Μάθημα 17ο

• Π_0 5 κύκλους μήκους 1.
$\delta_{\Pi_0} = y_1^5$

• Π_1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 1 κύκλο μήκους 5

$\delta_{\Pi_1} = y_5^1$

• Π_2 1 κύκλο μήκους 5
$\delta_{\Pi_2} = y_5^1$

• Π_3 1 κύκλο μήκους 5
$\delta_{\Pi_3} = y_5^1$

• Π_4 1 κύκλο μήκους 5
$\delta_{\Pi_4} = y_5^1$

$\sum_{f \in X/G} m_f = (y_1^5 + 4y_5)\frac{1}{5}$ 3 χρώματα: ~~x, y, z~~ x_1, x_2, x_3

$$\| $$

$$\frac{1}{5}\left((x_1+x_2+x_3)^5 + 4(x_1^5+x_2^5+x_3^5)\right) = P(x_1,x_2,x_3)$$

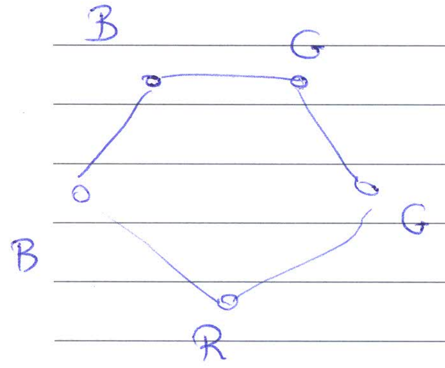
$$\|$$

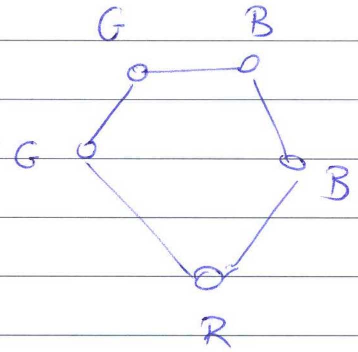
$$\frac{1}{5}(243+12) = 51$$

Άσκηση

Πόσα περιδέραια με 5 χάντρες τριών χρωμάτων μπορούμε να φτιάξουμε (επιτρέπεται αντιστροφή στο χώρο των πολιέ)

(Στο προηγούμενο επιτρεπόταν μόνο η αντιστροφή.





Προσδιορισμός του G

π_0
π_0
π_2
π_3
π_4

βρίσκετε τα $\delta\pi_i$ $\quad i \in \{0,1,\dots,4\}$

οι περιστροφές ως προς άξονες

π_1'
π_2'
π_3'
π_4'
π_5'

$$\delta\pi_1' = y_1^{b_1}\cdots y_5^{b_5} = y_1 y_2^2 = \delta\pi_2' = \dots = \delta\pi_5'$$

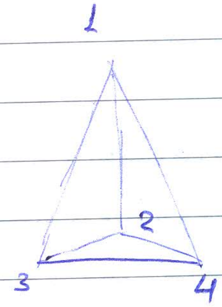
Άρα
$$\sum_{[f]\in X/G} = \frac{1}{10}\left(y_1^5 + 4y_5 + 5y_1y_2^2\right)$$
$$= \frac{1}{10}\Big((x_1+x_2+x_3)^5 + 4(x_1^5+x_2^5+x_3^5) + 5(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2\Big) = P(\bar{x})$$

$$P(1,1,1) = \frac{1}{10}\left(3^5 + 4\cdot 3 + 5\cdot 3\cdot 9\right) = 38$$

Τετράεδρο (όχι κανονικό)

Με βάση ισόπλευρο τρίγωνο

Τρεις παράπλευρες έδρες ισοσκελή



Π_0 ταυτοτική $\quad y_1^4$

Π_1 (περιστροφή κατά 120°) $\quad y_1 y_3$

Π_2 (« « 240°) $\quad y_1 y_3$

$$\frac{1}{3}\left(y_1^4 + 2y_1y_3\right).$$

Κύβος

$|G| = 24$.

Π_0

3 (ζεύγη απ εδρών) — 3 άξονες που διέρχονται από τα κέντρα απέναντι εδρών.

Στροφή 90° δεξιά — δύο κύκλοι μήκους 4 $\quad y_2^4$

« αριστερά « « $\quad y_2^4$

Στροφή 180° — τέσσερις κύκλοι μήκους 2 $\quad y_4^2$

$$6y_4^2 + 3y_2^4$$

Άξονες που συνδέουν τα μέσα απ ακμών — 6 άξονες

$$6 \cdot y_2^4$$

4 Άξονες (για ~~που~~) που συνδέουν ζεύγη διαγωνίων κορυφών, όχι σε κοινή έδρα.

$8y_1^2 y_3^2$ ← πλήθος κύκλων.

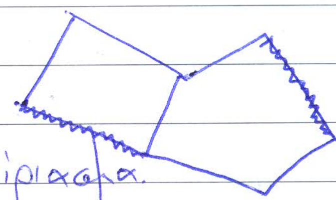
↑ μήκος κύκλου

Μάθημα 18ο

Ταιριάσματα

Ταίριασμα σε ένα γράφημα καλούμε ένα σύνολο ακμών που ανά δύο δεν έχουν κοινή κορυφή.

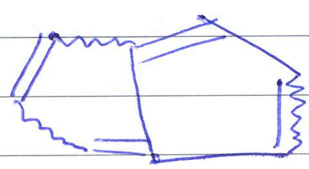
Π.χ



Αυτές οι ακμές αποτελούν ταίριασμα.

Μεγιστοτικό ταίριασμα: Δεν υπάρχει γνήσιο υπερσύνολό του που είναι ταίριασμα

Μέγιστο ταίριασμα (μεγίστου πληθαρίθμου): Δεν υπάρχει άλλο που ο πληθάριθμός του είναι μεγαλύτερο από αυτό.

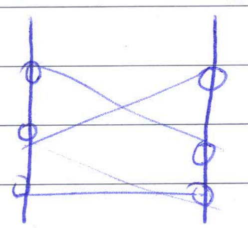


Το κατσαρό είναι μεγιστοτικό
Το διπλό είναι μέγιστο.

Αν ένα ταίριασμα είναι μέγιστο είναι κ μεγιστοτικό. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Τέλειο ταίριασμα: Κάθε κορυφή του γραφήματος ανήκει σε μια ακμή του ταιριάσματος.

Διμερές Γράφημα



Ταίριασμα καλό ως προς X (πλήρες ως προς το μέρος X $\Leftrightarrow$ κάθε κορυφή του X ανήκει σε μια τουλάχιστον ακμή του ταιριάσματος.

Θεώρημα Hall

Έστω G Διμερές Γράφημα με μέρη X, Y

(A) Το G έχει πλήρες ταίριασμα ως προς X.

(B) $|X| \leq |N(X)|$

$N(S) = \{y \in Y : \exists x \in S : \{x,y\} \in E\}$ ακμές

$N(\{\alpha, \beta\}) \geq |\{\alpha, \beta\}| = 2$

$S \subseteq X \quad |N(S)| \geq S$

Τελικά (B) $\forall S \subseteq X \quad |N(S)| \geq |S|$

Προφανώς (A) $\rightarrow$ (B)

Θεώρημα Hall (B) $\Rightarrow$ (A)

Απόδειξη: Επαγωγική βάση $|X| = 1$ Προφανώς.
Επαγωγική υπόθεση ισχύει για $|X| = n$
θα το δείξουμε ότι ισχύει για $|X| = n+1$

Λάθος Συλλογισμός

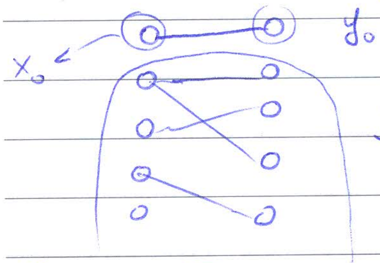
Έστω $|X| = n+1$. Θεωρώ $x_0 \in X$
Από την υπόθεση έχω ότι $\exists y_0 \in Y : (x_0, y_0) \in E \Rightarrow$
$y_0 \in N(x_0)$. Θεωρώ το $X' = X - \{x_0\}$ κ $Y' = Y - \{y_0\}$
Έστω H το γράφημα που επάγεται στο ~~$x_0 \cup y_0$~~ $X' \cup Y'$
Εφαρμόζω επ. υπόθεση στο H. Άρα υπάρχει πλήρες ταίριασμα που καλύπτει όλα τα στοιχεία του X.
Προσθέτω την ακμή $\{x_0, y_0\}$ κ παίρνω ταίριασμα που καλύπτει όλο το X.
(Τέρμα της λανθασμένης απόδειξης).

Απόδειξη Θεωρήματος Hall — Μάθημα 19ο

Θεώρημα Hall ∃ πλήρες ως προς X ταίριασμα ανν $\forall S \subseteq X$ $|N(S)| \geq |S|$.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Προφανές.

$(\Leftarrow)$ Α. Περίπτωση $|N_G(S)| > |S|$



H επαγόμενο γράφημα.

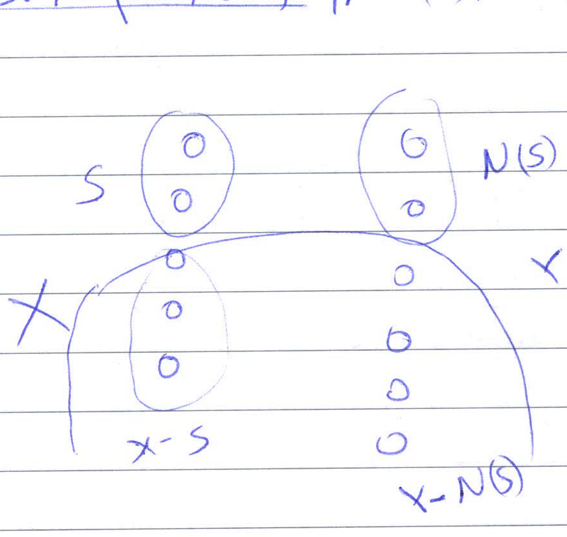
Θα αποδείξω ότι στο επαγόμενο γράφημα ισχύει η συνθήκη. Δηλαδή θα δείξω ότι $\forall\ S \subseteq X'$ $|N_H(S)| \geq |S|$

Αν το αποδείξω, εφαρμόζω την επ. υπόθεση για το H κ ενώνω το πλήρες ταίριασμα του H (ως προς X) με το μονοσύνολο $\{x_0, y_0\}$ για να πάρω πλήρες ταίριασμα του G (ως προς X)

$|N_G(S)| > |S|$ $\quad N_H(S) \supseteq N_G(S) - \{y_0\}$

Άρα $|N_H(S)| \geq |S|$

Β. Περίπτωση $|N_G(S)| = |S|$ για κάποιο S.



Πρέπει νδο $\forall S \subseteq X - S \; |N_H(S)| \geq |S|$
$\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{X'}$

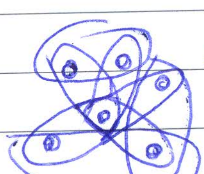
Έστω (προς άτοπο), ότι υπάρχει $S_0 \subseteq X'$
$|N_H(S_0)| < |S_0|$

Θεωρώ $S_0 \cup S$, τότε $|N_G(S_0 \cup S)| < |S_0 \cup S|$ Άτοπο.

<u>Πόρισμα</u> (Marriage Theorem Hall's)
Αν G διμερές γράφημα με μέρη X, Y κ $|X| = |Y|$
κ εάν $\forall S \subseteq X \; |N(S)| \geq |S|$,
τότε $\exists$ τέλειο ταίριασμα.

<u>Εφαρμογές Θεωρήματος Hall</u>
$A_1, \ldots A_n$ σύνολα. $A_i \neq \emptyset \;\; i \in \{1, \ldots, n\}$. Δεν είναι απαραίτητο $A_j \cap A_i = \emptyset$.

Μια ακολουθία $a_i \in A_i \;\; i = 1, \ldots, n$ διαφορετικών ανά δυο στοιχείων ονομάζεται. Σύστημα Διακεκριμένων Αντιπροσώπων.

 ← Εδώ δεν μπορώ να βρω τέτοια ακολουθία

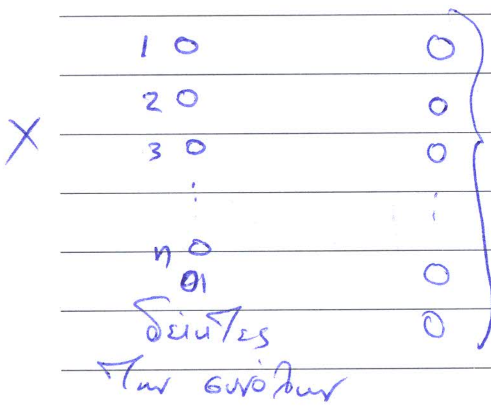
Ικανή κ Αναγκαία συνθήκη για να έχει μια οικογένεια $A_1, \ldots A_n$ Σ.Δ.Α. είναι για κάθε επιλογή $A_{i_1}, \ldots A_{i_r}$ από την οικογένεια $A_1, \ldots, A_n$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$

$r \leq |A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_r}|$

Αναγκαίο: Προφανές.

55

Αναγωγή στο Θ Hall



$Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$\{i, \alpha\} \in E \Leftrightarrow \alpha \in A_i$

Αν $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow N(S) = \{\alpha \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid \exists s \in S \ \alpha \in A_s\}$

Σε αυτό το διμερές γράφημα ισχύει ότι $\forall S \subseteq X \ |N(S)| \leq |S|$
διότι ξέρουμε $r \leq |A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_r}| \ \forall \ i_1 < \dots < i_r$.

Ένα πλήρες ταίριασμα ως προς X μας δίνει σύστημα διακεκρ. αντιπροσώπων.

Μάθημα 20

Τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \to$ μοναδιαίος πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \ddots & \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\parallel}{A}$$

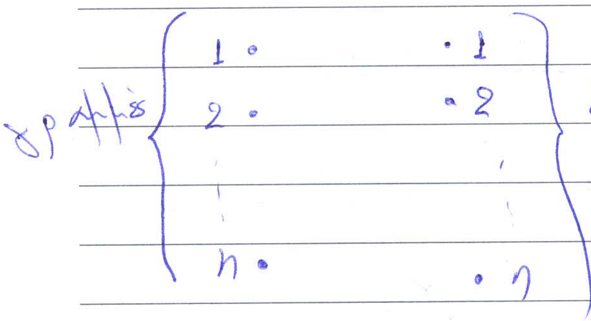
A: πίνακας αντιμετάθεσης.
Οι πίνακες αντιμετάθεσης : 1-μαγικοί πίνακες.
Πίνακες με στοιχεία $\mathbb{N}$.
Το άθροισμα μαγικών πινάκων είναι μαγικός πίνακας.

<u>Παρατήρηση</u> Αθροίζοντας k πίνακες-αντιμετάθεσης παίρνω έναν k μαγικό πίνακα.

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε k μαγικός πίνακας είναι άθροισμα k πινάκων-αντιμετάθεση.

<u>Απόδειξη</u>: Με επαγωγή.
<u>Επαγωγική βάση</u>: Προφανής.
Έστω A ένας $k+1$ μαγικός πίνακας
Θα ψάξω να βρω στο A n θέσεις που να μην βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη ανά δύο. Τότε προφανώς $A = A' + (\text{πιν αντιμ})$
όπου A' k μαγικός.

Αναγωγή στο Θ. Hall.



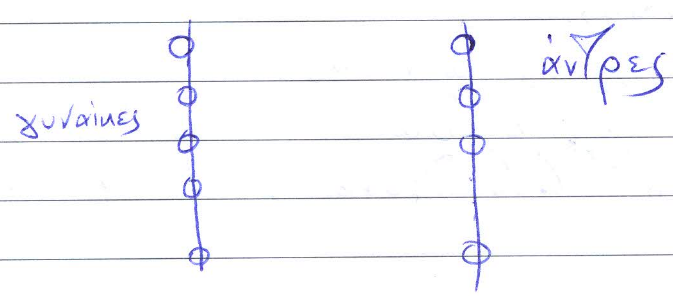
Τοποθετώ ακμή (i,j) αν a_{ij} (στον πίνακα A) είναι θετικός αριθμός.

Αν $S \subseteq X$, $|S| \le |N(S)|$

$S \subseteq X$, $|S| = r$. Το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα που βρίσκονται σε γραμμή i με $i \in S$ είναι $r(k+1)$
Πρέπει ν.δ.ο. $|N(S)| \ge |S|$.
Οι γείτονες του S αντιστοιχούν σε στήλες. Έστω $t = |N(S)|$
Θα αποδείξω $\underbrace{r(k+1)}_{\text{άθροισμα γραμμών που ξεκινάνε από το } S} \le \underbrace{t(k+1)}_{\text{άθροισμα στηλών}}$

Άρα προφανώς $r(k+1) \le t(k+1) \Rightarrow r \le t$

→ Έστω ένα χωριό. Κάθε γυναίκα γνωρίζεται, ταιριάζει με τουλάχιστον k άντρες. Κάθε άντρας του χωριού γνωρίζεται με το πολύ k γυναίκες. Τότε υπάρχει τέλειο ταίριασμα. Οι άντρες είναι όσες οι γυναίκες.



Θ.δ.ο ισχύει η συνθήκη του Hall $\forall S \subseteq \text{Γυν}$ $|N(S)| \ge |S|$
Έστω $|S| = r$ $\quad |N(S)| = t$
Πρέπει νδο $r \le t \Rightarrow r \cdot k \le t \cdot k$

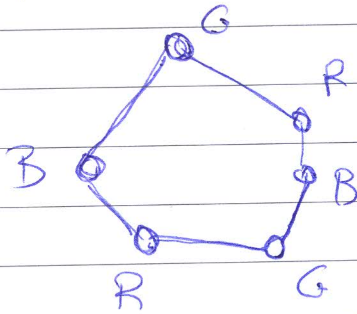
Παρατηρώ ότι $rk \le \overset{*}{m} \le tk$

* m οι ακμές που ξεκινούν από το σύνολο S

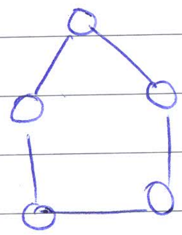
Χρωματισμοί κορυφών γραφήματος

Μια ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές έτσι ώστε κάθε δύο γειτονικές ακμές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Π.χ.



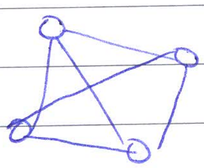
Θα μου έφταναν δύο χρώματα.



Εδώ θέλω τουλάχιστον τρία χρώματα.

Θεώρημα: Κάθε κύκλος με άρτιο αριθμό κορυφών έχει χρωματικό αριθμό 2.

« « « περιττό « « « 3.



4 κλίκα (K_4) $\quad X(k_n) = n$

Θεώρημα Έστω d ο μέγιστος βαθμός ενός γραφήματος

$X(G) \le d+1$

59

<u>Θεώρημα:</u> Αν H υπογράφος του G τότε
$\chi(H) \leq \chi(G)$