχει πάνω από 8 σφαιρίδια (Το $x_i > 8$).

Λύση:

$$N(\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_6) = N - \sum_{i=1}^{6} N(C_i) + \sum_{1 \le i < j \le 6} N(C_i C_j)$$

$$= \binom{20+6-1}{20} - 6\binom{16}{11} + \binom{6}{2}\binom{7}{2}.$$

$x_i \ge 9 \iff \overset{y_i}{x_i - 9} \ge 0$

Άρα $x_1 + x_2 + \cdots + y_i + \cdots + \cancel{x}_6 = 11$

$\underset{y_i}{x_i \ge 9}, \underset{y_j}{x_j \ge 9}$ $\quad x_1 + \cdots + y_i + y_j + \cdots + x_6 = 2$