Θεωρία Polya — Μάθημα 14.

V μη κενό πεπερασμένο ~~(πλ)~~σύνολο. $u_1, \dots, u_n$
C σύνολο από χρώματα $c_1, \dots, c_r$
$f: V \to C$ χρωματισμός.
Πόσοι χρωματισμοί υπάρχουν; (n^r) r^n

Θεωρούμε σύνολα αντιμεταθέσεων του V. Μια αντιμετάθεση του V τη συμβολίζουμε με $\pi: V \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} V$.

Ένα αποδεκτό σύνολο G αντιμεταθέσεων θα πρέπει να έχει τις εξής ιδιότητες:
1. $e \in G$ → ταυτοτική αντιμετάθεση.
2. $\pi \in G \Rightarrow \pi^{-1} \in G$
3. $\pi_1 \in G$ κ $\pi_2 \in G \Rightarrow \pi_1\pi_2 \in G$.

Ένα σύνολο αντιμεταθέσεων του V καλείται σύνολο συμμετριών αν είναι υποομάδα ως προς τη σύνθεση.

Υποομάδα της ομάδας ΟΛΩΝ των αντιμεταθέσεων ως προς την πράξη της σύνθεσης.
(Ορισμός ομάδας: ουδέτερο - αντίστροφο - προσεταιριστικότητα)
→ V, C, $X = \{f \mid f: V \to C\}$, G ομάδα συμμετριών στο V, $f \in X$, $\pi \in G$.

Ποιος είναι ο χρωματισμός που προκύπτει όταν η συμμετρία π δράσει επί του χρωματισμού f;
$\underbrace{\pi(f)}_{g}(u) = f(\pi(u))$

Δύο χρωματισμοί θα λέγονται ισοδύναμοι
(~~∀u∈U~~ πf)

Αν $\exists\, \pi \in G : \pi(f) = g$
Αυτό αποτελεί σχέση ισοδυναμίας. $(\equiv_G X)$

Άρα $f, g \in X$ $\boxed{f \equiv_G g \overset{ορσ}{\Longleftrightarrow} \exists\, \pi \in G \ \pi(f) = g}$

$X/\equiv_G$ σύνολο πηλίκου.

Να υπολογιστεί $|X/\equiv_G|$. Δηλαδή να βρεθεί ο αριθμός των μη ισοδύναμων μεταξύ τους χρωματισμών.

Γενικό Πλαίσιο Θ. Polya
V, $|V| < \infty$, $V \neq \emptyset$, $\{u_1, \dots, u_n\}$
C πεπ. μη κενό
$X = \{f \,/\, f : V \to C\}$
G υποομάδα συμμετριών του V
$\equiv_G$ σχέση ισοδ. στο X που ορίζεται μέσω της G.
Ερώτημα
Να υπολογιστεί $|X/\equiv_G|$

Έστω $G = \{e\}$ $\quad |X/\equiv_G| = |X| = |C|^{|V|}$.
$G = \{\pi \,/\, \pi : V \xrightarrow[επί]{1-1} V\}$ $\quad |X/\equiv_G| = 1$
Ασκήσεις

Αρχή εισπράκτορων N σύνολο νομισμάτων

$v \in N$ $\quad αξ(v)$ αξία του v $\quad \sum_{v \in N} αξία(v)$ (1)

Έστω $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ όλες οι δυνατές αξίες.

(1) $= \sum_{i=1}^{r} πλ(\alpha_i)\, \alpha_i$, $\quad πλ(\alpha_i) = |v \in N \,/\, αξ(v) = \alpha_i|$ ορίζεται μέσω της G.

41.

Αρχή μέτρησης μονάδων στους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \end{pmatrix}$$

Αριθμός μονάδων στους πίνακες

Είναι το ίδιο να προσθέσω τους άσσους πρώτα κατά γραμμές κ μετά κατά στήλες κ το αντίστροφο.

Λίγα πράγματα για τις αντιμεταθέσεις.

Κάθε αντιμετάθεση γράφεται κατά μονοσήμαντο τρόπο ως γινόμενο κυκλικών αντιμεταθέσεων.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \equiv (12)(345)(678)$$

$b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2,\ b_4 = 0 \ldots b_8 = 0.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (345)(678) \equiv (1)(2)(345)(678)$$

π είναι αντιμετάθεση $b_1^{(\pi)} \leftarrow$ πλήθος κύκλων μήκους 1 της π.

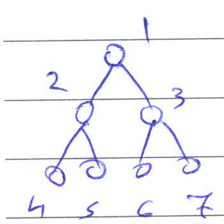
$\vdots$

$b_i^{(\pi)}$ « « μήκους i της π.

$\vdots$

$b_n^{(\pi)}$

Τύπος του Burnside



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$ όχι αποδεκτή αντιμετάθεση

Έστω $\pi \in G$. Ο χρωματισμός f καλείται αναλλοίωτος ως προς π αν $\pi(f) = f$.

• Το σύνολο των αναλλοίωτων χρωματισμών ως προς π το λέμε $I(\pi) = \{ f \,/\, \pi f = f \}$

• f χρωματισμός $J(f) = \{ \pi \,/\, \pi(f) = f \}$.

<u>Γεγονός 1</u>

$$\sum_{\pi \in G} |I(\pi)| = \sum_{f \in X} |J(f)|$$

σαν με τρία

$$\underbrace{A_{\pi f}}_{\text{χρωματισμα}} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \pi(f) = f \\ 0 & \text{αν } \pi(f) \neq f \end{cases}$$

<u>Τύπος Burnside</u>

$$|X/\equiv_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |I(\pi)|$$

Σύμφωνα με το Γεγονός 1, ισχύει:

$$|X/\equiv_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in X} |J(f)|$$

Ορίζω $E(f,g) = \{ \pi \in G \,/\, \pi(f) = g \}$

<u>Γεγονός 2</u> Αν οι χρωματισμοί f, g είναι $f \equiv_G g$

$$|J(f)| = |E(f,g)|$$

~~Απόδειξη γεγονότος 2~~ $\phi : J(f) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} E(f,g)$

Από την υπόθεση $\exists\, \pi_0 : \pi_0(f) = g$

$$\phi(\pi) = \pi \circ \pi_0$$

<u>Για 1-1</u>

$\phi(\pi) = \phi(\pi') \Rightarrow \pi \circ \pi_0 = \pi' \circ \pi_0 \Rightarrow \pi = \pi'$.

<u>Για επί</u>

Έστω $\pi \in E(f,g)$ θέλω να βρω $\pi' : \phi(\pi') = \pi \Rightarrow$

$\pi' \circ \pi_0 = \pi$

Αρκεί να θεωρήσω $\pi' = \pi \pi_0^{-1}$ $\blacksquare$

Άρα αποδείξαμε τον Ισχυρισμό 2.

Άρα $\displaystyle\sum_{\pi \in G} |I(\pi)| = \sum_{f \in X} |J(f)| = \sum_{[g] \in X/\equiv_G} \cdot \sum_{f \in [g]} |J(f)|$

↑ κλάση

$\displaystyle = \sum_{[g] \in X/\equiv_G} \sum_{f \in [g]} |E(f,g)|$ → πλήθος όλων συμμετριών.

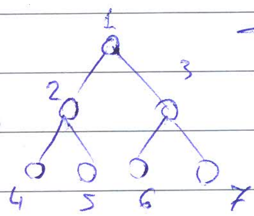
$= |G| \, |X/\equiv_G|$

Άρα αποδείξαμε $\displaystyle |X/\equiv_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |J(f)|$

Μάθημα 15°

Αν έχω δύο χρώματα 2^7 χρωματισμοί.

$$\cdot \left| X/G \right| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |I(\pi)|$$



A
M A
M M A M

$\equiv$

A
A M
A M M M

$\not\equiv$

M
A M
A M M M

Κατάλογος Συμμετριών

e (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)
(1) (2) (3) (4)(5) (67)
(1) (2) (3) (45) (6)(7)
(1)(2)(3) (45)(67)
(1) (23) (64)(75)
(1) (23) (47)(56)
(1) (23) (4756)
(1) (23) (7465)

$$\left| X/G \right| = \underbrace{\frac{1}{|G|}}_{8} \sum_{\pi \in G} I(\pi) = \frac{1}{8}\left(2^7+2^6+2^6+2^5+2^4+2^4+2^3+2^3\right) = 42$$

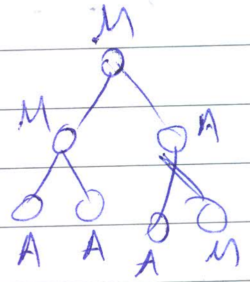
$I(\pi)$
2^7
2^6
2^6
2^5
2^4
2^4
2^3
2^3

Θεωρία Polya

Μεταβλητές $x_1, \dots x_r$ (r χρώματα)

f

$X_1^{c_1} X_2^{c_2} \cdots X_r^{c_r}$ ← μονώνυμο χρωματισμού. m_f



$x^4 y^3$

c_i : ο αριθμός των φορών που το χρώμα i εμφανίζεται στον χρωματισμό f.

Θεώρημα Αν $f \equiv_G g$ τότε $m_f = m_g$
Το αντίστροφο δεν ισχύει.

- $\sum_{[f] \in X/G} m_f$ = άθροισμα όλων των μονονύμων για τους μη ισοδύναμους χρωματισμούς.

π.χ $P(x,y,z) = x^5y^2z + x^4y^4 + 4x^3y^3z^2$

$P(1,1,1)$ = πλήθος μη ισοδύναμων μεταξύ τους χρωματισμών.

Ποιο είναι το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών που το χρώμα 1 εμφανίζεται 3 φορές; ⇝ 4

Δεδομένου του $P(x_1, \dots x_r)$.

- Αριθμός μη ισοδύναμων χρωματισμών ⇝ $P(1,1,\dots,1)$
- Αριθμός μη ισοδύναμων χρωματισμών που το χρώμα 1 εμφανίζεται ακριβώς μια φορά $= \frac{\partial P}{\partial x_1}(0,1,\dots,1)$
- " " " 1 " 4 φορές $= \frac{1}{4!}\frac{\partial P}{\partial x_1}(0,1,\dots,1)$

Μάθημα 16

αριθμός κορυφών με χρώμα x_1

$$m_f = x_1 \cdots x_r$$

$$m_f = x_{f(u_1)} \cdots x_{f(u_n)}$$

π.χ. $R\,u_1$ $R\,u_2$ $B\,u_4$ $G\,u_3$ $\quad R, G, B \leftarrow$ χρώματα $\quad f(u_1)=R$, $f(u_2)=R$, $f(u_3)=G$, $f(u_4)=B$

$$m_f = x_R^2 x_G^1 x_B^1 = x_{f(u_1)} x_{f(u_2)} x_{f(u_3)} x_{f(u_4)} = x_R x_R x_G x_B$$

Ζητάω $\sum\limits_{\substack{[f]\in X/G \\ f \in X/G}} m_f \qquad |X/G| = P(1,1,\dots,1)$

3 χρώματα: Μεταβλητές x, y, z

$$P(x,y,z) = 4xyz^3 + x^2y^2z + 3y^4z$$

Έχω 4 χρωματισμούς όπου το χρώμα 1 εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.

Αριθμός μη ισοδύναμων χρωματισμών όπου το χρώμα 1 εμφανίζεται ακριβώς μία φορά $= \frac{\partial P}{\partial x_1}(0,1,\dots,1)$

$\frac{1}{k!}\frac{\partial P^{(k)}}{\partial x_i^k}(1,1,1,\underset{i \text{ θέση}}{0},1)$ το χρώμα i εμφανίζεται ακριβώς k φορές

$$\sum_{[f]\in X/G} m_f = \sum_m a_m \cdot m = \sum_m \underbrace{\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} |I_m(\pi)|\Big)}_{a_m} \cdot m \quad (1)$$

m = μονώνυμα στις μεταβλητές $x_1, \dots, x_r$ βαθμού n

$a_m =$ το πλήθος των μη ισοδύναμων μεταξύ τους χρωματισμών με μονώνυμο m.

$$I_m(\pi) = \{ f \in X \,/\, \pi(f) = f \text{ και } m_f = m \}$$

$$① = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{m} |I_m(\pi)|\, m = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{f \in I(\pi)} m_f \quad ②$$

άθροισμα μονωνύμων για τους χρωματισμούς που παραμένουν αναλλοίωτοι ως προς π.

Ας υποθέσουμε ότι παίρνουμε μια συμμετρία που έχει 2 κύκλους μήκους 2 και 1 κύκλο μήκους 1.

$$\sum_{f \in I(\pi)} m_f = (x^2 + y^2 + z^2)^2 (x + y + z)$$

$$② = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} (x_1 + \dots + x_r)^{b_1} (x_1^2 + \dots + x_r^2)^{b_2} \cdots (x_1^n + \dots x_r^n)^{b_n}$$

όπου b_i = # κύκλων μήκους i

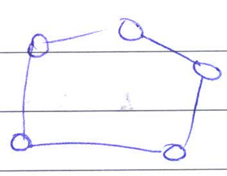
$\delta_\pi(y_1, \dots, y_n) = y_1^{b_1} \cdots y_n^{b_n}$ ← Δείκτρια συνάρτηση της συμμετρίας.

$$\sum_{f \in X/G} m_f = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \delta_\pi(y_1, \dots y_n) \overset{*}{=}$$

$$y_i = (x_1^i + \dots + x_r^i)$$

$$* \ \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} y_1^{b_1} \cdots y_n^{b_n} .$$

Παράδειγμα:



5 χάντρες 3 χρωμάτων R, G, B.

π_0, π_1, π_2, π_3, π_4 — οι συμμετρίες ως προς περιστροφή.

• π_0 5 κύκλους μήκους 1.
$\delta_{\pi_0} = y_1^5$

• π_1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 1 κύκλο μήκους 5

$\delta_{\pi_1} = y_5^1$

• π_2 1 κύκλο μήκους 5
$\delta_{\pi_2} = y_5^1$

• π_3 1 κύκλο μήκους 5
$\delta_{\pi_3} = y_5^1$

• π_4 1 κύκλο μήκους 5
$\delta_{\pi_4} = y_5^1$

$\sum_{f \in X/G} m_f = (y_1^5 + 4 y_5)\frac{1}{5}$ 3 χρώματα : ~~x, y, z~~ x_1, x_2, x_3

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{5}\left((x_1+x_2+x_3)^5 + 4(x_1^5+x_2^5+x_3^5)\right) = P(x_1, x_2, x_3)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{5}(243+12)$$