Στη σελίδα αυτή γράφτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράφτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Σελίδες για πρόχειρο θα σας δοθούν χωριστά.

Γράφτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες (και ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο πρόχειρο).

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:													

Βαθμοί

1α	1β	1γ	2	3	Πρόσθετο	Σύνολο

Καλη Επιτυχια

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 1α [Δεν παίρνει μονάδες, αλλά μόνο αν είναι σωστό θα βαθμολογηθούν τα υπόλοιπα ερωτήματα αυτού του θέματος].

Θεωρούμε τα εξής σύνολα:

- Το σύνολο A των (πεπερασμένων) γνησίως αυξουσών ακολουθιών θετικών φυσικών αριθμών των οποίων οι όροι έχουν άθροισμα δεδομένο φυσικό $n > 0$.
- Το σύνολο B των τρόπων να γράφουμε δεδομένο φυσικό $n > 0$ ως άθροισμα διαφορετικών μεταξύ τους θετικών φυσικών, χωρίς να μετράει η σειρά των όρων του αθροίσματος.
- Το σύνολο C των τρόπων να διαμερίσουμε σε ξένα ανά δύο μεταξύ τους, μη κενά υποσύνολα το σύνολο $\{1, \ldots, n\}$, όπου $n > 0$ δεδομένος φυσικός.

Κυκλώστε το σωστό, χωρίς αιτιολόγηση ούτε σχόλια (ο φυσικός $n > 0$ κοινός και στα τρία παραπάνω σύνολα):

1. Τα σύνολα A, B, C είναι ισοπληθικά.
2. Τα σύνολα A, B είναι ισοπληθικά και το C έχει, εν γένει, πληθάριθμο μεγαλύτερο από αυτά.
3. Τα σύνολα A, B, C έχουν ανά δύο, εν γένει, διαφορετικούς πληθαρίθμους.
4. Τα σύνολα A, C έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, αλλά το B έχει, εν γένει, μεγαλύτερο πληθάριθμο από αυτά.
5. Τα σύνολα B, C έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, αλλά το A έχει, εν γένει, μεγαλύτερο πληθάριθμο από αυτά.

Απάντηση: Σωστό σε αυτό το φύλλο θεμάτων είναι το (2) (η αρίθμηση διαφέρει από φύλλο σε φύλλο).

Εξήγηση (δεν σας ζητήθηκε). Υπάρχει προφανής $1-1$ και επί αντιστοίχιση μεταξύ συνόλων φυσικών (τα στοιχεία συνόλων, ως γνωστό, δεν θεωρούνται ότι είναι σε κάποια σειρά) και γνησίως αυξουσών ακολουθιών φυσικών. Άρα $|A| = |B|$. Το σύνολο C έχει εν γένει μεγαλύτερο πληθάριθμο, διότι στις διαμερίσεις του $\{1, \ldots, n\}$ πέρα από τον πληθάριθμο του κάθε στοιχείου της διαμέρισης, έχει σημασία και ποιοι φυσικοί ανήκουν στο κάθε στοιχείο της διαμέρισης (επιπλέον, οι διαμερίσεις μπορεί να έχουν ισοπληθικά σύνολα ως στοιχεία).

Θέμα 1β [2 μονάδες]. Γράψτε, με δικαιολόγηση **το πολύ δέκα γραμμών**, τη γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των αυξουσών (όχι κατ' ανάγκη γνησίως) πεπερασμένων ακολουθιών θετικών φυσικών των οποίων οι όροι αθροίζονται σε $n > 0$, με τον περιορισμό ο κάθε όρος να επαναλαμβάνεται το πολύ 3 φορές. Η ΓΣ να δοθεί με τη μορφή **μη αναπτυγμένου** γινομένου με δυνητικά άπειρους παράγοντες.

Απάντηση:

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i}).$$

Ο συντελεστής του x^n στην παραπάνω παράσταση, όταν αναπτυχθεί το γινόμενο, ισούται με τον αριθμό των τρόπων να γράψουμε το n ως άθροισμα από κανένα, ένα, δύο, ή τρία i, με $1 \leq i$, διότι για την ανάπτυξη του γινομένου αρκεί να επιλέξουμε έναν όρο από τον κάθε παράγοντα.

Θέμα 1γ [3 μονάδες]. Γράψτε, με δικαιολόγηση **το πολύ δέκα γραμμών**, τη γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των συνδυασμών με επανάληψη $n > 0$ ψηφίων επιλεγμένων από τα πενταδικά ψηφία $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ με **μόνο** περιορισμό τα περιττά πενταδικά ψηφία να εμφανίζονται, το καθένα, άρτιες φορές. Η ΓΣ να δοθεί με τη μορφή **μη αναπτυγμένου** κλάσματος.

Απάντηση:

$$(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2i} + \cdots)^2(1 + x + x^2 + \cdots x^i + \cdots)^3 = \frac{1}{(1-x^2)^2(1-x)^3}.$$

Ο υψωμένος στο τετράγωνο παράγοντας αντιστοιχεί στην επιλογή των ψηφίων 1 και 3 από άρτιες φορές, ενώ ο υψωμένος στον κύβο παράγοντας αντιστοιχεί στην επιλογή των ψηφίων 0, 2 και 4 αυθαίρετο αριθμό φορών. Επειδή το άθροισμα των εμφανίσεων όλων των ψηφίων θέλουμε να δίνει n, ο ζητούμενος αριθμός δίνεται από το συντελεστή του x^n στο παραπάνω κλάσμα.

Θέμα 2 [2,5 μονάδες]. Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των πλήρων δυαδικών δέντρων με ρίζα και $n > 0$ εσωτερικούς κόμβους, όπου οι κόμβοι δεν είναι επιγεγραμμένοι (δηλ. δεν έχουν ταυτότητα), αλλά τα τέκνα κάθε κόμβου διακρίνονται σε «αριστερό» και «δεξιό» (δηλ. το δέντρο θεωρείται τοποθετημένο σε επίπεδο), δίνεται από την αναδρομική σχέση:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} T_{k-1} T_{n-k}.$$

Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των δέντρων όπως παραπάνω, αλλά χωρίς τον περιορισμό ότι τα παιδιά κάθε κόμβου διακρίνονται σε «αριστερό» και «δεξιό», θα ήταν σωστό να θεωρήσουμε την αναδρομική σχέση:

$$T_n = (1/2) \sum_{k=1}^{n} T_{k-1} T_{n-k} \quad ;$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας σε **το πολύ δέκα γραμμές.**

Απάντηση: Όχι δεν είναι σωστό. Αν $n = 2s + 1$, τότε δέντρο με n εσωτερικούς κόμβους μπορεί να σχηματιστεί, μεταξύ άλλων τρόπων, και επίσης «κρεμώντας» κάτω από κοινή ρίζα δύο *ίδια δέντρα* με s εσωτερικούς κόμβους το καθένα. Ο αριθμός αυτός των ζευγών από ίδια δέντρα δεν πρέπει να διαιρεθεί με 2, όταν αίρουμε τη διάκριση μεταξύ «αριστερού» και «δεξιού» παιδιού, διότι στην περίπτωση αυτή τέτοια διάκριση δεν υφίσταται.

Θέμα 3 [2,5 μονάδες]. Γνωρίζουμε ότι για την παραγωγή του κώδικα Prüfer ενός δέντρου με n κόμβους που είναι επιγεγραμμένοι (δηλ. ονομασμένοι) με τους φυσικούς $\{1, \ldots, n\}$, αφαιρούμε επαναληπτικά από το «τρέχον» δέντρο το φύλλο με την μικρότερη επιγραφή και στη συνέχεια τοποθετούμε στον κώδικα την επιγραφή του πατέρα του, έστω και εάν αυτή έχει προηγούμενα εμφανιστεί στον κώδικα (δηλ. ο κώδικας μπορεί να έχει επαναλήψεις)· σταματάμε όταν απομείνουν δύο κόμβοι. Θα ήταν ορθός ο κώδικας εάν δεν καταγράφαμε μία επιγραφή εάν είχε ήδη εμφανιστεί προηγούμενα, δηλαδή εάν δεν επιτρέπαμε επαναλήψεις; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας σε το πολύ δέκα γραμμές με παράδειγμα δύο δέντρων με το πολύ πέντε κόμβους.

Απάντηση: Θεωρήστε, π.χ., το δέντρο με 4 κόμβους $\{1, 2, 3, 4\}$ και με ακμές

$$E_1 = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}.$$

Το δέντρο αυτό θα παρήγαγε, αν απαγορεύαμε την επανάληψη κόμβων, κώδικα (3) (ενώ κανονικά ο κώδικάς του είναι $(3, 3)$). Κώδικα (3) όμως δίνει και το δέντρο με κορυφές τις $\{1, 2, 3\}$ και ακμές:

$$E_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

(Σχηματική παράσταση των δέντρων είναι απολύτως αποδεκτή και μάλλον προτιμητέα.)

Συνέχεια θέματος 2 [Το θέμα αυτό θα βαθμολογηθεί μόνον εάν όλα τα άλλα είναι άψογα γραμμένα, και αποτελεί προϋπόθεση για βαθμό 9 ή 10].

Να εξεταστεί εάν ο αριθμός των πλήρων δυαδικών δέντρων n εσωτερικών κόμβων, με ρίζα, χωρίς επιγραφές στους κόμβους και χωρίς διάκριση «αριστερού» και «δεξιού» παιδιού περιγράφεται σωστά από την αναδρομική σχέση:

$$T_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} T_{k-1}T_{n-k} & \text{εάν } n = 2s, s > 0, \\ (1/2)\sum_{k=1, k\neq s+1}^{n} T_{k-1}T_{n-k} + T_sT_s & \text{εάν } n = 2s+1, s \geq 0. \end{cases}$$

Η απάντηση να δοθεί σε δέκα το πολύ γραμμές.

Απάντηση: Όχι ούτε αυτός ο τύπος είναι σωστός. Διότι μπορεί για $n = 2s+1$ να χρειαστεί να κρεμάσουμε από κοινή ρίζα δύο *διαφορετικά* δέντρα T_1 και T_2 με s κορυφές και τα δύο. Θέλουμε, ανεξάρτητα από το ποιο από τα δύο βάλουμε «αριστερά», να μετράμε το δέντρο που προκύπτει μία φορά. Ο παραπάνω τύπος όμως το μετράει δύο φορές.

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας