Μάθημα 12

Δέντρο

Ακυκλικό συνεκτικό γράφημα

Δέντρο

Ρίζα - επίπεδα (πληροφορική)

Τα παιδιά είναι διατεταγμένα.

$G = (V, E)$ — vertex: V, edge: E

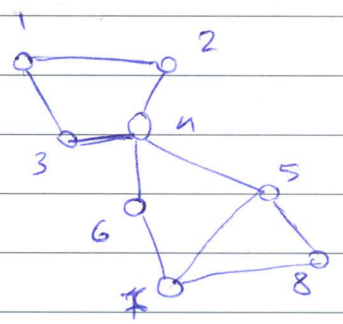
V: κορυφές, E: ακμές

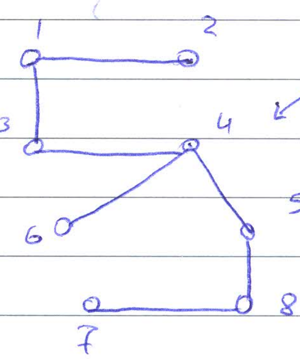
E σύνολο από μη διατεταγμένα ζεύγη του V.

• $G=(V,E)$. Το $G'=(V',E')$ καλείται υπογράφημα του G ανν $V' \subseteq V$ κ $E' \subseteq E$

Αν $V'=V$ το G' καλείται παράγον υπογράφημα του G. Αν είναι κ δέντρο το λέμε παράγον δέντρο.

παράδειγμα:





παράγον δέντρο

Θεώρημα: Κάθε συνεκτικό γράφημα έχει ένα τουλάχιστον παράγον δέντρο.

Ισοδυναμίες για δέντρα

1. T δέντρο με n κορυφές $\Longleftrightarrow$
2. T συνεκτικό με n κορυφές κ n-1 ακμές.

Απόδειξη

(1) $\Rightarrow$ (2) Υποθ: T δέντρο με n κορυφές

Συμπ: T συνεκτικό κ n κορυφές κ n-1 ακμές

Αποδ. το T έχει $n-1$ ακμές

Με επαγωγή: Βάση $n=1$ ισχύει

Επ. υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για n. Θεωρώ δέντρο με $n+1$ ακμές. Αφαιρώ ένα φύλλο. Προκύπτει δέντρο με n ακμές. Από επ. υπόθεση έχει $n-1$ ακμές. Άρα το αρχικό θα έχει n ακμές.

(1) ⇐ (2) Υποθ. (2) Συμπέρασμα (1).

Ξέρω ότι κάθε υπογράφημα έχει γεννητικό δέντρο. Έστω T' το γ.δ. του T. Το T έχει n κορυφές κ $n-1$ ακμές (από το επάν.). Αφού έχουν ίδιο αριθμό κορυφών κ ακμών κ το ένα είναι υπογράφημα του άλλου ταυτίζονται.

Κώδικας Prüfer: Μέτρηση μέσω κωδικοποίησης

Κορυφές $V=\{1,\dots,n\}$. Πόσα δέντρα με n κορυφές υπάρχουν;

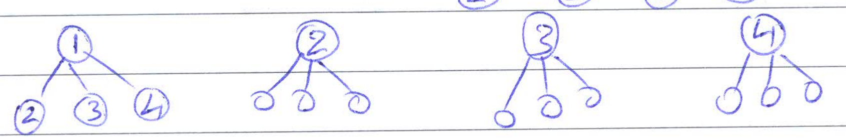
$\{1\}$ (1)

$\{1,2\}$ (1)—(2)

$\{1,2,3\}$ (1)—(2)—(3) (1)—(3)—(2) (2)—(1)—(3)

$\{1,2,3,4\}$ (1)—(2)—(3)—(4) (2)—(1)—(3)—(4) (1)—(3)—(4)—(2)

(2)—(3)—(1)—(4) (1)—(4)—(3)—(2)



... 16 το πλήθος

$\{1,2,3,4\} \rightarrow 125$

$\{1,2,\dots,n\} \rightarrow n^{n-2}$

Θεώρημα Cayley-Sylvester

Δέντρα με n κορυφές n^{n-2} το πλήθος.

Τεχνική Κωδικοποίησης

Το πλήθος ακολουθιών με $n-2$ όρους που ανήκουν στο σύνολο $\{1,2,\dots,n\}$

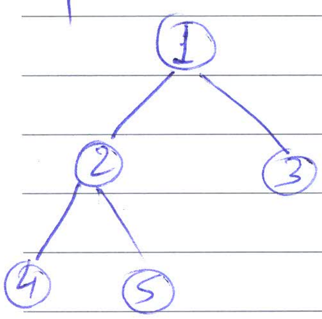
Δέντρα με κορυφές $\{1,2,\dots n\}$ | Ακολουθίες με επανάληψη $n-2$ όρων επιλεγμένους από $1,2,\dots n$

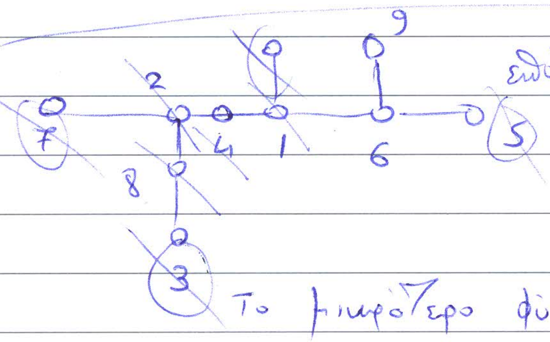
Φ

1-1 & επί

T

Κατασκευή του Κώδικα Prüfer



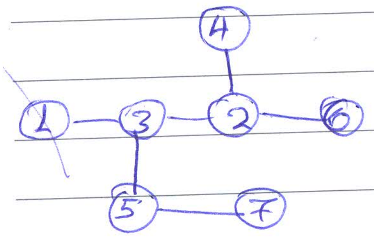


επόμενο μικρότερο φύλλο.

8 6 2 2 4 1 6

Το μικρότερο φύλλο φεύγει

Μάθημα 13



3 2 2 3 5

1. Ιδιότητα: Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου το τρέχουμενο γράφημα είναι δέντρο. (Από το δέντρο αφαιρούμε κάθε φορά ένα φύλλο.

2. Ιδιότητα. Το σύνολο (των διαγεγραμμένων κόμβων)* = Το σύνολο των φύλλων (του αρχικού δέντρου

Απόδειξη:

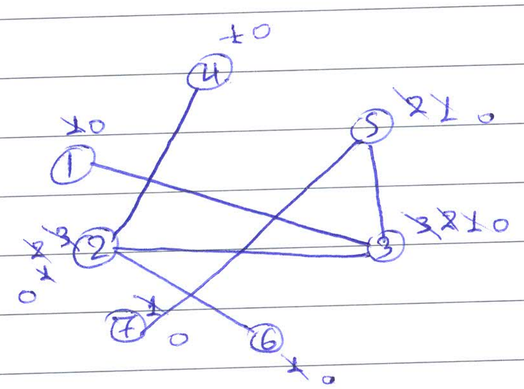
(A) Κάθε φύλλο (~~θα διαγραφεί κ~~) δεν θα εμφανιστεί στον κώδικα.

(B) Κάτι που δεν θα εμφανιστεί στον κώδικα είναι φύλλο.

3. Ιδιότητα: Βαθμός κάθε κόμβου = Αριθμός εμφανίσεων στον κώδικα +1.

Αντίστροφη διαδικασία

3 2 2 3 5



Ισχυρισμός: Το γράφημα που προκύπτει είναι δέντρο

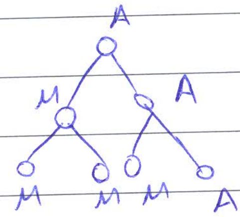
(A) Έχει n-1 ακμές.

(B) Είναι συνεκτικό.

* Των κόμβων που δεν θα μπουν στον κώδικα

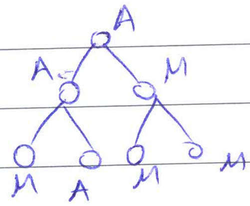
Στην πρόοδο μέχρι εδώ.

Έχουμε δύο χρώματα Α, Μ



7 κόμβοι

Άλλος χρωματισμός



δύο διαφορετικοί χρωματισμοί. Στην ίδια όμως κλάση,

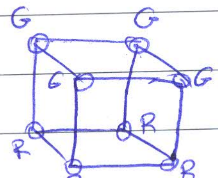
Υπάρχουν 2^7 διαφορετικοί χρωματισμοί υπάρχουν.

Ορίζουμε κλάσεις ισοδυναμίας. Ερώτηση: Πόσες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας $\Leftrightarrow$ Πόσοι είναι οι μη ισοδύναμοι μεταξύ τους χρωματισμοί;

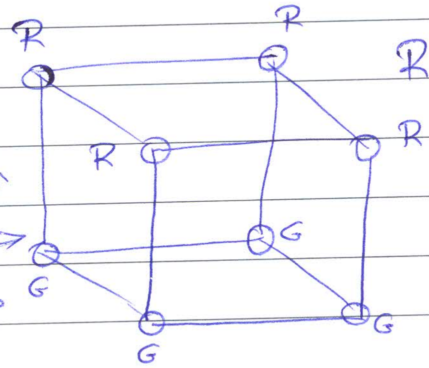
Δεδομένου συνόλου ις δεδομένης σχέσης ισοδυναμίας, θα υπολογίζουμε τον αριθμό των ομάδων

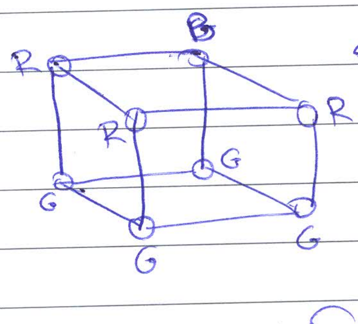
3^8 χρωματισμοί.

R, G, B



ισοδύναμοι αν τους θετάξω στο χώρο





όχι με αυτόν όμως.

Τι χαρακτηριστικά για τον κανόνα ομαδοποίησης χρειαζόμαστε;