ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα Μαθηματικά της Επιστήμης των Υπολογιστών

Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

Προβλήματα και Λύσεις

Γιώργος Α. Βουτσαδάκης
Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα Μαθηματικά της Επιστήμης
των Υπολογιστών

Προβλήματα και Λύσεις

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα Μαθηματικά της Επιστήμης των Υπολογιστών

Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

Προβλήματα και Λύσεις

Γιώργος Α. Βουτσαδάκης
Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

2008

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα Μαθηματικά της Επιστήμης
των Υπολογιστών

Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

Προβλήματα και Λύσεις

Γιώργος Α. Βουτσαδάκης
Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

Απαγορεύεται η με οποιοδήποτε τρόπο ανατύπωση ή μετάφραση
του βιβλίου αυτού χωρίς την έγγραφη άδεια των συγγραφέων.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced in any form
by any means without the prior written permission of the authors.

Στη Φωτεινή, τη Δήμητρα, τη Χριστίνα και τη Φωτεινή

Λ. Κ.

Στους γονείς μου, Γιάννη και Χριστίνα

Χ. Μ.

Στην Ασημίνα, την Ολγα και την Γεωργία

Π. Σ.

Πρόλογος 2ης (ενιαίας) έκδοσης

Το βιβλίο αυτό παρουσιάζει, σε εισαγωγικό επίπεδο, έννοιες και θεωρήσεις που αποτελούν μέρος των Διακριτών Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Συνδυαστικής. Στα Διακριτά Μαθηματικά, η έννοια της Συνέχειας (βασική για τον κλάδο της Μαθηματικής Ανάλυσης) δεν είναι απαραίτητη.

Η ύλη του βιβλίου αυτού είναι μέρος της Θεμελίωσης της Επιστήμης των Υπολογιστών. Αφορά το συστηματικό χειρισμό σχέσεων και τύπων με στόχο την κατανόηση της απαρίθμησης και την εξοικείωση με βασικές λειτουργίες των Υπολογιστικών Μηχανών, όπως π.χ. η Αναδρομή και οι Συμμετρικές Δομές.

Οι Θεμελιώσεις της Επιστήμης των Υπολογιστών περιλαμβάνουν πολλούς κλάδους των Μαθηματικών που δεν παρουσιάζονται στο βιβλίο αυτό. Τέτοιοι κλάδοι είναι η Γραφοθεωρία (Graph Theory), η Μαθηματική Λογική, η Θεωρία Παιγνίων, η Θεωρία Πιθανοτήτων και η Θεωρία Αυτομάτων. Εδώ επιλέξαμε να παρουσιάσουμε μόνον μερικά πολύ απλά και σαφή ζητήματα που απαιτούν μόνο ωριμότητα σκέψης. Το βιβλίο μας φιλοδοξεί να καλύψει ένα ορατό κενό στην Ελληνική Βιβλιογραφία σε ζητήματα βασικών αρχών και μεθοδολογίας στην Επιστήμη των Υπολογιστών.

Η παρούσα (δεύτερη) έκδοση του βιβλίου μας ενοποιεί δύο παλαιότερες εκδόσεις όπου η μία κάλυπτε ζητήματα θεωρίας και η άλλη προβλήματα και λύσεις. Στην παρούσα έκδοση ο αναγνώστης μπορεί ταυτόχρονα να διατρέξει τις θεωρητικές έννοιες και μεθόδους αλλά και να δει πολλές όμορφες συγκεκριμένες εφαρμογές τους. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε πλήρεις λύσεις σε 127 προβλήματα που καλύπτουν με ισορροπημένο τρόπο τη βασική θεωρία.

Το βιβλίο αυτό υποστηρίζει τη διδασκαλία των Διακριτών Μαθηματικών σε πολλά Ελληνικά Πανεπιστήμια και αποτελεί βασικό εφόδιο για το μάθημα

"Διακριτά Μαθηματικά" του Τμήματος Μηχανικών Ηλ. Υπολογιστών και Πληροφορικής του Παν. Πατρών.

Η επιμέλεια της τωρινής έκδοσης βασίσθηκε πολύ στη βοήθεια που προσέφερε ο Δρ. Βαγγέλης Καπούλας καθώς και ο εκδοτικός οίκος Gutenberg. Τους ευχαριστούμε θερμά, για άλλη μια φορά.

ΠΑΤΡΑ 2008

Οι συγγραφείς

ΥΓ: Για λάθη, παραλείψεις κλπ. παρακαλούμε επικοινωνήστε με τους συγγραφείς ({spirakis,kirousis,bouras}@ceid.upatras.gr)

"Ουδείς αλάνθαστος παρά μόνον ο Θεός"

Περιεχόμενα Βιβλίου Ι

Περιεχόμενα Βιβλίου II

Βιβλίο Ι

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Τα Μαθηματικά της Επιστήμης των Υπολογιστών

Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό παρουσιάζει σε εισαγωγικό επίπεδο ένα μέρος του γνωστικού αντικειμένου των Διακριτών Μαθηματικών (Discrete Mathematics). Στο είδος αυτό των Μαθηματικών οι έννοιες της συνέχειας και της εγγύτητας (που είναι έννοιες-κλειδιά της ανάλυσης) δεν είναι απαραίτητες.

Τα Διακριτά Μαθηματικά αποτελούν μέρος της Θεμελίωσης της Επιστήμης των Υπολογιστών. Η προσπάθειά μας να παρουσιάσουμε με συγκροτημένο τρόπο μερικές από τις έννοιες των Διακριτών Μαθηματικών, φιλοδοξεί να καλύψει ένα ορατό κενό στην Ελληνική βιβλιογραφία γύρω από το θέμα. Παρά την πληθώρα των Ελληνικών βιβλίων σε θέματα χρήσης ή τεχνολογίας του Υπολογιστή, είναι φανερή η έλλειψη Ελληνικών συγγραμμάτων στα ζητήματα των βασικών αρχών και της μεθοδολογίας της νέας αυτής Επιστήμης.

Παρ' όλο που η διατύπωση προβλημάτων στα Διακριτά Μαθηματικά μπορεί να γίνει με χαρακτηριστική απλότητα και σαφήνεια, εν τούτοις η αντιμετώπιση των προβλημάτων μερικές φορές μπορεί να προκαλέσει τη σκέψη και την ικανότητα των πιο καλών Μαθηματικών.

Επιλέξαμε να μην παρουσιάσουμε στο βιβλίο αυτό ύλη από την θεωρία των Γράφων (Graph Theory) ή από τη Λογική ή τη θεωρία Αυτομάτων. Η παρουσίαση των περιοχών αυτών θα είναι στόχοι μελλοντικών μας προσπαθειών.

Η ύλη του βιβλίου αυτού βασίσθηκε στις παραδόσεις του μαθήματος "Διακριτά Μαθηματικά" που διδάσκονται από το 1985 στο Τμήμα Μηχανικών Ηλ. Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών.

Το γράψιμο αυτού του βιβλίου πέρασε από πολλά στάδια πριν τελειώσει. Πολλοί άνθρωποι βοήθησαν σε αυτή την προσπάθεια. Πρώτοι από όλους οι φοιτητές του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής. Αυτοί ήταν οι πρώτοι δέκτες και αναμφίβολα πρόσφεραν πολλά με τις παρατηρήσεις και διορθώσεις τους.

Παρατηρήσεις για λάθη ή ατέλειες είναι ευπρόσδεκτες. Άλλωστε αυτοί που θα διαβάσουν αυτό το βιβλίο θα βοηθήσουν σημαντικά στη βελτίωσή του σε επόμενη έκδοση.

Κλείνοντας επιθυμούμε να ευχαριστήσουμε τους Γιώργο Βουτσαδάκη, Διονυσία Πετσάλη, Βαγγέλη Καπούλα, Γιώργο Παπουτσόπουλο, Παναγιώτη Μπασίρογλου, Χριστίνα Καλούδη και Λουκιανή Γκολφινοπούλου για την βοήθεια που μας προσέφεραν στην τελική παρουσίαση του βιβλίου, καθώς και όσους συναδέλφους σχολίασαν τα κείμενα. Επίσης επιθυμούμε να ευχαριστήσουμε τον εκδοτικό οίκο Gutenberg για την συνεργασία και βοήθειά του σε όλα τα ζητήματα παραγωγής του βιβλίου.

ΠΑΤΡΑ 1991

Οι συγγραφείς
Λ. Κυρούσης - Χ. Μπούρας - Π. Σπυράκης

Κεφάλαιο 1

Στοιχειώδης Συνδυαστική

1.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε μερικούς στοιχειώδεις τρόπους να μετράμε πεπερασμένα αντικείμενα ή γεγονότα. Όταν μετράμε χρησιμοποιούμε πολύ συχνά, σχεδόν πάντα όμως χωρίς να το αναφέρουμε ρητά, τους παρακάτω δύο βασικούς κανόνες:

Κανόνας του αθροίσματος: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m+n$ το πλήθος τρόποι κατά τους οποίους ένα από τα δύο γεγονότα μπορεί να συμβεί.

Κανόνας του γινομένου: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί κατά m τρόπους και ένα άλλο γεγονός μπορεί να συμβεί κατά n τρόπους, τότε υπάρχουν $m \cdot n$ το πλήθος τρόποι κατά τους οποίους και τα δύο γεγονότα μπορούν να συμβούν.

Παράδειγμα 1.1: Ας υποθέσουμε ότι στο Πανεπιστήμιο υπάρχουν 7 μαθήματα πρωϊνά και 5 μαθήματα απογευματινά. Πόσες επιλογές έχει ένας σπουδαστής για να πάρει 1 πρωϊνό και 1 απογευματινό μάθημα; Πόσες έχει ένας άλλος σπουδαστής που ενδιαφέρεται να πάρει ένα μόνο μάθημα (αδιαφορώντας για απόγευμα ή πρωί);

Λύση. Υπάρχουν $7 \times 5 = 35$ επιλογές για ένα σπουδαστή που θέλει να πάρει 1 πρωινό και 1 απογευματινό μάθημα. Ενώ για ένα σπουδαστή που θέλει να πάρει μόνο 1 μάθημα (αδιαφορώντας για απόγευμα ή πρωί) υπάρχουν $7+5$ επιλογές. □

Αν από μία συλλογή n αντικειμένων θέλουμε να επιλέξουμε r χωρίς να έχει σημασία η σειρά επιλογής, τότε ο αριθμός των τρόπων που είναι δυνατό να γίνει αυτό καλείται αριθμός των *συνδυασμών* r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα και συμβολίζεται με $C(n,r)$. Εναλλακτικά χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $\binom{n}{r}$ (προφέρεται: n ανά r ή r από n), αντί του $C(n,r)$.

Αν πάλι από μία συλλογή n αντικειμένων θέλουμε να επιλέξουμε r και να τα στοιχίσουμε το ένα κατόπιν του άλλου, τότε ο αριθμός των τρόπων που μπορεί να γίνει αυτό καλείται αριθμός των *διατάξεων* r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα και συμβολίζεται με $P(n,r)$.

Είναι σχετικά απλό να υπολογίσουμε το $P(n,r)$. Υπάρχουν n δυνατοί τρόποι να επιλεγεί το πρώτο από τα r αντικείμενα, $n-1$ τρόποι να επιλεγεί το δεύτερο, κ.ο.κ. έως το τελευταίο, για το οποίο υπάρχουν $n-r+1$ τρόποι να επιλεγεί. Επομένως ο συνολικός αριθμός των διατάξεων είναι:

$$P(n,r) = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{1.1}$$

Ένα άμεσο συμπέρασμα του τύπου (1.1) είναι ότι υπάρχουν $r!$ τρόποι να διατάξουμε r αντικείμενα, δηλαδή υπάρχουν $r!$ *αντιμεταθέσεις* r αντικειμένων.

Ας προχωρήσουμε τώρα και στον υπολογισμό του $C(n,r)$. Παρατηρούμε ότι $P(n,r) = P(r,r)\cdot C(n,r)$. Ο τύπος αυτός ισχύει διότι οι διατάξεις προκύπτουν από τους συνδυασμούς θεωρώντας για τον κάθε συνδυασμό τους διαφορετικούς τρόπους κατά τους οποίους μπορούν να αντιμετατεθούν τα αντικείμενά του. Με βάση τον τύπο (1.1) τώρα προκύπτει:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}. \tag{1.2}$$

Παράδειγμα 1.2: Με πόσους τρόπους μπορούν 3 εξετάσεις να προγραμματιστούν μέσα σε μια περίοδο 5 ημερών, έτσι ώστε να μην έχουμε δυο εξετάσεις την ίδια ημέρα;

Λύση. Επειδή πρόκειται για συγκεκριμένες εξετάσεις, είναι φανερό ότι έχει σημασία και η σειρά που θα γίνουν αυτές. Άρα η απάντηση είναι $P(5,3) = 60$. $\square$

Παράδειγμα 1.3: Με πόσους τρόπους ένας μάγειρας μπορεί να προγραμματίσει κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας 3 γεύματα με κρέας;

Λύση. Επειδή δεν καθορίζονται τα γεύματα κρέατος, η απάντηση είναι ο αριθμός των συνδυασμών 3 ημερών από τις 7, δηλαδή $C(7,3) = 35$. $\square$

1.2 Διωνυμικοί Συντελεστές

Είναι φανερό ότι το $(1+x)^n$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Για να βρούμε το συντελεστή του x^r στο πολυώνυμο αυτό αρκεί να βρούμε τον αριθμό των τρόπων να επιλέξουμε r από τους n όρους x που εμφανίζονται στο γινόμενο $(1+x)\dots(1+x)$ (n φορές).

Όπως είδαμε ο αριθμός αυτός είναι ο $C(n,r)$. Επομένως ο συντελεστής του x^r στο πολυώνυμο $(1+x)^n$ είναι ο $C(n,r)$. Για το λόγο αυτό οι αριθμοί $C(n,r)$ καλούνται διωνυμικοί συντελεστές. Ο τύπος

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)\, x^r \tag{1.3}$$

καλείται ανάπτυγμα του διωνύμου του Newton.

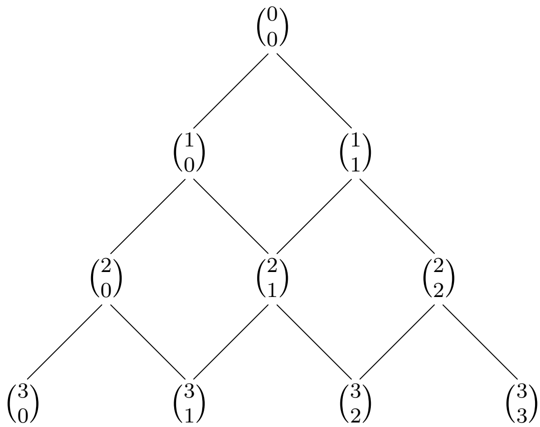
Θέτοντας $x = s/t$ στον τύπο (1.3) προκύπτει, μετά την εκτέλεση των πράξεων, ο τύπος

$$(s+t)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)\, s^r t^{n-r}. \tag{1.4}$$

Παράδειγμα 1.4: Να υπολογισθεί ο σταθερός όρος στο ανάπτυγμα του $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$.

Λύση. Σύμφωνα με τον (1.4) έχουμε:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{r=0}^{12} C(12,r)\left(x^2\right)^r \left(\frac{1}{x}\right)^{12-r} = \sum_{r=0}^{12} C(12,r)\, x^{3r-12}.$$



Σχήμα 1.1: Τρίγωνο του Pascal

Ο σταθερός όρος είναι ο συντελεστής του x^0. Άρα θέτουμε $3r - 12 = 0$, δηλαδή $r = 4$ και επομένως ο ζητούμενος συντελεστής είναι $C(12,4) = 495$. □

Από τον (1.2) προκύπτει αμέσως ότι

$$C(n,r) = C(n,n-r). \tag{1.5}$$

Επίσης μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αλγεβρικά ότι:

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1). \tag{1.6}$$

Για να αποδείξουμε τον (1.6) όχι αλγεβρικά, αλλά με συνδυαστικά επιχειρήματα σκεφτόμαστε ως εξής: για να επιλέξουμε r αντικείμενα από n, σταθεροποιούμε ένα αντικείμενο και στη συνέχεια είτε επιλέγουμε r αντικείμενα από τα υπόλοιπα $n-1$, είτε επιλέγουμε $r-1$ αντικείμενα από τα υπόλοιπα $n-1$ και παίρνουμε και αυτό που έχουμε σταθεροποιήσει.

Ο τύπος (1.6) οδηγεί στην κατάστρωση των πράξεων για τον υπολογισμό του $C(n,r)$ που είναι γνωστή ως τρίγωνο του Pascal. Στην κατάστρωση αυτή υπολογίζουμε τον αριθμό που αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του τριγώνου προσθέτοντας τους αριθμούς των δυο πλησιέστερων από τα πάνω κόμβων του τριγώνου (Σχ. 1.1). Οι ακραίοι κόμβοι παίρνουν όλοι την τιμή 1.

Τέλος μια άλλη χρήσιμη ιδιότητα των διωνυμικών συντελεστών είναι η εξής:

$$C\left(n,r\right)=\frac{n}{r}C\left(n-1,r-1\right). \tag{1.7}$$

Για να αποδείξουμε την (1.7) με συνδυαστικά επιχειρήματα σκεφτόμαστε ως εξής: για να επιλέξουμε r αντικείμενα, αρκεί να επιλέξουμε ένα και στη συνέχεια να επιλέξουμε $r-1$ από τα $n-1$. Υπάρχουν n τρόποι για την επιλογή του ενός και $C\left(n-1,r-1\right)$ τρόποι για την επιλογή των $r-1$. Κατ' αυτόν τον τρόπο όμως είναι σα να «μετράμε» και ποιο είναι το πρώτο από τα r επιλεγέντα αντικείμενα. Ο αριθμός όμως $C\left(n,r\right)$ δε μετρά διατάξεις. Άρα για να έχουμε το σωστό αποτέλεσμα αρκεί να διαιρέσουμε με r. Ασφαλώς, ο τύπος (1.7) μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αλγεβρικά με βάση τον (1.2).

Επίσης, επαναλαμβάνοντας τον (1.6), παίρνουμε εύκολα τον τύπο:

$$\binom{n+r+1}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k} \tag{1.8}$$

Τέλος από τον (1.8) μπορούμε να αποδείξουμε:

$$\binom{n+1}{r+1}=\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}. \tag{1.9}$$

Πράγματι, $\binom{n+1}{r+1}=\binom{n+1}{n-r}$ με βάση τον (1.5). Αλλά:

$$\binom{n+1}{n-r}=\binom{r+(n-r)+1}{n-r}=\sum_{k=0}^{n-r}\binom{r+k}{k}$$

με βάση τον (1.8).

Τώρα το ζητούμενο αποδεικνύεται παρατηρώντας ότι:

$$\sum_{k=0}^{n-r}\binom{r+k}{k}=\sum_{k=0}^{n-r}\binom{r+k}{r}=\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}.$$

Ο τύπος $C\left(n,r\right)=\frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}$ αποδείχθηκε με τον περιορισμό ότι τα n και r είναι φυσικοί αριθμοί και $n\geq r$ (σε αυτές τις περιπτώσεις έχει νόημα να μιλάμε για επιλογή r αντικειμένων από n). Είναι δυνατό όμως να ορίσουμε τους διωνυμικούς συντελεστές και για τις περιπτώσεις όπου το n είναι τυχόν πραγματικός. Θέτουμε λοιπόν:

$$C\left(n,r\right)=\frac{n\left(n-1\right)\ldots\left(n-r+1\right)}{r!},\ n\in\mathbb{R}\wedge r\in\mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Στο βιβλίο αυτό, δε θα δώσουμε ορισμό για το $C\left(n,r\right)$ όταν $r\notin\mathbb{N}$.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι $C\left(-1,r\right)=\left(-1\right)^{r}$ και $C\left(-2,r\right)=\left(-1\right)^{r}\left(r+1\right)$ (άσκηση!). Επίσης,

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{r}&=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}=\frac{\left(-1\right)^{r}\cdot2^{-r}\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot\left(2r-1\right)}{r!}\\&=\frac{\left(-1\right)^{r}\cdot2^{-r}\cdot2^{-r}\cdot\left(2r\right)!}{\left(r!\right)^{2}}=\frac{\left(-1\right)^{r}\cdot2^{-2r}\cdot\left(2r\right)!}{\left(r!\right)^{2}}\\&=\left(-1\right)^{r}\cdot2^{-2r}\cdot\binom{2r}{r}.\end{aligned}$$

Ακόμη, όταν $n<0$ ισχύει ότι (αποδείξτε το!):

$$\binom{n}{r}=\left(-1\right)^{r}\binom{r-n-1}{r},\ r\in\mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Στη Μαθηματική Ανάλυση αποδεικνύεται ότι αν $n\in\mathbb{R}$ και $|x|<1$, η σειρά $\sum\limits_{r=0}^{\infty}C\left(n,r\right)x^{r}$ συγκλίνει απολύτως στην $\left(1+x\right)^{n}$. Άρα έχουμε το γενικευμένο διωνυμικό τύπο:

$$\left(1+x\right)^{n}=\sum_{r=0}^{\infty}C\left(n,r\right)x^{r},\ n\in\mathbb{R}\ \&\ |x|<1. \tag{1.12}$$

Επίσης οι τύποι (1.5) – (1.8), καθώς και άλλοι αντίστοιχοι με αυτούς, ισχύουν και στην περίπτωση $n\in\mathbb{R}$. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα αν ερμηνεύσουμε τους τύπους αυτούς σαν ισότητες πολυωνύμων βαθμού r της μεταβλητής n, οι οποίες ισχύουν για τις άπειρες τιμές $n=r,r+1,\ldots$ Πράγματι, μία ισότητα πολυωνύμων βαθμού r που επαληθεύεται για $r+1$ ή περισσότερες (διαφορετικές) τιμές ισχύει για κάθε πραγματική τιμή.

Προτού κλείσουμε την παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τον τύπο του Stirling

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1 \tag{1.13}$$

όπου e η βάση των φυσικών λογαρίθμων. Πρέπει να σημειώσουμε ότι παρά το γεγονός ότι η διαφορά $\left|n!-\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right|$ αποκλίνει στο άπειρο, η έκφραση $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ είναι μια καλή προσέγγιση για το $n!$, ακόμη και για μικρές τιμές του n.

Ο Πίνακας 1.1 δείχνει τις 10 πιο βασικές ταυτότητες που ισχύουν στους διωνυμικούς συντελεστές. Αποδείξτε με συνδυαστικά επιχειρήματα όσες δεν έχουν ήδη αποδειχθεί.

1.3 Ομάδες Μη Διακεκριμένων Αντικειμένων

Έστω ότι έχουμε n αντικείμενα που αποτελούνται από t ομάδες με πληθυσμούς $q_1, q_2, \ldots, q_r$, αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι τα αντικείμενα κάθε ομάδας δεν είναι διακεκριμένα μεταξύ τους (σαν μπίλιες του ίδιου χρώματος). Τότε υπάρχουν

$$\frac{n!}{q_1!q_2!\ldots q_t!} \tag{1.14}$$

τρόποι να τα διατάξουμε. Πράγματι, $n!$ είναι όλοι οι τρόποι διάταξης αν τα αντικείμενα θεωρηθούν διακεκριμένα. Στην περίπτωση τώρα των ομάδων με μη διακεκριμένα στοιχεία πρέπει να διαιρέσουμε το $n!$ με τον αριθμό των διαφορετικών διατάξεων που δημιουργούνται εξ αιτίας της υποθέσεως ότι τα αντικείμενα δεν είναι διακεκριμένα. Ο αριθμός αυτός είναι $q_1!, q_2!, \ldots, q_r!$.

Παράδειγμα 1.5: Ποιο είναι το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων γραμμάτων που φτιάχνονται από τα γράμματα που περιέχονται στη έκφραση «μια πάπια μα ποια πάπια»;

Λύση. Παρατηρούμε ότι:

υπάρχουν	$q_1=2$	γράμματα	είδους	“μ”,
”	$q_2=4$	”	”	“ι” ,
”	$q_3=7$	”	”	“α”,
”	$q_4=5$	”	”	“π” ,
”	$q_5=1$	”	”	“ο”.

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$	ακέραιοι $n \geq r \geq 0$
$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	ακέραιοι $n \geq r \geq 0$
$\binom{n}{r} = \dfrac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$	ακέραιος $r > 0$, πραγματικός n
$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$	ακέραιος $r > 0$, πραγματικός n
$\binom{n}{r} = (-1)^r \binom{r-n-1}{r}$	ακέραιος $r \geq 0$, πραγματικός n
$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$	ακέραιοι $m \geq r \geq 0$, πραγματικός n
$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$	ακέραιος $n \geq 0$, πραγματικοί x, y
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$	πραγματικοί n, x, $\|x\| < 1$,
$\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}$	ακέραιοι $r, n \geq 0$,
$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r}$	ακέραιοι $r, n \geq 0$,
$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$	ακέραιος $r \geq 0$, πραγματικοί n, m

Πίνακας 1.1: Βασικές ταυτότητες των διωνυμικών συντελεστών

Άρα συνολικά υπάρχουν

$$\frac{19!}{2!4!7!5!1!} = 4.190.266.080$$

διατάξεις γραμμάτων. □

Παράδειγμα 1.6: Να αποδειχθεί ότι το $(k!)!$ διαιρείται ακριβώς από το $(k!)^{(k-1)!}$.

Λύση. Θεωρούμε $k!$ αντικείμενα και τα χωρίζουμε σε $(k-1)!$ ομάδες με k μη διακεκριμένα στοιχεία η κάθε μία. Το πλήθος των συνδυασμών των αντικειμένων αυτών είναι $\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$. Ο αριθμός όμως αυτός πρέπει να είναι ακέραιος. □

1.4 Συνδυασμοί και Διατάξεις με Επανάληψη

Υπάρχουν n^r διατάξεις r αντικειμένων από n αντικείμενα όταν επιτρέπονται επαναληπτικές εμφανίσεις των αντικειμένων. Πράγματι, έχουμε n επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, ομοίως n για το δεύτερο, κ.ο.κ. μέχρι το r-οστό αντικείμενο.

Παράδειγμα 1.7: Να υπολογιστεί πόσοι αριθμοί μεταξύ 1 και 10^{10} περιέχουν το ψηφίο 1.

Λύση. Επειδή τα διάφορα του 1 ψηφία είναι 9, με βάση την προηγούμενη παράγραφο οι αριθμοί μεταξύ 0 και 9.999.999.999 που δεν περιέχουν το ψηφίο 1 είναι 9^{10}. Άρα μεταξύ 1 και 10^{10} υπάρχουν $9^{10}-1$ αριθμοί που δεν περιέχουν το ψηφίο 1. Επομένως, στο ίδιο διάστημα, υπάρχουν $10^{10} - 9^{10} + 1$ αριθμοί που περιέχουν το ψηφίο 1. □

Περισσότερο ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση των συνδυασμών r αντικειμένων από n αντικείμενα με επανάληψη. Παρατηρήστε ότι διαιρώντας απλώς το n^r (που είναι ο αριθμός των συνδυασμών) με $r!$ δεν παίρνουμε τον αριθμό των διατάξεων και αυτό διότι επιτρέπεται ένας απροσδιόριστος αριθμός επαναλήψεων του ίδιου αντικειμένου.

Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των συνδυασμών με επανάληψη θεωρούμε ότι το σύνολο των αντικειμένων από όπου γίνεται η επιλογή του συνδυασμού είναι οι αριθμοί $\{1, \ldots, n\}$ και σκεφτόμαστε ως εξής: ένας συνδυασμός r αντικειμένων από n με επανάληψη είναι μία ακολουθία $x_1, \ldots, x_r$ όπου $1 \leq x_i \leq n$ και $x_i \leq x_j$ όταν $1 \leq i \leq j \leq r$. Η απεικόνιση όμως

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r) \to (x_1 + 0, x_2 + 1, \ldots, x_r + r - 1)$$

είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση από το σύνολο των μη φθίνουσων ακολουθιών με r όρους από το $\{1, \ldots, n\}$ στο σύνολο των γνησίως αυξουσών ακολουθιών με όρους από το $\{1, \ldots, n + r - 1\}$. Το σύνολο όμως των γνησίως αυξουσών ακολουθιών r όρων από το $\{1, \ldots, n + r - 1\}$ έχει πληθικό αριθμό ίσο με τον αριθμό των συνδυασμών χωρίς επανάληψη r αντικειμένων από $n + r - 1$ αντικείμενα. Συμπεραίνουμε λοιπόν τελικά ότι ο αριθμός των συνδυασμών r αντικειμένων από n αντικείμενα με επανάληψη είναι $C\,(n + r - 1, r)$.

Παράδειγμα 1.8: Πόσες ζαριές υπάρχουν στο τάβλι;

Λύση. Ο αριθμός των ζαριών στο τάβλι είναι ο συνδυασμός (επειδή δεν ενδιαφέρει η σειρά που πέφτουν τα ζάρια) 2 αντικειμένων από 6, δηλαδή

$$C\,(6 + 2 - 1, 2) = C\,(7, 2) = 21 \qquad \square$$

Παράδειγμα 1.9: Πόσες φορές θα εκτελεστεί η εντολή writeln στο πιο κάτω τμήμα ενός προγράμματος Pascal;

```
For i := 1 to 20 do
  For j := 1 to i do
    For k := 1 to j do
      writeln (i*j+k);
```

Λύση. Συμπεραίνουμε από τους συντακτικούς κανόνες της εντολής For ότι κάθε φορά που θα εκτελείται η εντολή writeln ισχύει η συνθήκη $1 \leq k \leq j \leq i \leq 20$. Ζητάμε λοιπόν να βρούμε τον αριθμό των τρόπων να συνδυάσουμε τα i, j, k, επιτρέποντας επαναλήψεις, με τιμές από $1, 2, \ldots, 20$.

Αυτός είναι $\binom{20+3-1}{3} = 1540$. Επομένως η εντολή writeln θα εκτελεστεί 1540 φορές. $\square$

1.5 Υποσύνολα

Υπάρχουν $2^n - 1$ τρόποι να επιλέξουμε ένα ή περισσότερα αντικείμενα από n αντικείμενα, χωρίς επανάληψη και χωρίς να «μετράει» η διάταξη. Πράγματι, υπάρχουν δύο επιλογές για το πρώτο αντικείμενο: να το διαλέξουμε ή όχι. Δύο επίσης επιλογές για το δεύτερο, κ.ο.κ. μέχρι το τελευταίο. Ο όρος -1 εμφανίζεται για να αποκλείσουμε την περίπτωση όπου κανένα αντικείμενο δεν επιλέγεται.

Επίσης, επειδή υπάρχουν $C\,(n, k)$ τρόποι για να επιλέξουμε k αντικείμενα από n, με βάση τα προηγούμενα καταλήγουμε στο ότι:

$$2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} C\,(n, k),$$

ή αλλιώς

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C\,(n, k). \tag{1.15}$$

Ο παραπάνω τύπος αποδεικνύεται εύκολα και αλλιώς: αν στον (1.3) θέσουμε $x = 1$.

Αν τώρα τα αντικείμενα αποτελούνται από t ομάδες, με μη διακεκριμένα στοιχεία η κάθε μία, οι οποίες αποτελούνται από $q_1, \ldots, q_t$ στοιχεία, αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των συνδυασμών ενός ή περισσότερων αντικειμένων ισούται με

$$(q_1 + 1)\,(q_2 + 1) \ldots (q_t + 1) - 1. \tag{1.16}$$

Πράγματι, υπάρχουν $q + 1$ τρόποι να διαλέξουμε αντικείμενα από την πρώτη ομάδα: να διαλέξουμε 1 ή 2 ή ... ή q_1 ή κανένα. Το επιχείρημα συνεχίζεται όπως και στον υπολογισμό του 2^n.

Παράδειγμα 1.10: Να βρεθεί ο αριθμός των διαιρετών του 180.

Λύση. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Προφανώς οι διαιρέτες σχηματίζονται από συνδυασμούς από τις εξής ομάδες:

$$\begin{array}{rc} \text{1η ομάδα :} & \{2,2\} \\ \text{2η ομάδα :} & \{3,3\} \\ \text{3η ομάδα :} & \{5\} \end{array}$$

Άρα ο αριθμός των διαιρετών είναι $(2+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 18$ (ο όρος -1 δεν εμφανίζεται διότι αντιστοιχεί στο συνδυασμό $2^0 3^0 5^0 = 1$ και το 1 είναι διαιρέτης του 180). □

1.6 Διανομές Αντικειμένων σε Υποδοχές

Ας υποθέσουμε ότι τοποθετούμε r διακεκριμένα αντικείμενα και n διακεκριμένες υποδοχές. Ο αριθμός των τρόπων να κατανείμουμε τα αντικείμενα στις υποδοχές είναι n^r. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι η τοποθέτηση του πρώτου αντικειμένου ισοδυναμεί με επιλογή της αντίστοιχης υποδοχής, βλέπουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των διατάξεων με επανάληψη r αντικειμένων από n, ο οποίος γνωρίζουμε ότι ισούται με n^r. Παρατηρήστε ότι στην παραπάνω αρίθμηση δε μετράει η σειρά με την οποία τα αντικείμενα εμφανίζονται στην κάθε υποδοχή.

Για να υπολογίσουμε τώρα τον αριθμό των διανομών όταν μετράει η σειρά τοποθέτησης των αντικειμένων σε κάθε υποδοχή σκεφτόμαστε τις n υποδοχές σαν n διαστήματα ανάμεσα σε $n+1$ διαδοχικά σημεία σε μια ευθεία όπου θα πρέπει να τοποθετηθούν τα r αντικείμενα. Το πρώτο από αυτά τα σημεία πρέπει πάντα να τοποθετηθεί στην αρχή και το τελευταίο στο τέλος. Άρα είναι τα υπόλοιπα $n-1$ σημεία που θα πρέπει να διαχωρίσουν τα r αντικείμενα τα οποία είναι διακεκριμένα. Τα $n-1$ σημεία που ορίζουν τις υποδοχές είναι μη διακεκριμένα, Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $n-1+r$ αντικείμενα που πρέπει να μετρήσουμε τις διατάξεις τους. Με βάση τον (1.14) ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} = (n+r-1)\,(n+r-2)\ldots n. \tag{1.17}$$

Υπάρχει και άλλος τρόπος να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα: Υπάρχουν n υποψήφιες υποδοχές για το πρώτο αντικείμενο. Ας φανταστούμε τώρα ότι η τοποθέτηση του πρώτου αντικειμένου διαιρεί την αντίστοιχη υποδοχή σε δυο διαφορετικά μεταξύ τους μέρη. Ο αριθμός των υποψήφιων υποδοχών για το δεύτερο αντικείμενο αυξάνεται έτσι σε $n+1$. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο μέχρι το r-οστό αντικείμενο για το οποίο υπάρχουν $n+r-1$ υποψήφιες υποδοχές.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου τα r αντικείμενα είναι μη διακεκριμένα. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να υπολογίσουμε τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης των αντικειμένων σε n υποδοχές. Ο πιο απλός είναι να διαιρέσουμε τον τύπο που δίνει τον αριθμό των διανομών για r διακεκριμένα αντικείμενα με $r!$. Έτσι παίρνουμε τον αριθμό

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = \binom{n+r-1}{r}. \tag{1.18}$$

Ένας άλλος τρόπος για να καταλήξουμε στον ίδιο τύπο είναι να μιμηθούμε την πρώτη απόδειξη που δώσαμε για την περίπτωση των r διακεκριμένων αντικειμένων, με την επιπλέον παρατήρηση ότι τώρα όχι μόνον τα $n-1$ σημεία που ορίζουν τις υποδοχές είναι μια ομάδα από μη διακεκριμένα αντικείμενα, αλλά επίσης και τα r αντικείμενα προς τοποθέτηση είναι μη διακεκριμένα. Χρησιμοποιώντας τον (1.14) έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} \tag{1.19}$$

Τέλος, ένας ακόμη τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών με επανάληψη r αντικειμένων από n αντικείμενα (δηλαδή τις υποδοχές).

Παράδειγμα 1.11: Να υπολογιστεί ο αριθμός των τρόπων που r μη διακεκριμένα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n υποδοχές, με τον περιορισμό ότι όλες οι υποδοχές θα δεχθούν τουλάχιστον ένα αντικείμενο $(r \geq n \geq 1)$. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός αν απαιτήσουμε ακριβώς μία υποδοχή να είναι κενή $(r \geq n-1 \geq 1)$;

Λύση. Πρώτα τοποθετούμε ένα αντικείμενο σε κάθε υποδοχή και μας μένουν $r-n$ αντικείμενα. Ο αριθμός των τρόπων να διανεμηθούν αυτά στις υποδοχές είναι

$$\binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$$

Άρα $C\,(r-1, n-1)$ είναι ο αριθμός των τρόπων να διανείμουμε τα αντικείμενα χωρίς να αφήσουμε κενή υποδοχή.

Για την περίπτωση τώρα της ακριβώς μίας άδειας υποδοχής, αρκεί να επιλέξουμε την άδεια υποδοχή και να κατανείμουμε τα αντικείμενα στις εναπομένουσες $n-1$ υποδοχές, φροντίζοντας αυτές όλες να δεχθούν τουλάχιστον ένα αντικείμενο. Άρα η απάντηση για την περίπτωση της ακριβώς μίας κενής υποδοχής είναι $nC(r-1, n-2)$. $\square$

Παραδοχές	Αριθμός τρόπων (με δυνατότητα κενών υποδοχών)
n διακεκριμένες υποδοχές r διακεκριμένα αντικείμενα δε μετράει η σειρά στις υποδοχές	n^r
n διακεκριμένες υποδοχές r διακεκριμένα αντικείμενα μετράει η σειρά στις υποδοχές	$\dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$
n διακεκριμένες υποδοχές μη διακεκριμένα αντικείμενα	$\dbinom{n+r-1}{r}$

Πίνακας 1.2: Τυπολόγιο για τη διανομή αντικειμένων σε υποδοχές

Ο Πίνακας 1.2 δείχνει όλους τους τύπους για τις διανομές αντικειμένων σε υποδοχές κάτω από διαφορετικές παραδοχές.

1.7 Ασκήσεις

1.1 Κατά πόσους τρόπους 3 αριθμοί μπορούν να επιλεγούν από τους αριθμούς 1–300 έτσι ώστε το άθροισμα τους να είναι διαιρετό με το 3 (δεν ενδιαφέρει η σειρά των αριθμών);

1.2 Να βρεθεί ο αριθμός των τετραψήφιων αριθμών του δεκαδικού συστήματος που δεν έχουν δύο ίδια ψηφία.

1.3 Με πόσους τρόπους μπορούν να βαφούν 12 γραφεία έτσι ώστε 3 από αυτά να είναι κόκκινα, 2 ροζ, 2 λευκά και τα υπόλοιπα πράσινα;

1.4 Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 1400;

1.5 Από ένα μεγάλο αριθμό από κέρματα (από μονόλεπτα έως νομίσματα των δύο ευρώ), με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 6 κέρματα;

1.6 Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $\frac{(3n)!}{(2^n 3^n)}$ και $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι ακέραιοι.

1.7 Να υπολογισθεί ο συντελεστής του x^{23} στο $\left(1+x^5+x^9\right)^{100}$.

1.8 Κατά πόσους τρόπους μπορούν r όμοιες μπάλες να τοποθετηθούν σε n διακεκριμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον 9 μπάλες;

1.9 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε $2t+1$ μη διακεκριμένες μπάλες σε 3 διακεκριμένα κουτιά έτσι ώστε κάθε 2 κουτιά μαζί να περιέχουν περισσότερες μπάλες από ότι το άλλο ένα.

1.10 Μεταξύ $2n$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων από αυτά τα $2n$ αντικείμενα.

1.11 Μεταξύ $3n+1$ αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων από αυτά τα $3n+1$ αντικείμενα.

1.12 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που r διακεκριμένες σημαίες μπορούν να τοποθετηθούν σε n διακεκριμένους ιστούς, δεδομένου ότι έχει σημασία η σειρά με την οποία οι σημαίες εμφανίζονται στους ιστούς και δεδομένου ότι κανένας ιστός δεν πρέπει να μείνει κενός $(r \geq n)$.

1.13 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που r διακεκριμένα αυτοκίνητα μπορούν να περάσουν από n διακεκριμένους σταθμούς διοδίων, δεδομένου ότι μία το πολύ διαδρομή επιτρέπεται να μη δεχθεί αυτοκίνητο ($r \geq n-1$ και $n \geq 2$).

1.14 Να υπολογισθεί το άθροισμα $1^2+2^2+\ldots+n^2$.

1.15 Να αποδειχθεί ότι

(α) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C(r,k)=(-1)^n C(r-1,n)$

(β) $C(r,m)\,C(m,k)=C(r,k)\,C(r-k,m-k)$

(γ) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C(r,k)\,C(s,n-k)=C(r+s,n)$

Κεφάλαιο 2

Γεννήτριες Συναρτήσεις

2.1 Εισαγωγή

Έστω $a_0, a_1, \ldots$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Στόχος μας είναι να «κωδικοποιήσουμε» την ακολουθία με μία μόνο συνάρτηση κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε εύκολα να αναπαραγάγουμε την ακολουθία από τη συνάρτηση που την κωδικοποιεί. Ένας τρόπος που επιτυγχάνεται αυτό είναι μέσω ενός μετασχηματισμού ο οποίος αντιστοιχίζει στην ακολουθία μία δυναμοσειρά (δηλαδή σειρά δυνάμεων της μεταβλητής x) σύμφωνα με τον τύπο:

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r.$$

Η δυναμοσειρά, η οποία ορίζει προφανώς μία συνάρτηση μίας μεταβλητής στο πεδίο σύγκλισής της, καλείται συνήθως γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας. Θα αποφύγουμε να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες σχετικά με τη σύγκλιση των δυναμοσειρών, επειδή είναι γνωστό ότι συγκλίνουν με «ισχυρό» τρόπο σε κάποιο διάστημα με κέντρο το 0. Το διάστημα αυτό είναι δυνατό να είναι κενό (δηλαδή να έχει μήκος 0), αλλά στις εφαρμογές που θα εξετάσουμε αυτό δε συμβαίνει. Παραθέτουμε παρακάτω πολύ συνοπτικά τις βασικές ιδιότητες σύγκλισης των δυναμοσειρών, οι οποίες μας επιτρέπουν να τις χειριζόμαστε σαν να επρόκειτο για πεπερασμένα αθροίσματα (υπάρχει πληθώρα σχετικών βιβλίων για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται να μάθει περισσότερα για τη θεμελίωση των δυναμοσειρών). Συγκεκριμένα:

α. Αν μια δυναμοσειρά

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

συγκλίνει για μια τιμή του $x = x_0$, τότε συγκλίνει για κάθε x με $|x| < |x_0|$. Καλούμε *ακτίνα σύγκλισης* R της δυναμοσειράς τον αριθμό

$$\sup \left\{ |x| : \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \text{ συγκλίνει} \right\}.$$

Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x με $|x| < R$ (η τιμή του R μπορεί να είναι $+\infty$ ή 0).

Η ακτίνα σύγκλισης υπολογίζεται με έναν από τους τύπους:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[r]{|a_r|}$$

ή

$$\frac{1}{R} = \limsup \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} \right|.$$

Η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $\{x : |x| \leq r\}$, όπου $r < R$.

β. Στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης της δυναμοσειράς (δηλαδή, του διαστήματος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα την ακτίνα σύγκλισης), η συνάρτηση

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

είναι άπειρα παραγωγίσιμη και οι παράγωγοί της υπολογίζονται παραγωγίζοντας τυπικά τη σειρά ως πεπερασμένο άθροισμα, δηλαδή:

$$A'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} r a_r x^{r-1}. \tag{2.1}$$

Οι ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών που λαμβάνονται με την παραγώγιση παραμένουν όλες ίσες με την ακτίνα σύγκλισης της αρχικής δυναμοσειράς.

γ. Για κάθε διάστημα $[0, x]$ που περιέχεται στο διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς, η συνάρτηση A είναι ολοκληρώσιμη και η τιμή του ολοκληρώματός της υπολογίζεται ολοκληρώνοντας τυπικά τη σειρά ως πεπερασμένο άθροισμα, δηλαδή:

$$\int_0^x \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r \right) dt = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{r-1}}{r} x^r. \tag{2.2}$$

Η ακτίνα σύγκλισης της νέας δυναμοσειράς παραμένει αμετάβλητη.

Συμπερασματικά, είναι ασφαλές να χειριζόμαστε τις δυναμοσειρές ως πεπερασμένα αθροίσματα.

Η σημαντικότερη όμως ιδιότητα των δυναμοσειρών είναι ότι οι συντελεστές a_r της A μπορούν να υπολογιστούν από τον τύπο

$$a_r = \frac{1}{r!} A^{(r)}(0). \tag{2.3}$$

όπου $A^{(r)}$ είναι η r-οστή παράγωγος της A.

Ο παραπάνω τύπος δικαιολογεί τη θεώρηση μιας γεννήτριας συνάρτησης ως κωδικοποίηση της αντίστοιχης ακολουθίας.

2.2 Ιδιότητες των Γεννητριών Συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε ιδιότητες οι οποίες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση μίας δεδομένης ακολουθίας και αντίστροφα, δεδομένης μιας γεννήτριας συνάρτησης να βρίσκουμε την αντίστοιχη ακολουθία.

1. Γραμμική ιδιότητα

Αν k, l είναι σταθερές και

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r,$$

$$B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r,$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$d_r = ka_r + lb_r$$

είναι η

$$D(x) = kA(x) + lB(x).$$

Η απόδειξη της ιδιότητας είναι εύκολη.

2. Ιδιότητα της κλίμακας

Αν $A(x)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, a_2, \ldots$ τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$b_r = \lambda^r a_r$$

είναι η

$$A(\lambda x).$$

Η απόδειξη και αυτής της ιδιότητας είναι εύκολη.

3. Ιδιότητα της ολίσθησης

Αν $A(x)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, a_2, \ldots$ τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$\begin{aligned} b_r &= 0, \text{για } r = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ και} \\ b_r &= a_{r-n}, \text{για } r = n, n+1, \ldots \end{aligned}$$

είναι η

$$x^n A(x).$$

Όμοια, η ακολουθία που ορίζεται ως

$$d_r = a_{r+n}, r = 0, 1, 2, \ldots$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση την

$$\frac{A(x) - \sum\limits_{r=0}^{n-1} a_r x^r}{x^n}.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το πρώτο μέρος της ιδιότητας (το δεύτερο μέρος επαφίεται ως άσκηση). Είναι

$$B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r \Rightarrow$$
$$B(x) = \sum_{r=0}^{n-1} b_r x^r + \sum_{r=n}^{\infty} b_r x^r \Rightarrow$$
$$B(x) = 0 + \sum_{r=n}^{\infty} a_{r-n} x^r.$$

Θέτω $r - n = k$, οπότε:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n+k} \Rightarrow$$
$$B(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Rightarrow$$
$$B(x) = x^n A(x).$$

4. Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων

Εάν

$$b_k = \sum_{r=0}^{k} a_r, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_k, αν η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_r είναι $A(x)$, είναι

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

Θα αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα. Παρατηρούμε ότι:

$$a_k = b_k - b_{k-1} \Rightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-1} x^k.$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης έχουμε:

$$A\left(x\right)=B\left(x\right)-xB\left(x\right).$$

Άρα

$$B\left(x\right)=\frac{A\left(x\right)}{1-x}$$

5. Ιδιότητα συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων

Αν η ακτίνα σύγκλισης της γεννήτριας συνάρτησης $A(x)$ είναι μεγαλύτερη της μονάδας και ορίσουμε

$$b_k=\sum_{r=k}^{\infty}a_r,\ \ k=0,1,2,\ldots,$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_k είναι

$$B\left(x\right)=\frac{A\left(1\right)-xA\left(x\right)}{1-x}.$$

Για να αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
b_k&=\sum_{r=0}^{\infty}a_r-\sum_{r=0}^{k-1}a_r\Rightarrow\\
b_k&=A\left(1\right)-\sum_{r=0}^{k-1}a_r\Rightarrow\\
\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k&=\sum_{k=0}^{\infty}A\left(1\right)x^k-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{k-1}a_r\right)x^k\Rightarrow
\end{aligned}$$

(σύμφωνα με τις ιδιότητες της ολίσθησης και των μερικών αθροισμάτων)

$$B\left(x\right)=\frac{A\left(1\right)-xA\left(x\right)}{1-x}.$$

6. Ιδιότητες της παραγώγου και του ολοκληρώματος

Η ακολουθία $b_r = ra_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots$ έχει γεννήτρια συνάρτηση:

$$B(x) = xA'(x),$$

ενώ η ακολουθία $d_r = \frac{a_r}{r+1}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση:

$$D(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\,dt.$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύονται εύκολα από τους τύπους (2.1,2.2).

7. Ιδιότητα της συνέλιξης

Η ακολουθία

$$d_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

που καλείται συνέλιξη των ακολουθιών a_r, b_r (συμβολισμός $d_r = a_r * b_r$) έχει γεννήτρια συνάρτηση

$$D(x) = A(x)\,B(x)$$

όπου $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_r και $B(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_r.

Θα αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} A(x)\,B(x) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\right) = \\ &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\,x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\,x^2 + \ldots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k. \end{aligned}$$

Άρα $A(x)\,B(x) = D(x)$.

Οι παραπάνω ιδιότητες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό αθροισμάτων τα οποία είναι δύσκολο να υπολογισθούν με άλλες μεθόδους.

Παράδειγμα 2.1: Να υπολογιστεί το

$$\sum_{i=1}^{t} \binom{n-i}{j}.$$

Λύση. Θέτουμε

$$a_{ij} = \binom{n-i}{j}.$$

Για κάθε σταθερά τιμή του i, θεωρούμε το a_{ij} ως ακολουθία με δείκτη το j. Η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση είναι:

$$A_i(x) = (1+x)^{n-i}.$$

Εμάς όμως μας ενδιαφέρει η ακολουθία b_j η οποία ορίζεται ως εξής:

$$b_j = \sum_{i=1}^{t} a_{ij}.$$

Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_j είναι

$$B(x) = \sum_{i=1}^{t} A_i(x) = \sum_{i=1}^{t} (1+x)^{n-i} = (1+x)^n \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{(1+x)^i}.$$

Ο όρος $\sum\limits_{i=1}^{t} \left(\frac{1}{1+x}\right)^i$ είναι το άθροισμα γεωμετρικής προόδου. Άρα είναι ίσος με

$$\frac{1-(1+x)^{-t}}{x}.$$

Τελικά:

$$B(x) = \frac{(1+x)^n}{x} - \frac{(1+x)^{n-t}}{x}$$

Παρατηρούμε από τον Πίνακα 2.1 ότι η ακολουθία $a_r = \binom{n}{r}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση $(1+x)^n$. Άρα η ακολουθία $\binom{n}{r+1}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση $\frac{(1+x)^n-1}{x}$ (ιδιότητα ολίσθησης). Όμοια η συνάρτηση $\frac{(1+x)^{n-t}-1}{x}$ είναι γεννήτρια της ακολουθίας $\binom{n-t}{r+1}$. Εδώ είναι $r=j$. Άρα:

$$b_j = \sum_{i=1}^{t} \binom{n-i}{j} = \binom{n}{j+1} - \binom{n-t}{j+1}. \qquad \square$$

Ακολουθία $a_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots$	Γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$
$a_r = 1$	$\dfrac{1}{1-x}$
$a_r = r + 1$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$
$a_0 = 0$ $a_r = \frac{1}{r},\ r > 0$	$\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$
$a_0 = 0$ $a_r = -\frac{1}{r},\ r > 0$ και ζυγός $a_r = \frac{1}{r},\ r$ μονός	$\ln(1+x)$
$a_r = \dbinom{n}{r},\ n \in \mathbb{R}$	$(1+x)^n$
$a_r = \dfrac{1}{r!}$	e^x
$a_r = \dfrac{n^r}{r!},\ n \in \mathbb{R}$	e^{nx}
$a_r - a_{r-1}$	$(1-x)\,A(x)$

Πίνακας 2.1: Γεννήτριες συναρτήσεις και ακολουθίες

Στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις μπορέσαμε και υπολογίσαμε ένα άθροισμα, το οποίο είναι αρκετά δύσκολο να υπολογιστεί διαφορετικά. Στην παράγραφο 2.3 θα δούμε πώς χρησιμοποιούνται οι γεννήτριες συναρτήσεις σε συνδυαστικά προβλήματα. Στο Κεφάλαιο 3 θα χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις για να λύσουμε σχέσεις αναδρομής.

Η γενική ιδέα πάντως που ακολουθείται σε πολλές περιπτώσεις όπου θέλουμε να αποδείξουμε ιδιότητες «διακριτού» χαρακτήρα που αναφέρονται σε μία ακολουθία είναι να θεωρήσουμε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας και να βρούμε κάποια «αναλυτική» ή «συνεχή» ιδιότητα της τελευταίας που αποτελεί «μετάφραση» της αρχικής «διακριτής» ιδιότητας. Η αναλυτική ιδιότητα συνήθως αποδεικνύεται ευκολότερα από τη διακριτή. Αφού την αποδείξουμε, επιστρέφουμε στην αρχική ακολουθία. Η μετάβαση από το χώρο των ακολουθιών στο χώρο των γεννητριών συναρτήσεων και η επιστροφή γίνεται με χρήση του Πίνακα 2.1. Πολλές φορές όμως, όπως δείχνουν και τα παρακάτω παραδείγματα, η «ανταλλαγή» ακολουθιών με γεννήτριες συναρτήσεις δεν είναι εντελώς άμεση.

Παράδειγμα 2.2: Να δειχτεί ότι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = \binom{2r}{r},\ r = 0, 1, 2, \ldots$ είναι η $A(x) = (1-4x)^{1/2}$.

Λύση. Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} x^r \Rightarrow \\
(1-4x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-4x)^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4^r\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{2r-1}{2}\right)}{r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2r-1)\right)}{r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r r!\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2r-1)\right)}{r!r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left(2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2r\right)\left(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2r-1)\right)}{r!r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r)!}{r!r!} x^r \\
&= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή,

$$(1-4x)^{-1/2} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r.$$

Άρα η ακολουθία $a_r = \binom{2r}{r},\ r = 0, 1, 2, \ldots, r$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A\left(x\right) = \left(1-4x\right)^{1/2}$ $\square$

Πριν το επόμενο παράδειγμα κρίνουμε σκόπιμο να υπενθυμίσουμε συνοπτικά την τεχνική της *μερικής κλασματικής ανάλυσης*. Στόχος της τεχνικής αυτής είναι να γραφεί μία ρητή συνάρτηση $F(x)$, δηλαδή μία συνάρτηση που γράφεται ως πηλίκον $P(x)/Q(x)$ δύο πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$, ως άθροισμα κλασμάτων απλούστερης μορφής.

Δεχόμαστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι γνησίως μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου $Q(x)$ (αλλιώς διαιρούμε τα πολυώνυμα). Ακόμη, για να αποφύγουμε το δύσχρηστο συμβολισμό της γενικής περίπτωσης, θα θεωρήσουμε μία ειδική περίπτωση για το πολυώνυμο $Q(x)$. Μελετώντας την ειδική αυτή περίπτωση ο αναγνώστης θα μπορεί εύκολα να αντιμετωπίσει οποιαδήποτε περίπτωση (περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να βρει ο αναγνώστης σε οποιοδήποτε βιβλίο Απειροστικού Λογισμού ή εισαγωγικής Ανάλυσης).

Έστω λοιπόν ότι το $Q(x)$ έχει μία πραγματική ρίζα x_1 πολλαπλότητας 1, μία πραγματική ρίζα x_2 πολλαπλότητας 3 και τις δύο συζυγείς φανταστικές ρίζες $\pm i$ την κάθε μία με πολλαπλότητα 2. Επομένως ο βαθμός του $Q(x)$ είναι 8 και ο βαθμός του $P(x)$ —σύμφωνα με την υπόθεση μας— είναι το πολύ 7. Επίσης ισχύει ότι:

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)^3(x^2 + 1)^2.$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι γενικά δεν είναι εύκολο, και πολλές φορές είναι αδύνατο, να βρούμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου όταν δεν τις γνωρίζουμε. Η συνηθέστερη τακτική για τον υπολογισμό τους είναι να προσπαθήσουμε να αναλύσουμε το πολυώνυμο σε γινόμενο παραγόντων (όταν ο βαθμός του είναι μεγαλύτερος του 2).

Θα γράψουμε τη συνάρτηση $F(x) = P(x)/Q(x)$ ως:

$$\begin{aligned} F(x) = & \frac{A}{(x-x_1)} \\ & + \frac{B}{(x-x_2)^3} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \frac{D}{(x-x_2)} \\ & + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

και θα υπολογίσουμε τους συντελεστές A, B, C, D, E, F, G, H.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή A, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.4) με $(x - x_1)$, διαγράφουμε τον παράγοντα $(x - x_1)$ απ' όπου είναι δυνατό να διαγραφεί και θέτουμε $x = x_1$. Τελικά προκύπτει ότι:

$$A = F(x)(x-x_1)\big|_{x=x_1} = \frac{P(x_1)}{(x_1-x_2)^3(x_1^2+1)^2}.$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή B, επιστρέφουμε στην εξίσωση (2.4), πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με $(x - x_2)^3$, διαγράφουμε τον παράγοντα $(x - x_2)$ απ' όπου είναι δυνατό να διαγραφεί και θέτουμε $x = x_2$. Τελικά προκύπτει ότι:

$$B = F(x)(x-x_2)^3\big|_{x=x_2} = \frac{P(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2^2+1)^2}.$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή C, *πριν θέσουμε $x = x_2$, παραγωγίζουμε πρώτα και τα δύο μέλη της εξίσωσης* και θέτουμε στη συνέχεια $x = x_2$. Τελικά προκύπτει ότι:

$$C = \left.\frac{d\left(F(x)(x-x_2)^3\right)}{dx}\right|_{x=x_2} = \left.\left(\frac{P(x)}{(x-x_1)(x^2+1)^2}\right)'\right|_{x=x_2}.$$

Ο υπολογισμός του συντελεστή D γίνεται παραγωγίζοντας δύο φορές πρίν θέσουμε $x = x_2$.

Για τον υπολογισμό των συντελεστών F, G, επιστρέφουμε στη εξίσωση (2.4), πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με $(x^2 + 1)$, διαγράφουμε τον παράγοντα $(x^2 + 1)^2$ απ' όπου είναι δυνατό να διαγραφεί και θέτουμε $x = i$. Εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της εξίσωσης που προκύπτει, παίρνουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές F, G, το οποίο επιλύουμε.

Τέλος για τον υπολογισμό των συντελεστών H, D, πριν θέσουμε $x = i$, παραγωγίζουμε δύο φορές.

Παράδειγμα 2.3: Ποια ακολουθία έχει γεννήτρια συνάρτηση την

$$F(x) = \frac{4x^2(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2};$$

Λύση. Είναι

$$F(x) = 4x^2\left(\frac{(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}\right).$$

Παρατηρήστε ότι αρκεί βρούμε πρώτα τη γεννήτρια συνάρτηση του παράγοντα $G(x) = (1-8x)/((1-4x)(1-2x)^2)$. Ο παρονομαστής έχει δύο ρίζες, τη $x_1 = 1/4$ πολλαπλότητας 1 και την $x_2 = 1/2$, πολλαπλότητας 2. Επομένως θέτουμε:

$$G(x) = \frac{A}{(1-4x)} + \frac{B}{(1-2x)^2} + \frac{C}{(1-2x)}.$$

Παρατηρήστε ότι για να αποφύγουμε πολύπλοκες κλασματικές εκφράσεις, γράψαμε τους παρονομαστές των απλών κλασμάτων λίγο διαφορετικά σε σύγκριση με την περίπτωση που αναλύσαμε προηγούμενα. Έχουμε τώρα:

$$A = (1-4x)\left.\frac{(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}\right|_{x=1/4} = \ldots = -4,$$

$$B = (1-2x)^2\left.\frac{(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}\right|_{x=1/2} = \ldots = 3,$$

$$C = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left.\left[(1-2x)^2\left(\frac{(1-8x)}{(1-4x)(1-2x)^2}\right)\right]\right|_{x=12} = \ldots = 2.$$

Επομένως

$$G(x) = \frac{-4}{(1-4x)} + \frac{3}{(1-2x)^2} + \frac{2}{(1-2x)}.$$

Προκύπτει τώρα ότι η ακολουθία που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $G(x)$ είναι η:

$$a_r = -4 \cdot 4^r + 3\,(r+1)\,2^r + 2 \cdot 2^r,\ r = 0, 1, 2, \ldots$$

Άρα η $F(x) = 4x^2 G(x)$ είναι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $4a_{r-2}$. Επομένως η ζητούμενη ακολουθία είναι η

$$a_r = \begin{cases} 0,\ r < 2 \\ (3r-1)\,2^r - 4^r,\ r = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$ □

Παράδειγμα 2.4: Να βρεθεί κλειστός τύπος για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = r^2,\ r = 0, 1, 2, \ldots$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + r^2$.

Λύση. Είναι γνωστό ότι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέρη της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + rx^{r-1} + \ldots$$

Πολλαπλασιάζοντας επί x προκύπτει:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + rx^r + \ldots,$$

Παραγωγίζοντας ξανά:

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = 1^2 + 2^2x + 3^3x^2 + 4^2x^3 + \ldots + r^2x^{r-1} + \ldots,$$

και τέλος πολλαπλασιάζοντας πάλι επί x:

$$x\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = 0^2 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + r^2x^r + \ldots$$

Δηλαδή η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = r^2,\ r = 0, 1, 2, \ldots$ είναι η:

$$f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Από την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων έχουμε ότι η

$$g(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3(1-x)} = \frac{f(x)}{(1-x)}$$

είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$0^2, 0^2+1^2, 0^2+1^2+2^2, 0^2+1^2+2^2+3^2, \ldots, 0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+r^2, \ldots$$

Σύμφωνα με το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε ότι ο συντελεστής του x^r στο $\frac{1}{(1-x)^4}$ είναι

$$\begin{aligned}\frac{(-4)(-4-1)(-4-2)\ldots(-4-r+1)}{r!}(-1)^r &= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (r+3)}{r!} \\ &= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.\end{aligned}$$

Επομένως ο συντελεστής του x^r στην έκφραση $\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$ είναι

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(r-1)r(r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}.$$

Επομένως

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}.$$ □

2.3 Απαριθμητές

Αν οι όροι μιας ακολουθίας $a_r,\ r = 0, 1, 2, \ldots$ δίνουν το πλήθος ενός συνόλου συνδυαστικών αντικειμένων που εξαρτάται από την παράμετρο r, τότε η γεννήτρια συνάρτηση

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

καλείται απαριθμητής του συνόλου. Για παράδειγμα, η γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

είναι ο απαριθμητής των συνδυασμών (χωρίς επανάληψη) r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα (στο παράδειγμα αυτό το σύνολο των συνδυαστικών αντικειμένων παραμετροποιείται από το r, ενώ το n θεωρείται ως σταθερά).

Οι απαριθμητές χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουμε το πλήθος συνόλων αντικειμένων που δίνονται με συνδυαστική περιγραφή και εξαρτώνται από μία παράμετρο. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου αυτής, βρίσκουμε πρώτα έναν κλειστό (δηλ. συμπτηγμένο) τύπο για τον απαριθμητή «μεταφράζοντας» τη συνδυαστική περιγραφή του συνόλου σε αλγεβρικές πράξεις. Στη συνέχεια γράφουμε τον απαριθμητή σε μορφή δυναμοσειράς. Οι συντελεστές της δυναμοσειράς μας δίνουν το πλήθος των αντικειμένων του συνόλου, για κάθε τιμή της παραμέτρου.

Παράδειγμα 2.5: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των επιλογών r αντικειμένων (χωρίς επανάληψη) από n αντικείμενα.

Λύση. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε αν σκεφτούμε τον τρόπο που πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμα ότι ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι ο συντελεστής του x^r στη συνάρτηση $(1+x)^n$. Αναπτύσσοντας τώρα το $(1+x)^n$ σε δυναμοσειρά (χρησιμοποιώντας το διωνυμικό τύπο) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}. \qquad \square$$

Ας εξετάσουμε τώρα τι θα γίνει αν επιτρέψουμε επανάληψη των αντικειμένων. Έστω ότι έχουμε μόνο τρία αντικείμενα και θέλουμε να βρούμε τους δυνατούς τρόπους να κατασκευάσουμε συνδυασμούς από αυτά με τον περιορισμό ότι i-οστό αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί στο συνδυασμό έως m_i φορές, όπου $m_i, i = 1,2,3$ δεδομένοι φυσικοί αριθμοί. Παρατηρώντας πάλι πώς πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του x^r στο ανάπτυγμα του πολυωνύμου

$$\left(1+x+x^2+\ldots+x^{m_1}\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{m_2}\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{m_3}\right).$$

Αν τώρα επιτρέπουμε απεριόριστη επανάληψη των αντικειμένων, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του x^r στο:

$$\left(1 + x + x^2 + \ldots\right)^3 .$$

Επειδή όμως

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \ (\text{για } \ |x| < 1)\,,$$

ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του x^r στο:

$$(1-x)^{-3} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-3}{r} x^r.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$(-1)^r \binom{-3}{r} = \binom{r+2}{r}$$

Είναι πλέον τετριμμένο να αποδείξουμε ότι αν έχουμε n αντικείμενα και θέλουμε να επιλέξουμε r από αυτά με επανάληψη, υπάρχουν

$$\binom{n+r-1}{r}$$

τρόποι να το κάνουμε. Με άλλα λόγια, υπάρχουν

$$\binom{n+r-1}{r}$$

τοποθετήσεις r μη διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές.

Στα ίδια συμπεράσματα είχαμε καταλήξει με διαφορετικούς τρόπους και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τώρα όμως έχουμε στα χέρια μας ένα ισχυρό εργαλείο που μας επιτρέπει να λύσουμε δυσκολότερα προβλήματα.

Παράδειγμα 2.6: Έστω ότι έχουμε τον περιορισμό ότι όλες οι υποδοχές πρέπει να έχουν ένα τουλάχιστον αντικείμενο.

Λύση. Είναι τώρα εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο απαριθμητής είναι

$$\left(x+x^2+\ldots\right)^n = \frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-n}{r} x^r.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$(-1)^r \binom{-n}{r-n} = \binom{r-1}{r-n}. \qquad \square$$

Παράδειγμα 2.7: Ποιο είναι το πλήθος των συνδυασμών r αντικειμένων από n αντικείμενα, με επανάληψη αλλά με τον περιορισμό ότι κάθε αντικείμενο πρέπει να εμφανιστεί άρτιο αριθμό φορών; Σημειώστε ότι το πιο πάνω πρόβλημα είναι το ίδιο με το εξής: «Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που r μη διακεκριμένα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε n υποδοχές διακεκριμένες, με τον περιορισμό ότι κάθε υποδοχή θα δεχτεί άρτιο αριθμό αντικειμένων».

Λύση. Η γεννήτρια συνάρτηση/απαριθμητής είναι

$$\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)^n.$$

Είναι γνωστό ότι

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+\ldots$$

Επομένως:

$$\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)^n = \left(1-x^2\right)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^{2r}.$$

Άρα, όπως αναμένεται, η απάντηση είναι $\binom{n+r/2-1}{r/2}$. $\square$

Σημειώστε ότι

$$\left(1-x^2\right)^{-n} = (1-x)^{-n}\,(1+x)^{-n}.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις και την ιδιότητα της συνέλιξης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η έκφραση:

$$\binom{n+r-1}{r} - \binom{n+r-2}{r-1}n + \binom{n+r-3}{r-2}\binom{n+1}{2} - \dots$$
$$+ (-1)^k \binom{n+(r-k)-1}{r-k}\binom{n+k-1}{k} + \dots + (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

είναι ίση με 0 για r περιττό, και είναι ίση με

$$\binom{n+s-1}{s} \text{ για άρτιο } r = 2s.$$

Άρα καταλήγουμε στον τύπο

$$\binom{n+s-1}{s} = \sum_{k=0}^{2s} \binom{n+2s-k-1}{2s-k}\binom{n+k-1}{k}(-1)^k.$$

Παράδειγμα 2.8 (διαμερίσεις ακεραίων)**:** Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που ένας ακέραιος θετικός αριθμός n μπορεί να γραφεί ως άθροισμα θετικών ακεραίων αριθμών, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά των όρων στα αθροίσματα. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με $d(n)$. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
&d(1) = 1 : 1\\
&d(2) = 2 : 2 = 1+1\\
&d(3) = 3 : 3 = 2+1 = 1+1+1\\
&d(4) = 5 : 4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1.
\end{aligned}$$

Λύση. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι εκθέτες του x στη δυναμοσειρά

$$1 + x + x^{1+1} + x^{1+1+1} + x^{1+1+1+1} + \dots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

αντιστοιχούν στις φορές που θα χρησιμοποιήσουμε το 1 σε μία διαμέριση του n. Όμοια οι εκθέτες του x στη δυναμοσειρά

$$1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \dots = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

αντιστοιχούν στις φορές που θα χρησιμοποιήσουμε το 2 σε μία διαμέριση του n.

Εάν θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε, για παράδειγμα, το $d(10)$ αρκεί να βρούμε το συντελεστή του x^{10} στο γινόμενο:

$$\begin{aligned} f\left(x\right) = &\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right) \\ &\left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots\right) \cdots \left(1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε τώρα ότι:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{(1-x)} \frac{1}{(1-x^2)} \cdots \frac{1}{(1-x^{10})} = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{(1-x^i)}.$$

Γενικεύοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στο ότι συνάρτηση:

$$D\left(x\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^i)}$$

είναι η γεννήτρια συνάρτηση (απαριθμητής) για την ακολουθία $d(n), n = 0, 1, \ldots$, όπου ορίζουμε $d(0) = 1$. Αν και το $D(x)$ είναι θεωρητικά πλήρως ορισμένο, είναι αρκετά δύσκολο να δουλεύουμε με γινόμενα άπειρων όρων.

Εάν όμως θεωρήσουμε μόνο το

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(1-x^i)}, \text{ για κάποιο σταθερό } r,$$

τότε ο συντελεστής του x^n είναι ο αριθμός των διαμερίσεων του n σε αθροίσματα των οποίων οι όροι δεν υπερβαίνουν το r. □

Παράδειγμα 2.9: Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση για το $d_\delta(n)$, όπου $d_\delta(n)$ είναι ο αριθμός των διαμερίσεων ενός θετικού ακέραιου n σε αθροίσματα που περιέχουν διαφορετικούς θετικούς ακέραιους.

Λύση. Για παράδειγμα, ενώ όλες οι δυνατές διαμερίσεις του ακέραιου 6 (όχι κατ' ανάγκη σε διαφορετικούς ακέραιους είναι οι:

(1)	1+1+1+1+1+1	(2)	1+1+1+1+2
(3)	1+1+1+3	(4)	1+1+4
(5)	1+1+2+2	(6)	1+5
(7)	1+2+3	(8)	2+2+2
(9)	2+4	(10)	3+3
(11)	6		

παρατηρούμε ότι μόνο οι διαμερίσεις (6), (7), (9) και (11) περιέχουν διαφορετικούς ακέραιους. Επομένως $d_\delta(6) = 4$. Παρατηρούμε τώρα ότι για τον υπολογισμό του $d_\delta(n)$ έχουμε δύο επιλογές για κάθε ακέραιο k: (α) ο k να μη χρησιμοποιηθεί στη διαμέριση ή (β) ο k να χρησιμοποιηθεί μόνο μια φορά.

Επομένως προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση για το $d_\delta(n)$ είναι η

$$D_\delta\left(x\right) = \left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\ldots = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-x^i\right)$$

Άρα το $d_\delta(n)$ είναι ο συντελεστής του x^n στο

$$\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^n\right).$$

Ορίζουμε ότι $d_\delta(0) = 1$.

Για $n = 6$, ο συντελεστής του x^6 στο

$$\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^6\right)$$

είναι 4. □

2.4 Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

Δυστυχώς οι γεννήτριες συναρτήσεις που μάθαμε μέχρι τώρα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση διατάξεων, ή για την εύρεση του πλήθους συνόλων από συνδυαστικά αντικείμενα τα οποία εξαρτώνται από παράμετρο που αναφέρεται σε διακεκριμένα αντικείμενα. Τούτο διότι ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετική πράξη, άρα πολλαπλασιάζοντας πολυώνυμα ή σειρές δεν μπορούμε να «απεικονίσουμε» αλγεβρικά την έννοια των διατάξεων ή των παραμετροποιήσεων που αναφέρονται σε διακεκριμένα αντικείμενα.

Μπορούμε όμως να ξεφύγουμε από αυτό το αδιέξοδο. Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} P(n,r)\,\frac{x^r}{r!},$$

δηλαδή ο συντελεστής του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα του $(1+x)^n$ είναι ο αριθμός των διατάξεων r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα. Αυτό μας οδηγεί να ορίσουμε ως εκθετική γεννήτρια συνάρτηση μιας ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots$ τη σειρά $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^k r}{r!}$ (η ορολογία οφείλεται στο ότι $e^x = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$).

Ας κοιτάξουμε τώρα προσεκτικά ένα γινόμενο της μορφής:

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^n.$$

Αν αναπτύξουμε το γινόμενο αυτό σε σειρά των $\frac{x^r}{r!}$, ο συντελεστής του $\frac{x^r}{r!}$ είναι

$$\sum_{q_1+q_2+\ldots+q_n=r} \frac{r!}{q_1!q_2!\ldots q_n!},$$

όπου το άθροισμα κυμαίνεται πάνω από όλες τις δυνατές αναλύσεις του r σε άθροισμα n μη αρνητικών όρων (διαφορετικές θεωρούνται δύο αναλύσεις εάν έχουν διαφορετικά σύνολα όρων, ή εάν έχουν το ίδιο σύνολο όρων αλλά με διαφορετική σειρά). Αλλά όμως η έκφραση

$$\frac{r!}{q_1!q_2!\ldots q_n!}$$

δίνει τον αριθμό των μεταθέσεων r αντικειμένων που είναι χωρισμένα σε n ομάδες με q_i $(1 \leq\ i \leq n)$ μη διακεκριμένα στοιχεία η κάθε μία. Επομένως η έκφραση

$$\sum_{q_1+\ldots+q_n=r} \frac{r!}{q_1!\ldots q_n!} \tag{2.5}$$

δίνει τον αριθμό των μεταθέσεων με επανάληψη r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα (η έκφραση αυτή επομένως ισούται με n^r). Δεν είναι τώρα δύσκολο να γενικεύσουμε τις παραπάνω ιδέες:

Παράδειγμα 2.10: Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων να κατανεμηθούν r διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες (ή μη διακεκριμένες) υποδοχές, όταν κάθε υποδοχή πρέπει να δεχθεί ένα τουλάχιστον αντικείμενο.

Λύση. Θεωρούμε ως παράμετρο του προβλήματος τον αριθμό r των αντικειμένων και ως σταθερά τον αριθμό n των υποδοχών. Άρα ακόμη και εάν οι υποδοχές είναι μη διακεκριμένες, θα χρησιμοποιήσουμε εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση όπου οι υποδοχές είναι διακεκριμένες. Ο εκθετικός απαριθμητής είναι

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^n = \left(e^x - 1\right)^n .$$

Σημείωση: Το πρόβλημα των τοποθετήσεων σε αυτή την περίπτωση είναι ισοδύναμο με την εύρεση του αριθμού των διατάξεων r αντικειμένων επιλεγμένων από n αντικείμενα, με επανάληψη, αλλά και με τον επιπλέον περιορισμό ότι όλα τα n αντικείμενα πρέπει να εμφανισθούν στη διάταξη τουλάχιστον μία φορά.

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned}
\left(e^x - 1\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i e^{(n-i)x} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (n-i)^r x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r .
\end{aligned}$$

Επομένως, ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε r διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές, χωρίς να αφήσουμε άδειες υποδοχές, είναι

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r = n! S\left(r, n\right),$$

όπου

$$S\left(r, n\right) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^r . \tag{2.6}$$

Οι $S(r,n)$ καλούνται αριθμοί Stirling 2ου είδους. Συμβολίζονται επίσης και με $\left\{ {r \atop n} \right\}$.

Για την περίπτωση τώρα που οι υποδοχές είναι μη διακεκριμένες, αρκεί να διαιρέσουμε τον τύπο για διακεκριμένες υποδοχές με $n!$ για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε r διακεκριμένα αντικείμενα σε n μη διακεκριμένες υποδοχές, χωρίς να αφήσουμε άδειες υποδοχές, είναι $S(r,n)$. $\square$

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τον υπολογισμό του αριθμού των τρόπων που ένα σύνολο με r στοιχεία μπορεί να διαμερισθεί σε n μη κενά υποσύνολα, ξένα ανά δύο μεταξύ τους. Ο εκθετικός απαριθμητής των αριθμών αυτών (θεωρώντας ως παράμετρο το r και το n ως σταθερά) είναι $(e^x-1)^n/n!$.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ερμηνεία του αριθμού των διαμερίσεων για τους αριθμούς Stirling 2ου είδους είναι εύκολο να καταλήξει κανείς στον ακόλουθο αναγωγικό τύπο:

$$S(r+1,n+1) = (n+1)S(r,n+1) + S(r,n). \tag{2.7}$$

Πράγματι, δεδομένων $r+1$ διακεκριμένων αντικειμένων, $\{1,\ldots,r,r+1\}$, ξεχωρίζουμε ένα από αυτά, έστω το τελευταίο, το $r+1$. Για να κατασκευάσουμε τώρα μία οποιαδήποτε διαμέριση των αντικειμένων $\{1,\ldots,r,r+1\}$ υπάρχουν δύο επιλογές: (α) να κατασκευάσουμε μία διαμέριση των r αντικειμένων $\{1,\ldots,r\}$ που έχει $n+1$ υποσύνολα και να προσθέσουμε το αντικείμενο $r+1$ σε κάποιο από τα $n+1$ υποσύνολα ή (β) να κατασκευάσουμε μία διαμέριση των r αντικειμένων $\{1,\ldots,r\}$ που έχει n υποσύνολα και να θεωρήσουμε ότι το μονοσύνολο $\{r+1\}$ αποτελεί το $(n+1)$-οστό υποσύνολο της διαμέρισης. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι η επιλογή (α) μπορεί να υλοποιηθεί κατά $n+1$ τρόπους, ενώ η επιλογή (β) κατά ένα τρόπο.

Στον Πίνακα 2.2 υπάρχουν μερικοί αριθμοί Stirling 2ου είδους, υπολογισμένοι με χρήση του τύπου 2.7.

Σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι υπάρχουν και αριθμοί Stirling 1ου είδους, που συμβολίζονται $s(r,n)$ (ή επίσης και με $\left[{r \atop n} \right]$) και δίνουν τον αριθμό των τρόπων να κατασκευάσουμε ένα σύνολο από n περιδέραια χρησιμοποιώντας r διακεκριμένες χάντρες (κάθε περιδέραιο πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία χάντρα).

r/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	1770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Πίνακας 2.2: Αριθμοί Stirling 2ου είδους, $S(r, n)$

r/n	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	2	3	1					
4	6	11	6	1				
5	24	50	35	10	1			
6	120	274	255	85	15	1		
7	720	1764	1624	735	175	21	1	
8	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

Πίνακας 2.3: Αριθμοί Stirling 1ου είδους $s(r, n)$

Ο αναγωγικός τύπος για τους αριθμούς Stirling 1ου είδους είναι (άσκηση):

$$s(r+1, n+1) = rs(r, n+1) + s(r, n). \tag{2.8}$$

Στον Πίνακα 2.3 υπάρχουν μερικοί αριθμοί Stirling 1ου είδους, υπολογισμένοι με χρήση του τύπου 2.8.

Παράδειγμα 2.11: Να βρεθεί ο εκθετικός απαριθμητής του αριθμού των τρόπων να διαμερίσουμε ένα σύνολο από r στοιχεία σε μη κενά, ξένα ανά δύο υποσύνολα χωρίς περιορισμό στον αριθμό των υποσυνόλων. Οι αριθμοί αυτοί καλούνται αριθμοί Bell και συμβολίζονται με B_r.

Λύση. Επειδή μία διαμέριση θα αποτελείται από ένα ή δύο ή τρία κτλ υποσύνολα, είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι:

$$B_r = \sum_{i=1}^{\infty} S(r,i).$$

Ξέρουμε ότι ο εκθετικός απαριθμητής των $S(r,n)$ είναι $(e^x - 1)^n/n!$. Επομένως, ο εκθετικός απαριθμητής των αριθμών Bell B_r είναι

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(e^x-1)^i}{i!} \right) = e^{e^x-1} - 1. \qquad \square$$

Παράδειγμα 2.12: Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να εκτυπωθούν 25 διαφορετικά προγράμματα από τους 3 διαφορετικούς εκτυπωτές που διαθέτει ένα υπολογιστικό κέντρο, με τον περιορισμό ότι κάθε εκτυπωτής πρέπει να εκτυπώσει ένα τουλάχιστον πρόγραμμα.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική γεννήτρια συνάρτηση. Αυτή είναι η εξής:

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^3 = (e^x - 1)^3$$

Ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να γίνουν οι εκτυπώσεις είναι ο συντελεστής του $x^{25}/25!$ στο $(e^x-1)^3$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(e^x-1)^3 &= e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{x^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{x^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} - 1 \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (3^r - 3\cdot 2^r + 3)\frac{x^r}{r!} - 1.\end{aligned}$$

Επομένως ο συντελεστής του $x^{25}/25!$ είναι $3^{25} - 3\cdot 2^{25} + 3$. $\square$

2.5 Ασκήσεις

2.1 Ποια ακολουθία έχει γεννήτρια συνάρτηση την:

(α) $A(x) = \dfrac{1+2x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3}$,

(β) $A(x) = \dfrac{2+3x-6x^2}{1+2x}$,

(γ) $A(x) = \dfrac{2}{1-4x^2}$.

2.2 Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας:

(α) $2, 5, 13, 35, \ldots = 2^n + 3^n$,

(β) $1, 2, 3, \ldots, r, \ldots$

2.3 Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των μερικών αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης.

2.4 Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$a_r = (r+1)\,r\,(r-1)\,.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα

$$3\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 2 + \ldots + (n+1)\,n\,(n-1)\,.$$

2.5 Για δοσμένο t, να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i}.$$

2.6 Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

(α) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 \binom{n-1}{n-k}$,

(β) $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} \frac{r!}{(r-i+1)!\,(i+1)!}$.

2.7 Έστω x μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, \ldots$ με πιθανότητα αντίστοιχα $x_0, x_1, \ldots$ ($x_i \geq 0$ και $\sum x_i = 1$). Έστω

$$x\left(s\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k s^k$$

η λεγόμενη «γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων». Έστω y η τυχαία μεταβλητή που παίρνουμε αν προσθέσουμε n ανεξάρτητα δείγματα της x. Έστω $y_0, y_1, \ldots$ οι πιθανότητες η y να παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, \ldots,$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων

$$y\left(s\right) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k$$

ισούται με $\left(X\left(s\right)\right)^n$.

2.8 Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, a_2, \ldots$ όπου a_r είναι ο αριθμός των τρόπων να σχηματίσουμε συνδυασμό (με επαναλήψεις) επιλέγοντας r γράμματα από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ με τον περιορισμό το γράμμα 0 να εμφανιστεί άρτιες φορές. Με βάση τη γεννήτρια συνάρτηση, υπολογίστε το a_r.

2.9 Δίνεται η γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Να βρεθούν:

(α) η γεννήτρια συνάρτηση για την υπακολουθία των όρων με άρτιο δείκτη, δηλ. $a_0, a_2, a_4, \ldots,$

(β) η γεννήτρια συνάρτηση της υπακολουθίας $a_1, a_4, a_7, \ldots$ (Υπόδειξη: Αν $w = e^{2\pi_i/3}$, τότε $w^0 + w^1 + w^2 = 0$).

2.10 Να βρεθεί ο αριθμός των διαμερίσεων του 2^n με όρους των αθροισμάτων τους αριθμούς 1,2 και 4.

2.11 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που $2t+1$ μη διακεκριμένα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε 3 διακεκριμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να μην περιέχει περισσότερα από t αντικείμενα.

2.12 Έχουμε 2 είδη αντικειμένων. Το είδος 1 έχει p μη διακεκριμένα αντικείμενα και το είδος 2 έχει q μη διακεκριμένα αντικείμενα. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε συνδυασμό επιλέγοντας r αντικείμενα;

2.13 Να βρεθεί ο εκθετικός απαριθμητής για τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να διαλέξουμε r ή λιγότερα αντικείμενα από r διακεκριμένα αντικείμενα και να τα κατανείμουμε σε n διακεκριμένες υποδοχές, με τα αντικείμενα μέσα σε κάθε υποδοχή ταξινομημένα.

2.14 Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να μετατρέψουμε σε ψιλά νόμισμα του ενός ευρώ.

Κεφάλαιο 3

Σχέσεις Αναδρομής

3.1 Εισαγωγή

Γύρω στα 1200 μ.Χ. ο Leonardo da Pisa, πιο γνωστός σαν Fibonacci, ανακάλυψε και μελέτησε την ακολουθία αριθμών Fibonacci. Ο Fibonacci παρουσίαζε αυτήν την ακολουθία αριθμών λέγοντας την πιο κάτω ιστορία: *«Σε ένα νησί υπάρχει αρχικά ένα ζευγάρι από κουνέλια. Κάθε ζεύγος κουνελιών έχει τη δυνατότητα μετά από ένα μήνα ζωής να αναπαράγει ένα άλλο ζεύγος από κουνέλια μέσα σε ένα μήνα. Αυτό μας λέει ότι το κουνέλι για να γεννήσει πρέπει να ενηλικιωθεί, δηλαδή να γίνει ενός μηνός. Γεννήσεις συμβαίνουν κάθε μήνα. Τα κουνέλια ποτέ δεν πεθαίνουν και ποτέ δεν σταματάνε να αναπαράγουν».* Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε μια λύση στο πρόβλημα του υπολογισμού του αριθμού των κουνελιών μετά από ένα δεδομένο διάστημα.

Ας είναι a_n ο αριθμός των ζευγαριών των κουνελιών μετά από n μήνες. Ας είναι N_n τα νεογεννηθέντα ζευγάρια (δηλαδή αυτά που γεννήθηκαν στο μήνα n) και O_n τα παλιά ζευγάρια (δηλαδή αυτά που γεννήθηκαν στους μήνες $1, \ldots, n-1$). Επομένως είναι

$$a_n = N_n + O_n$$

Οι κανόνες της ιστορίας μας λένε ότι τον επόμενο μήνα θα συμβούν τα εξής γεγονότα:

$O_{n+1} = O_n + N_n = a_n$ - τα παλιά ζευγάρια τη χρονική στιγμή $(n+1)$ έχουν αυξηθεί με αυτά που γεννήθηκαν τη χρονική στιγμή n.

$N_{n+1} = O_n$ - κάθε παλιό ζευγάρι στη χρονική στιγμή n παράγει ένα νεογέννητο ζευγάρι τη χρονική στιγμή $n+1$.

Κατά τη διάρκεια του επόμενου μήνα έχουμε:

$$\begin{aligned} O_{n+2} &= O_{n+1} + N_{n+1} = a_{n+1} \\ N_{n+2} &= O_{n+1} \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις πιο πάνω εξισώσεις έχουμε

$$a_{n+2} = O_{n+2} + N_{n+2} = (O_{n+1} + N_{n+1}) + (O_n + N_n) = a_{n+1} + a_n$$

Η πιο πάνω σχέση είναι μια σχέση αναδρομής. Οι αρχικές συνθήκες χρειάζονται, αλλά δεν έχουν και μεγάλη σημασία. Για τους αριθμούς Fibonacci συνήθως είναι $a_0 = 0, a_1 = 1$, ή $a_0 = a_1 = 1$.

Στις επόμενες παραγράφους θα δώσουμε κάποιους ορισμούς και θα περιγράψουμε τρόπους για τη λύση σχέσεων αναδρομής, δηλαδή για την εύρεση κλειστού τύπου για το γενικό όρο της ακολουθίας που ορίζεται με τη σχέση αναδρομής.

3.2 Γραμμικές Σχέσεις Αναδρομής με σταθερούς συντελεστές

Μια σχέση αναδρομής που έχει την εξής μορφή

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} = f(n) \tag{3.1}$$

με $c_0, c_1, \ldots, c_r$ σταθερούς αριθμούς ονομάζεται γραμμική σχέση αναδρομής με σταθερούς συντελεστές, r-τάξης ή r-βαθμού. Οι τιμές της ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ ονομάζονται αρχικές συνθήκες της σχέσης αναδρομής.

Η $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ είναι μια τέτοια σχέση αναδρομής. Η συνάρτηση $f(n)$ ονομάζεται οδηγός συνάρτηση.

Αν η $f(n) = 0$, τότε η σχέση αναδρομής λέγεται ομογενής. Στην περίπτωση που $f(n) \neq 0$ λέγεται μη ομογενής. Στη συνέχεια θα δώσουμε δυο τρόπους επίλυσης γραμμικών σχέσεων αναδρομής με σταθερούς συντελεστές.

3.2.1 Λύση με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η γενική λύση μιας γραμμικής σχέσης αναδρομής με σταθερούς συντελεστές μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο μερών: της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς σχέσης και μιας μερικής λύσης της δεδομένης μη ομογενούς σχέσης. Άρα το πρόβλημα της εύρεσης της γενικής λύσης της σχέσης αναδρομής ανάγεται στο πρόβλημα της εύρεσης της γενικής λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης της δεδομένης μη ομογενούς. Ας είναι $a_n^{(h)}$ η λύση της γενικής ομογενούς και $a_n^{(p)}$ μια μερική λύση της μη ομογενούς. Είναι

$$\begin{aligned} c_0 a_n^{(h)} + c_1 a_{n-1}^{(h)} + \ldots + c_r a_{n-r}^{(h)} &= 0 \\ c_0 a_n^{(p)} + c_1 a_{n-1}^{(p)} + \ldots + c_r a_{n-r}^{(p)} &= f(n) \end{aligned}$$

Επομένως

$$c_0 \left(a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \right) + c_1 \left(a_{n-1}^{(h)} + a_{n-1}^{(p)} \right) + \ldots + c_r \left(a_{n-r}^{(h)} + a_{n-r}^{(p)} \right) = f(n) \quad (3.2)$$

Προφανώς η πλήρης λύση, $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$, ικανοποιεί τη σχέση αναδρομής. *«Ο σκοπός θα είναι να ξεφύγουμε από τη σχέση αναδρομής και να καταλήξουμε σε ένα κλειστό τύπο που μας δίνει το a_n συναρτήσει του n».*

(A) Εύρεση ομογενούς λύσης

Δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής $a_n^{(h)} = Ax^n$, όπου x ονομάζεται χαρακτηριστική ρίζα και A είναι μια σταθερά που θα υπολογιστεί από τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας αυτή τη λύση στη σχέση αναδρομής παίρνουμε

$$\begin{aligned} c_0 Ax^n + c_1 Ax^{n-1} + c_2 Ax^{n-2} + \ldots + c_r Ax^{n-r} &= 0 \Leftrightarrow \\ c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_r x^{n-r} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Η (3.3) ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση της σχέσης αναδρομής και έστω ότι έχει διαφορετικές πραγματικές ρίζες τις $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Τότε αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$a_n^{(h)} = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_r x_r^n$$

Τα $A_1, A_2, \ldots, A_r$ θα υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 3.1: Η σχέση αναδρομής για τους αριθμούς Fibonacci είναι

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

ή

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Λύση. Έστω ότι οι αρχικές συνθήκες είναι $a_0 = a_1 = 1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Οι ρίζες είναι

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ο αριθμός

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,16803$$

είναι ο λεγόμενος «χρυσός λόγος». (Αναλογία μεγεθών που έχει χρησιμοποιηθεί από την εποχή του Φειδία στην κλασική τέχνη. Λέγεται ότι ευχαριστεί τις αισθήσεις). Σε αυτή την περίπτωση η ομογενής λύση είναι και η πλήρης λύση και δίνεται από τον τύπο:

$$a_n = a_n^{(h)} = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Οι δυο σταθερές A_1, A_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες $a_0 = a_1 = 1$ τις δυο εξισώσεις

$$a_0 = A_1 + A_2 = 1,\ a_1 = A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

και

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Επομένως,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \qquad \square$$

Θα αναφερθούμε τώρα στην περίπτωση κατά την οποία μερικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μιγαδικοί αριθμοί. Επειδή οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικοί, αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζα ένα μιγαδικό, τότε έχει και το συζυγή του.

Ας είναι $x_1 = a + ib$ και $x_2 = a - ib$ το ζευγάρι των μιγαδικών ριζών.

Η αντίστοιχη ομογενής λύση είναι

$$\begin{aligned} A_1 (X_1)^n + A_2 (X_2)^n &= A_1 (a+ib)^n + A_2 (a-ib)^n \\ &= B_1 p^n \cos(n\vartheta) + B_2 p^n \sin(n\vartheta) \end{aligned}$$

όπου

$$p = \sqrt{a^2 + b^2}$$

και

$$\vartheta = \tan^{-1}(b/a), B_1 = (A_1 + A_2), B_2 = i(A_1 - A_2)$$

Μας μένει η περίπτωση να έχουμε πολλαπλές ρίζες για τη χαρακτηριστική εξίσωση.

Ας είναι X_1 k-πολλαπλότητας ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Τότε αποδεικνύεται ότι η ομογενής λύση είναι

$$\left(A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \ldots + A_{k-2} n^2 + A_{k-1} n + A_k\right) X_1^n$$

Παράδειγμα 3.2: Να λυθεί η σχέση αναδρομής

$$4a_n - 20a_{n-1} + 17a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση, είναι

$$4x^3 - 20x^2 + 17x - 4 = 0$$

και οι ρίζες

$$x_1 = x_2 = 1/2, x_3 = 4$$

Άρα η ομογενής λύση, που σε αυτή την περίπτωση είναι και πλήρης λύση, είναι

$$a_n^{(h)} = (A_1 n + A_2)(1/2)^n + A_3 4^n$$

Τα A_1, A_2, και A_3 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. □

(Β) Εύρεση μιας μερικής λύσης

Δεν υπάρχει γενικός κανόνας. Μπορούμε όμως να πούμε πως η μερική λύση «μοιάζει» με την οδηγό συνάρτηση. Δηλαδή, ανάλογα με το τι είναι η οδηγός συνάρτηση δοκιμάζουμε και μια μερική λύση. Ο πιο κάτω πίνακας δίνει μερικά παραδείγματα

Μορφή $f(n)$	Μορφή μερικής λύσης
k, σταθερά	C, σταθερά
πολυώνυμο	πολυώνυμο ίδιου βαθμού αλλά πλήρες
$k\lambda^n, \quad k, \lambda$ σταθερές	$c\beta^n, \quad c, \beta$ σταθερές

Οι σταθερές της μερικής λύσης υπολογίζονται αντικαθιστώντας την υποψήφια λύση στην μη ομογενή σχέση αναδρομής.

Παράδειγμα 3.3: Να λυθεί η σχέση αναδρομής

$$6a_n - 5a_{n-1} + a_{n-2} = 6\,(1/5)^n \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$
$$a_0 = 0, \; a_1 = 6/5$$

Λύση.

(α) Ομογενής λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση, $6x^2 - 5x + 1 = 0$
οι ρίζες είναι, $x_1 = 1/2, x_2 = 1/3$

Άρα η ομογενής λύση είναι

$$a_n^{(h)} = A_1\,(1/2)^n + A_2\,(1/3)^n$$

(β) Μερική λύση

Η μορφή της οδηγού συνάρτησης $f(n)$, μας επιβάλλει να δοκιμάσουμε μια μερική λύση της μορφής $a_n^{(p)} = B\,(1/5)^n$. Δηλαδή

$$6B\,(1/5)^n - 5B\,(1/5)^{n-1} + B\,(1/5)^{n-2} = 6\,(1/5)^n \Rightarrow$$
$$(6/25)\,B - B + B = 6/25 \Rightarrow B = 1$$

Άρα η πλήρης λύση είναι

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = A_1\,(1/2)^n + A_2\,(1/3)^n + (1/5)^n$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned}
a_0 &= A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + A_2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 0 \quad A_1 + A_2 = -1 \\
a_1 &= A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + A_2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{6}{5} \quad \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} = 1 \\
& A_1 = 8 \text{ και } A_2 = -9
\end{aligned}$$

Άρα η πλήρης λύση είναι

$$a_n = (1/2)^{n-2} - (1/3)^{n-2} + (1/5)^n\,,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \square$$

3.2.2 Λύση με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων

Ας είναι $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

δηλαδή

$$A\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Έστω ότι έχουμε την εξής σχέση αναδρομής

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} = f\,(n) \tag{3.4}$$

η οποία έχει φυσική σημασία και ισχύει μόνο για εκείνα τα n τα οποία είναι μεγαλύτερα ή ίσα από κάποιον ακέραιο $k \geq r$. Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε τις τιμές εκείνων των a_n για τα οποία $n \geq k - r$ διότι μόνο αυτά τα a_n σχετίζονται με τη σχέση αναδρομής. Από αυτά, τα $a_{k-r}, a_{k-r+1}, \ldots, a_{k-1}$ θεωρούνται δεδομένα ως αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Από την (3.4), πολλαπλασιάζοντας με x_n και αθροίζοντας έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left(c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r}\right) x^n = \sum_{n=k}^{\infty} f\,(n)\, x^n \tag{3.5}$$

Από την ιδιότητα της ολίσθησης των γεννητριών συναρτήσεων έχουμε

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} c_0 a_n x^n &= c_0 \left[A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{k-1} x^{k-1} \right] \\
\sum_{n=k}^{\infty} c_1 a_{n-1} x^n &= c_1 x \left[A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{k-2} x^{k-2} \right] \\
&\ldots \\
\sum_{n=k}^{\infty} c_r a_{n-r} x^n &= c_r x^r \left[A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{k-r-1} x^{k-r-1} \right]
\end{aligned}
$$

Λύνοντας την (3.5) ως προς $A(x)$ και κάνοντας αντικαταστάσεις έχουμε ότι

$$
A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-r-1} x^{k-r-1} + \frac{1}{c_0 + c_1 x + \ldots + c_r x^r} B(x)
$$

όπου:

$$
\begin{aligned}
B(x) = \sum_{n=k}^{\infty} f(n) x^n &+ c_0 \left(a_{k-r} x^{k-r} + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} \right) \\
&+ c_1 \left(a_{k-r} x^{k-r+1} + \ldots + a_{k-2} x^{k-1} \right) \\
&\ldots \\
&+ c_{r-1} a_{k-r} x^{k-1}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3.4: Να λυθεί το Παράδειγμα 3.3 με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων.

Λύση. Έχουμε

$$
6a_n - 5a_{n-1} + a_{n-2} = 6\,(1/5)^n\,, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 6/5
$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} 6a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 5a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} 6\,(1/5)^n\, x^n \\
6\,[A\,(x) - a_0 - a_1 x] - 5x\,[A\,(x) - a_0] + x^2 A\,(x) &= \frac{6\,(1/5)^2\, x^2}{1-(1/5)\,x} \Rightarrow \\
A\,(x) = (1/5)\,\frac{x\,(6-x)}{[1-(1/3)\,x]\,[1-(1/2)\,x]\,[1-(1/5)\,x]} &\Rightarrow \\
A\,(x) = \frac{-9}{1-(1/3)\,x} + \frac{8}{1-(1/2)\,x} + \frac{1}{1-(1/5)\,x} &\Rightarrow \\
a_n = (1/2)^{n-2} - (1/3)^{n-2} + (1/5)^n\,, \quad n = 0,1,2,\ldots &
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.5: Δίνονται οι 2 παρακάτω σχέσεις αναδρομής που σχετίζονται μεταξύ τους

$$\begin{aligned}
a_r &= 3a_{r-1} + 2b_{r-1} \\
b_r &= a_{r-1} + b_{r-1}
\end{aligned}$$

με

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

Να βρεθούν κλειστοί τύποι για τις ακολουθίες a_r και b_r.

Λύση. Θα βρούμε κλειστό τύπο για τα a_r, b_r με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων.

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r &= \sum_{r=1}^{\infty} 3a_{r-1}x^r + \sum_{r=1}^{\infty} 2b_{r-1}x^r \\
\sum_{r=1}^{\infty} b_r x^r &= \sum_{r=1}^{\infty} a_{r-1}x^r + \sum_{r=1}^{\infty} b_{r-1}x^r
\end{aligned}$$

με $A\,(x) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r x^r$, $B\,(x) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} b_r x^r$

Από τις ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων έχουμε

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + 2xB(x) \\ B(x) &= xA(x) + xB(x) \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς $A(x), B(x)$ βρίσκουμε ότι

$$A(x) = \frac{1-x}{1-4x+x^2} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)/6}{1-\left(2+\sqrt{3}\right)x} + \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)/6}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)x}$$

και στη συνέχεια με μερική κλασματική ανάλυση

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \\ b_n &= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \end{aligned} \qquad \square$$

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να εφαρμόσουμε κάποιας μορφής μετασχηματισμό στην ακολουθία, για να την εμφανίσουμε σε μια πιο κατάλληλη μορφή.

Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.6: Να λυθεί η σχέση αναδρομής

$$a_n = 3a_{n-1}^2, \quad n \geq 1,\ a_0 = 1$$

Λύση. Αυτή η σχέση αναδρομής δεν μπορεί να λυθεί με καμιά από τις μεθόδους που έχουμε συζητήσει μέχρι τώρα. Αν όμως θεωρήσουμε μια νέα ακολουθία b_n της μορφής $b_n = \log a_n$ (όπου log δηλώνει λογάριθμο με βάση το 2). Τότε η σχέση αναδρομής μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$b_n = 2b_{n-1} + \log 3, \quad b_0 = 0$$

Αυτή η σχέση αναδρομής μπορεί να λυθεί εύκολα με τις μεθόδους που έχουμε συζητήσει. Αν τη λύσουμε βρίσκουμε ότι

$$b_n = (2^n - 1)\log 3 \quad \text{ή} \quad a_n = 2^{(2^n-1)\log 3} = 3^{2^n-1} \qquad \square$$

3.3 Μη γραμμικές Σχέσεις Αναδρομής

Οι σχέσεις αναδρομής οι οποίες δεν είναι γραμμικές και έχουν σταθερούς συντελεστές, δεν έχουν γενικές τεχνικές λύσης παρόμοιες με αυτές της Παραγράφου 3.2. Συνήθως καταφεύγουμε σε ειδικές μεθόδους. Άλλοτε πάλι για ειδικές κατηγορίες μπορούμε να δώσουμε γενική λύση ή να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της σχέσης αναδρομής. Πολλές φορές «μαντεύουμε» μια λύση και τη δοκιμάζουμε αν δουλεύει. Άλλες φορές πάλι κάνουμε διάφορους μετασχηματισμούς.

3.3.1 Λύση της τηλεσκοπικής σχέσης αναδρομής

Η γενική μορφή της τηλεσκοπικής σχέσης αναδρομής είναι η εξής

$$\begin{aligned} &T\left(1\right)=1\\ &T\left(n\right)=aT\left(n/b\right)+d\left(n\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Η συνάρτηση $d(n)$ λέγεται οδηγός συνάρτηση. Σημειώνεται ότι η (3.6) έχει νόημα όταν το n είναι ακέραια δύναμη του b. Αλλά εάν υποθέσουμε ότι η $T(n)$ είναι λεία (δηλαδή έχει παραγώγους κάθε τάξης) και πάρουμε ένα καλό άνω όριο για την $T(n)$, αυτές οι τιμές του n μας δίνουν πληροφορία για το ρυθμό αύξησης της συνάρτησης $T(n)$.

Για να μιλήσουμε για τους ρυθμούς που αυξάνουν οι συναρτήσεις θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό «κεφαλαίο όμικρον» (big-oh). Για παράδειγμα όταν θα λέμε ότι η $T(n)$ είναι $O(n^2)$, θα εννοούμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε για n ίσο ή μεγαλύτερο από το n_0, έχουμε ότι $T(n) \leq cn^2$.

Ας είναι $T(n) = (n+1)^2$. Παρατηρούμε ότι η $T(n)$ είναι $O(n^2)$. Πράγματι αρκεί να πάρουμε $n_0 = 1$ και $c = 4$. Αυτό συμβαίνει γιατί για $n \geq 1$ ισχύει ότι $(n+1)^2 \leq 4n^2$.

Με άλλα λόγια, όταν λέμε ότι η $T(n)$ είναι $O\left(f\left(n\right)\right)$, αυτό σημαίνει ότι η $f(n)$ είναι ένα πάνω όριο στο ρυθμό αύξησης της $T(n)$.

Για να λύσουμε την (3.6) κάνουμε διαδοχικές αντικαταστάσεις στο δεξιό μέρος για $i = 1, 2$ και έχουμε

$$
\begin{aligned}
T\left(n\right) &= aT\left(n/b\right) + d\left(n\right) \\
&= a\left[aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + d\left(\frac{n}{b}\right)\right] + d\left(n\right) \\
&= a^2 T\left(\frac{n}{b^2}\right) + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d\left(n\right) \\
&= a^2\left[aT\left(\frac{n}{b^3}\right) + d\left(\frac{n}{b^2}\right)\right] + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d\left(n\right) \\
&= a^3 T\left(\frac{n}{b^3}\right) + a^2 d\left(\frac{n}{b^2}\right) + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d\left(n\right) \\
&\dots \\
&= a^i T\left(\frac{n}{b^i}\right) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j d\left(\frac{n}{b^j}\right)
\end{aligned}
$$

Εάν τώρα υποθέσουμε ότι $n = b^k$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $T\left(\frac{n}{b^k}\right) = T\left(1\right) = 1$ και να πάρουμε, με $i = k$ τη σχέση

$$
T\left(n\right) = a^k + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d\left(b^{k-j}\right)
$$

Είναι $k = \log_b n$, άρα

$$
T\left(n\right) = a^{\log_b n} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d\left(b^{k-j}\right) \tag{3.7}
$$

Είναι αρκετά ενδιαφέρον να δούμε τους διαφορετικούς ρόλους που παίζουν οι δύο όροι στην (3.7).

Ο πρώτος όρος, ο $a^{\log_b n}$, ονομάζεται ομογενής λύση σε αναλογία με την ορολογία που χρησιμοποιήσαμε στις γραμμικές σχέσης αναδρομής με σταθερούς συντελεστές. Προφανώς αν η οδηγός συνάρτηση $d(n)$ είναι 0, τότε η ομογενής λύση είναι η ακριβής λύση για την τηλεσκοπική σχέση αναδρομής.

Ο δεύτερος όρος ονομάζεται μερική λύση και είναι δύσκολο να υπολογιστεί ακόμα και αν ξέρουμε ακριβώς την οδηγό συνάρτηση $d(n)$.

Υπάρχουν λοιπόν οδηγοί συναρτήσεις $d(n)$ για τις οποίες μπορούμε να λύσουμε την (3.7) ακριβώς και υπάρχουν και άλλες για τις οποίες μπορούμε να πάρουμε ένα καλό άνω όριο.

Λέμε ότι μια συνάρτηση f των ακέραιων είναι πολλαπλασιαστική εάν $f(xy) = f(x)f(y)$ για όλους τους θετικούς ακέραιους x και y.

Αν η $d(n)$ είναι πολλαπλασιαστική τότε

$$d\left(b^{k-j}\right) = (d(b))^{k-j}$$

Άρα η μερική λύση είναι

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=0}^{k-1} a^j (d(b))^{k-j} \\ &= (d(b))^k \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{d(b)}\right)^j \\ &= (d(b))^k \frac{\left(\frac{a}{d(b)}\right)^k - 1}{\frac{a}{d(b)} - 1} \\ X &= \frac{a^k - (d(b))^k}{\frac{a}{d(b)} - 1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Υπάρχουν 3 περιπτώσεις που πρέπει να μελετηθούν

(α) Εάν $a > d(b)$, τότε η σχέση (3.8) είναι $O(a^k)$ ή $O(n^{\log_b a})$ αφού $k = \log_b n$. Σε αυτή την περίπτωση η μερική και η ομογενής λύση είναι ίσες σε τάξη μεγέθους και εξαρτώνται μόνο από τα a, b και όχι από την οδηγό συνάρτηση $d(n)$.

$$T(n) = O\left(a^k\right) = O\left(n^{\log_b a}\right) \tag{3.9}$$

(β) Εάν $a < d(b)$, τότε η σχέση (3.8) είναι $O\left(d(b)^k\right)$ ή $O\left(n^{\log_b d(b)}\right)$. Σε αυτή την περίπτωση η μερική λύση υπερβαίνει σε τάξη μεγέθους την ομογενή λύση. Άρα αν θέλουμε να κάνουμε βελτιώσεις πρέπει να κοιτάξουμε εκτός από τα a, b και την οδηγό συνάρτηση $d(n)$. (Στην ειδική περίπτωση που $d(n) = n^a$, έχουμε $d(b) = b^a$ και $\log_b(b^a) = a$. Άρα η $T(n) = O(n^a) = O\left(d\left(n\right)\right)$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$T\left(n\right) = O\left(\left(d\left(b\right)\right)^k\right) = O\left(n^a\right) \tag{3.10}$$

(γ) Εάν $a = d(b)$ τότε

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=0}^{k-1} a^j \left(d\left(b\right)\right)^{k-j} \\ &= \left(d\left(b\right)\right)^k \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{d\left(b\right)}\right)^j \\ &= \left(d\left(b\right)\right)^k k \\ &= n^{\log_b d(b)} \log_b n \end{aligned}$$

Αφού $a = d(b)$, παρατηρούμε ότι η μερική λύση είναι κατά $log_b n$ τάξη μεγέθους φορές η ομογενής λύση. Άρα η μερική λύση υπερβαίνει και πάλι την ομογενή λύση. Λέμε λοιπόν ότι

$$T\left(n\right) = O\left(n^{\log_b d(b)} \log_b n\right) \tag{3.11}$$

Παράδειγμα 3.7: Να μελετηθούν οι πιο κάτω σχέσεις αναδρομής

1. $T(n) = 4T(n/2) + n$
2. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
3. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

Σε όλες τις πιο πάνω είναι $T(1) = 1$.

Λύση. Σε κάθε μια από τις πιο πάνω έχουμε για την ομογενή λύση $a = 4, b = 2$ άρα η ομογενής λύση είναι n^2.

(1) Είναι $d(n) = n \Rightarrow d(b) = d(2) = 2$ και $a = 4 \Rightarrow d(b) = 2$. Άρα και η μερική λύση είναι n^2. Επομένως $T(n) = O(n^2)$.

(2) Είναι $d(b) = 4 = a$ άρα η μερική λύση και επομένως και η $T(n)$ είναι $O(n^2 \log n)$.

(3) Είναι $d(n) = n^3 \Rightarrow d(b) = d(2) = 8$ και $a < d(b)$. Επομένως η μερική λύση και επομένως και η $T(n)$ είναι $O\left(n^{\log_b d(b)}\right) = O\left(n^3\right)$. □

3.3.2 Λύση της σχέσης αναδρομής που ορίζεται με συνέλιξη

Έστω η σχέση αναδρομής

$$a_n = a_{n-r}a_0 + a_{n-r-1}a_1 + \ldots + a_0a_r$$

ή

$$a_n = \sum_{l=0}^{n-r} a_{n-r-l}a_l \tag{3.12}$$

η οποία ισχύει για $n \geq k$, όπου k κάποιος ακέραιος. Όπως και στην παράγραφο (3.2.2) θα δεχθούμε ότι $k \geq r$.

Είναι προφανές ότι η τιμή του a_n για $n \geq k$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά όταν οι τιμές των $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ είναι γνωστές. Αυτές οι τιμές των $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ είναι οι αρχικές συνθήκες.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της (3.12) με x^n και παίρνοντας το άθροισμα από $n = k$ μέχρι $n = \infty$ έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=k}^{\infty} \left(a_{n-r}a_0 + a_{n-r-1}a_1 + \ldots + a_0a_{n-r}\right)x^n$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της συνέλιξης και της ολίσθησης έχουμε

$$\begin{aligned} A\left(x\right) - a_0 - a_1x - \ldots - a_{k-1}x^{k-1} = x^r \Big[& A\left(x\right)A\left(x\right) - a_0^2 - \left(a_1a_0 + a_0a_1\right)x - \\ & \ldots - \left(a_{k-r-1}a_0 + a_{k-r-2}a_1 + \ldots + a_0a_{k-r-1}\right)x^{k-r-1}\Big] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Η (3.13) είναι μια αλγεβρική εξίσωση 2ου βαθμού ως προς $A(x)$, η οποία μπορεί να λυθεί. Η $A(x)$ είναι η συνήθης γεννήτρια συνάρτηση και άρα μπορούμε να βρούμε ποια ακολουθία έχει την $A(x)$ γεννήτρια συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.8: Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να βάλουμε παρενθέσεις στην έκφραση

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n$$

έτσι ώστε μόνο 2 όροι να προστίθενται κάθε φορά.

Λύση. Ας είναι a_i ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να βάλουμε παρενθέσεις σε μια έκφραση με i όρους.

Θεωρούμε τις 2 υποεκφράσεις

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-r}, \quad \lambda_{n-r+1} + \lambda_{n-r+2} + \ldots + \lambda_n$$

Άρα υπάρχουν a_{n-r} τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην πρώτη έκφραση και a_r τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην δεύτερη έκφραση. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $a_{n-r}a_r$ τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις σε όλη την έκφραση.

Δηλαδή

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}a_1 + a_{n-2}a_2 + \ldots + a_2a_{n-2} + a_1a_{n-1} \Rightarrow \\ a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}a_k \quad \text{για } n \geq 2 \end{aligned}$$

Προφανώς $a_1 = 1$.

Θέτουμε $a_0 = 0$ και η πιο πάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} a_n &= a_na_0 + a_{n-1}a_1 + \ldots + a_1a_{n-1} + a_0a_n, n \geq 2 \\ a_n &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με x^n και αθροίζοντας από $n = 2$ έως $n = \infty$ έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_na_0 + a_{n-1}a_1 + \ldots + a_1a_{n-1} + a_0a_n\right)x^n$$

$$A(x) - a_1x - a_0 = \left[A(x)\right]^2 - a_0^2 - \left(a_1a_0 + a_0a_1\right)x \Rightarrow$$

$$\left[A(x)\right]^2 - A(x) + x = 0 \Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Αν και υπάρχουν δυο λύσεις για την $A(x)$, θα πάρουμε αυτή τη λύση που μας εξασφαλίζει μια ακολουθία θετικών αριθμών.

Είναι γνωστό (αν όχι αποδείξτε το) ότι η συνάρτηση $(1-4x)^{1/2}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$a_n = -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Άρα θα επιλέξουμε τη λύση

$$A\left(x\right) = 1/2 - 1/2\sqrt{1-4x}$$

για να εξασφαλίσουμε ακολουθία θετικών αριθμών. Η ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A\left(x\right) = 1/2 - 1/2\sqrt{1-4x}$ (ας το αποδείξει ο αναγνώστης). □

Επεκτείνοντας την πιο πάνω περίπτωση μπορούμε να λύσουμε μια μεγαλύτερη κλάση προβλημάτων.

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξής σχέση αναδρομής

$$b_n = a_{n-r}b_0 + a_{n-r-1}b_1 + \ldots + a_0 b_{n-r}$$

ή

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-r} a_{n-r-k} b_k$$

η οποία ισχύει για $n \geq k$, όπου k κάποιος ακέραιος και $k \geq r$.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με x^n και αθροίζοντας από $n = k$ μέχρι $n = \infty$, έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \left(a_{n-r}b_0 + a_{n-r-1}b_1 + \ldots + a_0 b_{n-r}\right) x^n \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
B\left(x\right) - b_0 - b_1 x - \ldots - b_{k-1} x^{k-1} &= \\
= x^r \Big[A\left(x\right) B\left(x\right) - a_0 b_0 - \left(a_1 b_0 + a_0 b_1\right) x - \ldots \\
- \left(a_{k-r-1} b_0 + a_{k-r-2} b_1 + \ldots + a_0 b_{k-r-1}\right) x^{k-r-1} \Big]
\end{aligned}
$$

Εάν τώρα η $A(x)$ ή η $B(x)$ είναι γνωστή μαζί με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες (και αυτές γνωστές), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε είτε την $A(x)$ είτε την $B(x)$.

3.4 Ασκήσεις

3.1 Να λυθούν οι σχέσεις αναδρομής και με τους δύο τρόπους

(α) $a_n + a_{n-1} + 1/4a_{n-2} = 0, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1$

(β) $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2, \quad a_0 = 6,\ a_1 = 7$

(γ) $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_0 = 1$

(δ) $a_n = 2a_{n-1} + n, \quad a_1 = 1$

(ε) $a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0, \quad a_0 = 0,\ a_1 = -2,\ a_2 = 8$

(στ) $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1$

3.2 Να υπολογιστούν οι πιο κάτω $(n \times n)$ ορίζουσες, με τη βοήθεια των σχέσεων αναδρομής

(α)

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{vmatrix}
$$

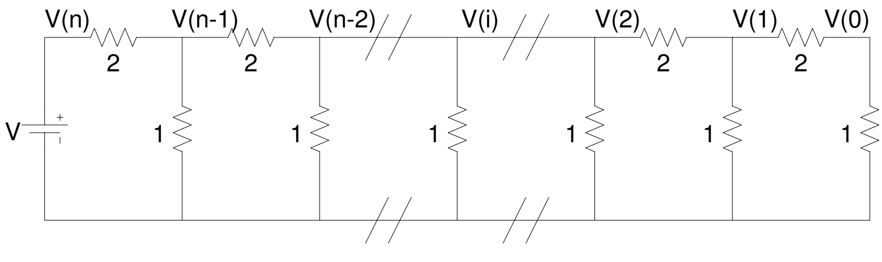
(β)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(γ)

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\alpha^2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1+\alpha^2 \end{vmatrix}$$

3.3 Στο πιο κάτω κύκλωμα να υπολογιστεί η τάση $V(n)$. Δίνεται $V(0) = 1$.



3.4 Έστω ότι στρίβουμε ένα νόμισμα n φορές. Υπάρχουν προφανώς $2n$ ακολουθίες πιθανών αποτελεσμάτων. Ποιος είναι ο αριθμός των ακολουθιών των αποτελεσμάτων στις οποίες ποτέ δεν εμφανίζεται «κεφαλή» σε διαδοχικά στριφίματα;

3.5 Να λυθούν οι σχέσεις αναδρομής

(α) $T(n) = 8T(n/2) + n^3, \quad T(1) = 1$

(β) $T(n) = T(n/2) + 1, \quad T(1) = 1$

(γ) $T(n) = 2T(n/2) + n, \quad T(1) = 1$

(δ) $T(n) = 3T(n/2) + 2n^{1.5}, \quad T(1) = 1$

(ε) $T(n) = 2T(n/2) + n\log n, \quad T(1) = 1$

(στ) $T(n) = 2T(n/2) + \log n, \quad T(1) = 1$

3.6 Έστω a_r να είναι ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε (με επαναλήψεις) r γράμματα από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$, με περιορισμό ότι το γράμμα 0 θα επιλεγεί ζυγές φορές. Βρείτε μια σχέση αναδρομής για το πρόβλημα και λύστε τη (ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσετε γεννήτριες συναρτήσεις).

3.7 Ένας πατέρας δίνει στο γιο του n χιλιάρικα. Ο γιος μπορεί να ξοδέψει τα λεφτά με τον εξής τρόπο:

Κάθε μέρα μπορεί να κάνει μια από τις ακόλουθες αγορές

(α) ένα βιβλίο (τιμή: 1000 δρχ.)

(β) 10 δισκέτες 51/4 (τιμή: 2000 δρχ.)

(γ) 1 θήκη (τιμή: 1000 δρχ.)

Ποιος είναι ο αριθμός των δυνατών τρόπων να ξοδέψει τα χρήματα; Είναι εύκολο να λυθεί το πρόβλημα με μια σχέση αναδρομής 2ου βαθμού. Προσπαθήστε όμως να βρείτε και μια σχέση αναδρομής 1ου βαθμού, η οποία να λύνει το πρόβλημα.

3.8 Ποιος είναι ο αριθμός των τρόπων να ανέβουμε n σκαλιά, εάν εμείς κάθε στιγμή ανεβαίνουμε ένα ή δύο σκαλιά;

3.9 Ένα δυαδικό δέντρο n κορυφών είναι είτε άδειο αν $n = 0$ είτε μια τριάδα $(T_i,\ r,\ T_{n-i-1})$ όπου r είναι ένας διακεκριμένος κόμβος (n ρίζα), T_i είναι ένα δυαδικό δέντρο i κορυφών και T_{n-i-1} είναι ένα δυαδικό δέντρο $n-i-1$ κορυφών (αριστερό και δεξιό υποδέντρο). Πόσα δυαδικά δέντρα n κορυφών υπάρχουν;

3.10 Πόσες ακολουθίες μήκους n μπορούν να σχηματιστούν από τα a, b, c, d με τέτοιο τρόπο ώστε τα a και b να μην είναι ποτέ γειτονικά;

3.11 Με πόσους τρόπους a_n, μπορούμε να τοποθετήσουμε παρενθέσεις στο γινόμενο $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ βάζοντας παρένθεση σε κάθε 2 όρους του γινομένου, έτσι ώστε να πολλαπλασιάζονται 2 όροι κάθε φορά;

3.12 Να βρεθεί ο αριθμός d_n των τριγωνισμών ενός κυρτού n-γώνου. Τριγωνισμός είναι ένα σύνολο από $n-3$ διαγώνιες με κάθε δυο από αυτές να μην τέμνονται στο εσωτερικό του n-γώνου.

3.13 (α) Πόσες ακολουθίες n ψηφίων από τα ψηφία 0,1,2,3 έχουν μονό αριθμό από 0;

(β) Να βρεθεί ο αριθμός των ακολουθιών n ψηφίων από τα 0,1, στις οποίες το δείγμα 010 εμφανίζεται στο n ψηφίο.

3.14 Να βρεθεί ο αριθμός των ακολουθιών n ψηφίων από τα 0,1, στις οποίες μια εμφάνιση του δείγματος 010 ακολουθείται από την εμφάνιση του δείγματος 110.

3.15 Να λυθεί η σχέση αναδρομής $a_n = 10a_{n-1}^2, \quad n \geq 1, \ a_0 = 1$

Κεφάλαιο 4

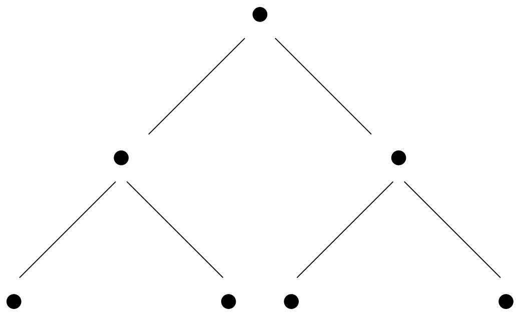
Θεωρία Μέτρησης Pólya

4.1 Εισαγωγή

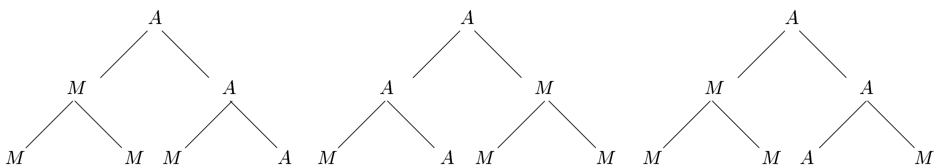
Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μια ειδική κατηγορία προβλημάτων μέτρησης. Στα προβλήματα αυτά, ή τουλάχιστον στις απλούστερές τους μορφές, στόχος είναι να μετρήσουμε τα διαφορετικά είδη μιας ορισμένης κατηγορίας δομών, όταν όμως θεωρούμε ως ισοδύναμες δομές που είναι γεωμετρικά συμμετρικές. Τέτοια προβλήματα προσπάθησε να λύσει, με επιτυχία, ο G. Pólya[1] όταν θέλησε να μετρήσει τα ισομερή σε διάφορες χημικές αντιδράσεις.

Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα πλήρες δυαδικό δένδρο βάθους 2, όπως στο Σχήμα 4.1, και μας ζητείται να βρούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του με δύο χρώματα: άσπρο και μαύρο. Η απάντηση είναι τετριμμένη: 2^7, διότι το δένδρο έχει 7 κορυφές. Αν όμως θελήσουμε να μετρήσουμε τους χρωματισμούς, όταν θεωρήσουμε ότι η αριστερή και η δεξιά κατεύθυνση (του επιπέδου στο οποίο κείται το δένδρο) είναι μη διακεκριμένες, τότε τα πράγματα δυσκολεύουν αρκετά. Κατ' αρχήν όμως ας κάνουμε κατανοητό με παραδείγματα, χωρίς τυπικό ορισμό, τι εννοούμε όταν λέμε ότι η αριστερή και η δεξιά κατεύθυνση είναι μη διακεκριμένες. Στο Σχήμα 4.2 δίνονται μερικοί χρωματισμοί που όλοι είναι ισοδύναμοι όταν οι δύο κατευθύνσεις του επιπέδου είναι μη διακεκριμένες, επομένως οι χρωματισμοί αυτοί θεωρούνται ταυτόσημοι. Αντίθετα, στο Σχήμα 4.3 δίνονται μερικοί χρωματισμοί

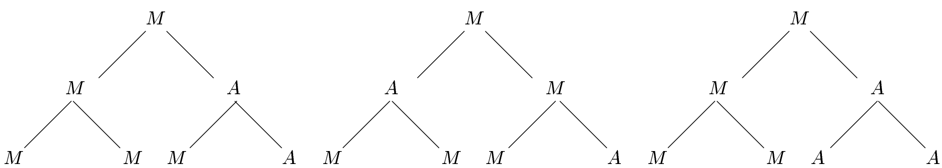
[1] G. Pólya - Ούγγρος Μαθηματικός του 20ου αιώνα.



Σχήμα 4.1: Πλήρες δυαδικό δένδρο



Σχήμα 4.2: Ισοδύναμοι χρωματισμοί



Σχήμα 4.3: Ανά δύο μη ισοδύναμοι χρωματισμοί

που ανά δύο είναι μη ισοδύναμοι, έστω και εάν οι δύο κατευθύνσεις του επιπέδου είναι μη διακεκριμένες, επομένως οι χρωματισμοί αυτοί θεωρούνται ανά δύο διαφορετικοί. Με άλλα λόγια, αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας των χρωματισμών των κορυφών του δένδρου ως προς μία σχέση ισοδυναμίας που προκύπτει όταν ταυτίζουμε τη δεξιά με την αριστερή κατεύθυνση στο επίπεδο.

Ας τοποθετήσουμε όμως το πρόβλημα σε ένα πιο γενικό πλαίσιο. Έστω V ένα μη κενό, πεπερασμένο σύνολο (π.χ. το σύνολο των κορυφών του πλήρους δυαδικού δένδρου βάθους 2) και C ένα μη κενό, πεπερασμένο σύνολο χρωμάτων (στο παράδειγμα μας $C = \{M, A\}$). Το σύνολο C μπορεί να θεωρηθεί και ως αλφάβητο, οπότε τα στοιχεία του ονομάζονται γράμματα. Καλούμε χρωματισμό μία οποιαδήποτε συνάρτηση $f : V \to C$.

Έστω ακόμη ένα σύνολο G αντιμεταθέσεων του V. Αν π_1 και π_2 είναι δύο στοιχεία του G, τότε με $\pi_1\pi_2$ συμβολίζουμε τη σύνθεση των δύο αντιμεταθέσεων, δηλαδή την αντιμετάθεση που ορίζεται ως εξής:

$$\pi_1\pi_2(v) = \pi_1(\pi_2(v)), \forall v \in V.$$

Επίσης, με π_1^{-1} συμβολίζουμε την αντίστροφη της π_1, δηλαδή την αντιμετάθεση για την οποία ισχύει:

$$\pi_1^{-1}(v) = v' \Leftrightarrow \pi_1(v') = v, \forall v \in V.$$

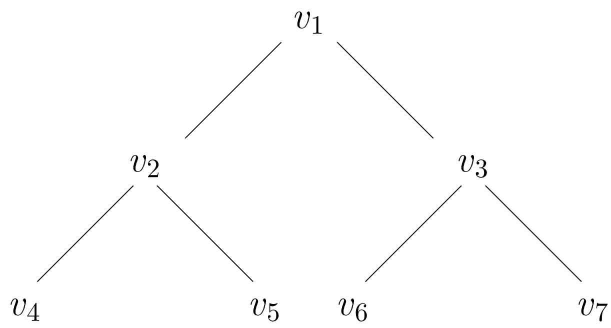
Τέλος με e συμβολίζουμε την ταυτοτική αντιμετάθεση, δηλαδή την αντιμετάθεση για την οποία ισχύει:

$$e(v) = v, \forall v \in V.$$

Υποθέτουμε σε όλα τα επόμενα ότι το σύνολο G των αντιμεταθέσεων του V αποτελεί *ομάδα* ως προς τη σύνθεση, δηλαδή, περιέχει την ταυτοτική αντιμετάθεση e και αν $\pi_1, \pi_2 \in G$, τότε $\pi_1\pi_2 \in G$ και επίσης $\pi_1^{-1} \in G$. Διαισθητικά, το G χαρακτηρίζει τις ταυτοποιήσεις που θέλουμε να εισαγάγουμε. Τα στοιχεία του G καλούνται *συμμετρίες*. Είναι προφανές ότι το σύνολο όλων των αντιμεταθέσεων του V αποτελεί ομάδα. Συνήθως στα συγκεκριμένα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε το σύνολο G είναι μία πολύ μικρότερη σε πλήθος υποομάδα της ομάδας όλων των αντιμεταθέσεων. Στο παράδειγμα με το πλήρες δυαδικό δένδρο βάθους 2, αν $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ είναι οι κορυφές αριθμημένες όπως στο Σχήμα 4.4, τότε η G είναι η ελάχιστη (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι σε σύνολα) ομάδα αντιμεταθέσεων που περιέχει τις ακόλουθες αντιμεταθέσεις (βλ. Παράδειγμα 4.1):

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ v_1 & v_3 & v_2 & v_6 & v_7 & v_4 & v_5 \end{pmatrix},$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_5 & v_4 & v_6 & v_7 \end{pmatrix}.$$



Σχήμα 4.4: Αρίθμηση των κορυφών κατά βάθος

Στις παραπάνω ισότητες, κάτω από κάθε κορυφή γράφεται η εικόνα της ως προς την αντιμετάθεση. Η ελάχιστη (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) ομάδα αντιμεταθέσεων που περιέχει κάποιες δεδομένες αντιμεταθέσεις ονομάζεται ομάδα που *παράγεται* από τις δεδομένες αντιμεταθέσεις. Προκύπτει αν συνδυάσουμε επαναληπτικά μέσω της διμερούς πράξης της σύνθεσης τις δεδομένες αντιμεταθέσεις και τις αντίστροφές τους κατά όλους τους δυνατούς τρόπους.

Αν τώρα f είναι ένας χρωματισμός και $\pi \in G$, τότε $\pi(f)$ είναι ένας νέος χρωματισμός που ορίζεται από τον τύπο:

$$\pi\left(f\right)\left(v\right) = f\left(\pi\left(v\right)\right), \forall v \in V. \tag{4.1}$$

Διαισθητικά, $\pi(v)$ είναι η κορυφή που αντικαθιστά την v όταν η συμμετρία π *δράσει* στο V. Λέμε ότι η κορυφή $\pi(v)$ είναι η συμμετρική της v. Επίσης $\pi(f)$ είναι ο χρωματισμός που προκύπτει όταν όλες οι κορυφές αντικατασταθούν από τις συμμετρικές τους. Έστω τώρα X ένα σύνολο χρωματισμών που είναι κλειστό ως προς τις δράσεις των στοιχείων του G, δηλαδή αν $f \in X$ και $\pi \in G$, τότε $\pi(f) \in X$. Εισάγουμε στο X την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας:

$$f \equiv_G g \Leftrightarrow \left(\exists \pi \in G\right)\left(\pi\left(f\right) = g\right) \tag{4.2}$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι πρόκειται πράγματι για σχέση ισοδυναμίας. Έστω τώρα X/G το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του X ως προς την $\equiv_G$. Το γενικό πρόβλημα που θα επιλύσουμε είναι να βρεθεί ο πληθάριθμος του X/G, δηλαδή ο αριθμός των μη ισοδύναμων χρωματισμών ως προς την ισοδυναμία που καθορίζεται από τη δράση της ομάδας G πάνω στο X.

4.2 Ιδιότητες Αντιμεταθέσεων

Η παράγραφος αυτή αποτελεί μία παρένθεση για να αναπτύξουμε ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες των αντιμεταθέσεων. Θα εργασθούμε με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε το σύνολο V με οκτώ στοιχεία $\{v_1, v_2, \ldots, v_7, v_8\}$ και την αντιμετάθεση του π:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ v_4 & v_3 & v_2 & v_6 & v_5 & v_7 & v_1 & v_8 \end{pmatrix}.$$

Ας σχηματίσουμε μία ακολουθία ξεκινώντας από το πρώτο στοιχείο v_1 του V και γράφοντας στη συνέχεια διαδοχικά τις εικόνες $\pi(v), \pi(\pi(v)), \ldots$ έως ότου ξαναπάρουμε το στοιχείο από όπου ξεκινήσαμε, στο συγκεκριμένο παράδειγμα το v_1. Η ακολουθία που προκύπτει, χωρίς να ξαναγράψουμε το v_1, είναι η (v_1, v_4, v_6, v_7). Η ακολουθία αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η αντιμετάθεση:

$$\pi' = \begin{pmatrix} v_1 & v_4 & v_6 & v_7 \\ v_4 & v_6 & v_7 & v_1 \end{pmatrix}$$

με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{v_1, v_4, v_6, v_7\}$. Αντιμεταθέσεις όπως η π', για τις οποίες η ακολουθία $(v, \pi'(v), \pi'(\pi'(v)), \ldots)$ καλύπτει όλο το πεδίο ορισμού τους για οποιοδήποτε στοιχείο v καλούνται *κυκλικές* αντιμεταθέσεις ή απλώς *κύκλοι*.

Επιστρέφουμε τώρα στην αρχική αντιμετάθεση π και ας θεωρήσουμε το πρώτο στοιχείο του V που δεν καλύφθηκε από τους όρους της ακολουθίας (v_1, v_4, v_6, v_7), δηλαδή το v_2. Ας σχηματίσουμε με τον ίδιο όπως προηγουμένως τρόπο την ακολουθία (v_2, v_3). Επαναλαμβάνοντας τα ίδια για άλλες δύο φορές παίρνουμε τις δύο ακολουθίες (v_5) και (v_8), που έχουν από ένα όρο η κάθε μία. Οι ακολουθίες αυτές αντιστοιχούν επίσης σε κυκλικές αντιμεταθέσεις. Με την παραπάνω διαδικασία λέμε ότι αναλύσαμε την αρχική αντιμετάθεση π σε *γινόμενο κυκλικών αντιμεταθέσεων ξένων μεταξύ τους* και γράφουμε:

$$\pi = (v_1, v_4, v_6, v_7)(v_2, v_3)(v_5)(v_8).$$

Οι κυκλικές αντιμεταθέσεις στο δεξί μέλος του παραπάνω τύπου χαρακτηρίζονται ως ξένες μεταξύ τους διότι τα πεδία ορισμού τους είναι ξένα σύνολα ανά δύο.

Είναι προφανές ότι με την παραπάνω διαδικασία οποιαδήποτε αντιμετάθεση μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ξένων μεταξύ τους κύκλων. Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια τέτοια ανάλυση μπορεί να γίνει κατά μοναδικό τρόπο.

4.3 Τύπος του Burnside

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε και θα αποδείξουμε έναν τύπο για τον πληθάριθμο του συνόλου X/G. Ο τύπος όμως αυτός, γνωστός σαν τύπος του Burnside, δεν είναι πάντοτε εύκολο να εφαρμοσθεί στην πράξη. Γι' αυτό στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε μία συνέπεια του τύπου του Burnside, γνωστή ως Θεώρημα του Pólya, που θα επιτρέψει να υπολογίζουμε το $|X/G|$ πιο εύκολα.

Κατ' αρχήν μερικοί ορισμοί και συμβολισμοί. Έστω $f \in X$ ένας χρωματισμός και $\pi \in G$ μία συμμετρία. Ο χρωματισμός f καλείται αναλλοίωτος ως προς την π αν $\pi(f) = f$. Με $I(\pi)$ συμβολίζουμε το ακόλουθο σύνολο:

$$I(\pi) = \{f \in X | \pi(f) = f\} \tag{4.3}$$

και με $J(f)$ το σύνολο

$$J(f) = \{\pi \in G | \pi(f) = f\}. \tag{4.4}$$

Επίσης το $[f]$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας της f ως προς $\equiv_G$. Ο τύπος του Burnside είναι ο ακόλουθος:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |I(\pi)|. \tag{4.5}$$

Θα δώσουμε τώρα στην απόδειξη του παραπάνω τύπου. Στην αρχή θα αποδείξουμε ότι:

$$\sum_{\pi \in G} |I(\pi)| = \sum_{f \in X} |J(f)|. \tag{4.6}$$

Για την απόδειξη της (4.6) κατασκευάζουμε έναν πίνακα $A = (a_{f\pi}), f \in X, \pi \in G$ που οι γραμμές του αντιστοιχούν σε χρωματισμούς του X και οι στήλες του σε συμμετρίες του G και όπου

$$a_{f\pi} = \begin{cases} 1 \text{ αν } \pi(f) = f, \\ 0 \text{ αν } \pi(f) \neq f. \end{cases}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι και τα δύο μέλη της (4.6) μας δίνουν το άθροισμα όλων των στοιχείων του A. Πράγματι, το αριστερό μέλος της (4.6) προκύπτει αν αθροίσουμε τα στοιχεία κάθε στήλης του A και στη συνέχεια αθροίσουμε τα μερικά αθροίσματα των στηλών (άθροιση κατά στήλες), ενώ το δεξιό μέλος της (4.6) προκύπτει αν αθροίσουμε τα στοιχεία κάθε γραμμής του A και στη συνέχεια αθροίσουμε τα μερικά αθροίσματα των γραμμών (άθροιση κατά γραμμές). Αυτό αποδεικνύει την (4.6).

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\sum_{f\in X} |J(f)| = \sum_{[f]\in X/G} \sum_{g\in[f]} |J(g)|. \tag{4.7}$$

Η σχέση (4.7) προκύπτει απλώς ομαδοποιώντας το άθροισμα του αριστερού της μέλους. Αν τώρα $f, g \in X$, ορίζουμε

$$E(f,g) = \{\pi \in G | \pi(f) = g\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι αν $f \equiv_G g$ τότε $|J(g)| = |E(f,g)|$. Πράγματι έστω $\pi_0 \in E(f,g)$. (Υπάρχει τέτοια π_0, διότι $f \equiv_G g$). Η απεικόνιση $\pi \to \pi\pi_0$, όπως μπορεί εύκολα να ελεγχθεί, αποτελεί μία 1-1 και επί απεικόνιση από $J(g)$ στο $E(f,g)$. Άρα $|J(g)| = |E(f,g)|$. Από την (4.7) λοιπόν προκύπτει

$$\sum_{f\in X} |J(f)| = \sum_{[f]\in X/G} \sum_{g\in[f]} |E(f,g)|. \tag{4.8}$$

Αλλά όμως

$$G = \bigcup_{g\in[f]} E(f,g) \tag{4.9}$$

και επιπλέον αν $g_1 \neq g_2$ τότε

$$E(f,g_1) \bigcap E(f,g_2) = \emptyset. \tag{4.10}$$

Από τις (4.9) και (4.10) έχουμε:

$$|G| = \sum_{g \in [f]} |E\,(f, g)\,|. \tag{4.11}$$

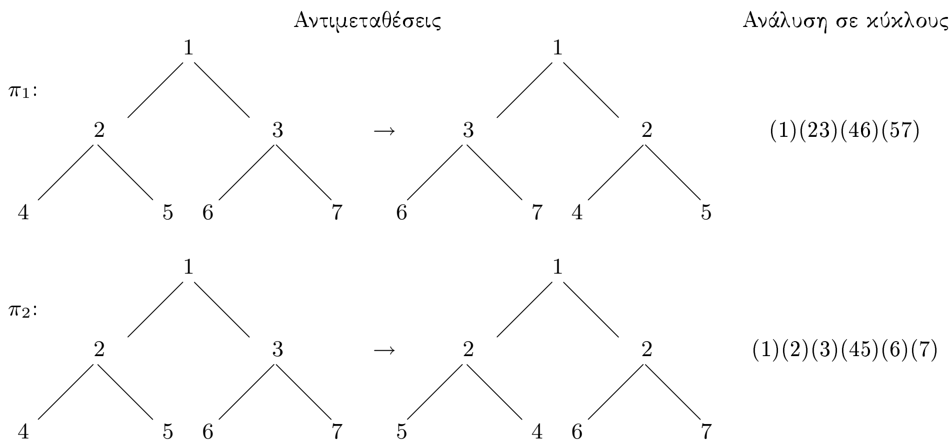
Τέλος από τις (4.8) και (4.11) προκύπτει ότι:

$$\sum_{f \in X} |J\,(f)| = \sum_{[f] \in X/G} |G| = |X/G|\,|G|\,. \tag{4.12}$$

Από την τελευταία σχέση και τη σχέση (4.7) αποδεικνύεται ο τύπος Burnside.

Παράδειγμα 4.1: Με χρήση του τύπου του Burnside να λυθεί το πρόβλημα του χρωματισμού των κόμβων ενός πλήρους δυαδικού δένδρου βάθους 2 (όταν η δεξιά και αριστερή κατεύθυνση είναι μη διακεκριμένες).

Λύση. Η ομάδα των αντιμεταθέσεων G που αντιστοιχεί στη διαισθητική έννοια της μη διάκρισης της δεξιάς κατεύθυνσης από την αριστερή παράγεται από τις παρακάτω αντιμεταθέσεις:



Δηλαδή, όταν οι αντιμεταθέσεις π_1, π_2 και οι αντίστροφές τους συνδυασθούν επαναληπτικά με όλους τους δυνατούς τρόπους, παράγεται η ομάδα G.

Αντιμετάθεση	Ανάλυση σε κύκλους	I(π) = αριθμός των χρωματισμένων δένδρων που παραμένουν αναλλοίωτα
e ταυτοτική	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)	$2^7 = 128$
π_1	(1)(23)(46)(57)	$2^4 = 16$
π_2	(1)(2)(3)(45)(6)(7)	$2^6 = 64$
$\pi_1\pi_2\pi_1$	(1)(2)(3)(4)(5)(67)	$2^6 = 64$
$\pi_1\pi_2\pi_1\pi_2$	(1)(2)(3)(45)(67)	$2^5 = 32$
$\pi_1\pi_2$	(1)(23)(4657)	$2^3 = 8$
$\pi_2\pi_1$	(1)(23)(4756)	$2^3 = 8$
$\pi_2\pi_1\pi_2$	(1)(23)(47)(56)	$2^4 = 16$
		$\sum_{\pi\in G} \lvert I(\pi)\rvert = 336$

Πίνακας 4.1: Ομάδα G των αντιμεταθέσεων που παράγεται από τις π_1, π_2.

Ο Πίνακας 4.3 δίνει στην τελευταία στήλη του για κάθε αντιμετάθεση το πλήθος των χρωματισμών που παραμένουν αναλλοίωτοι ως προς αυτήν. Το πλήθος αυτό το υπολογίζουμε ως εξής: έστω ότι μία αντιμετάθεση, όπως η $\pi_1\pi_2$, η οποία αναλύεται σε γινόμενο τριών ξένων μεταξύ τους κύκλων. Είναι φανερό ότι ένας χρωματισμός f παραμένει αναλλοίωτος από την αντιμετάθεση $\pi_1\pi_2$ αν και μόνον αν οι κορυφές του κάθε κύκλου στην ανάλυση της $\pi_1\pi_2$ παίρνουν το ίδιο χρώμα. Αφού η $\pi_1\pi_2$ έχει τρεις κύκλους και για τις κορυφές του κάθε ενός κύκλου έχουμε δύο επιλογές ενός κοινού χρώματος για να τις χρωματίσουμε έτσι ώστε να προκύψει χρωματισμός που παραμένει αναλλοίωτος ως προς την $\pi_1\pi_2$, συμπεραίνουμε ότι $|I(\pi_1\pi_2)| = 2^3$. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε το $|I(\pi)|$ για όλα τα $\pi \in G$. Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο του Burnside παίρνουμε:

$$|X/G| = \frac{1}{8}\sum_{\pi\in G} |I(\pi)| = 42. \qquad \square$$

4.4 Θεώρημα Pólya

Στο κεφάλαιο 2 είδαμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις μιας μεταβλητής για να υπολογίσουμε τους όρους μίας ακολουθίας $a_k, k = 1, 2, \ldots$ της οποίας οι όροι δίνουν τον πληθάριθμο μιας κλάσης συνδυαστικών αντικειμένων που εξαρτάται από μία παράμετρο, την k. Για να βρούμε το πλήθος κλάσεων που αναφέρονται στο σύνολο χρωματισμών με r χρώματα θα χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις με r μεταβλητές, δηλαδή θα εισαγάγουμε τόσες διαφορετικές μεταβλητές όσα είναι και τα χρώματα. Είναι βολικό να θεωρήσουμε ότι το σύνολο C των χρωμάτων ταυτίζεται με σύνολο $\{x_1, \ldots, x_r\}$ των μεταβλητών. Ένας φυσικός τρόπος να παραστήσουμε έναν χρωματισμό $f : V = \{v_1, \ldots v_n\} \to C$ είναι το μονώνυμο $x_{f(v_1)} x_{f(v_2)} \ldots x_{f(v_r)}$. Το μονώνυμο αυτό συμβολίζεται με m_f. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι έχει βαθμό $n = |V|$. Έστω ακόμη M το σύνολο όλων των μονωνύμων βαθμού $|V|$ στις μεταβλητές $\{x_1, \ldots, x_r\}$.

Είναι επίσης εύκολο να διαπιστωθεί ότι δύο χρωματισμοί που είναι ισοδύναμοι ως προς μία συμμετρία π, έχουν ίσα μονώνυμα. Δηλαδή αν $\pi(f) = g$ τότε $m_f = m_g$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει κατ' ανάγκη. Παριστάνουμε με a_m τον αριθμό των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας (ως προς $\equiv_G$) χρωματισμών που έχουν το ίδιο μονώνυμο $m \in M$. Είναι τότε φανερό ότι

$$\sum_{f \in X/G} m_f = \sum_{m \in M} a_m m. \tag{4.13}$$

Αν τώρα θέσουμε $I_m(\pi) = \{f \in X | \pi(f) = f \text{ και } m_f = m\}$ τότε με βάση τον τύπο του Burnside έχουμε

$$a_m = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |I_m(\pi)|. \tag{4.14}$$

Επομένως από τους τύπους (4.13) και (4.14) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{f \in X/G} m_f = \sum_{m \in M} a_m m &= \sum_{m \in M} \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |I_m(\pi)| m \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{m \in M} |I_m(\pi)| \, m. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Αναδιατάσσοντας όμως αθροίσματα προκύπτει ότι:

$$\sum_{m \in M} |I_m(\pi)| \, m = \sum_{f \in I(\pi)} m_f. \tag{4.16}$$

Από (4.15) και (4.16) προκύπτει ότι

$$\sum_{f \in X/G} m_f = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{f \in I(\pi)} m_f. \tag{4.17}$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε στο άθροισμα $\sum_{f \in I(\pi)} m_f$ μια πιο εύχρηστη μορφή. Έστω ότι αναλύοντας την αντιμετάθεση π σε γινόμενο ξένων μεταξύ τους κύκλων, θα προκύψουν b_i κύκλοι μήκους i, όπου $1 \leq i \leq |V| = n$. Είναι φανερό ότι αν $f \in I(\pi)$, δηλαδή αν $\pi(f) = f$, τότε ο χρωματισμός f παίρνει την ίδια τιμή σε όλα τα στοιχεία ενός κύκλου. Επομένως, επειδή το άθροισμα $\sum_{f \in I(\pi)} m_f$ είναι το άθροισμα των μονωνύμων για όλους τους χρωματισμούς $f \in I(\pi)$, προκύπτει ότι:

$$\sum_{f \in I(\pi)} m_f = (x_1 + \ldots + x_r)^{b_1} \left(x_1^2 + \ldots + x_r^2\right)^{b_2} \ldots (x_1^n + \ldots + x_r^n)^{b_n}. \tag{4.18}$$

Για να δώσουμε τώρα τον τελικό τύπο, απομένει μόνον να δώσουμε έναν επιπλέον ορισμό που απλώς απλοποιεί το συμβολισμό. Καλούμε δείκτρια συνάρτηση για τη συμμετρία $\pi \in G$ τη συνάρτηση

$$\delta_\pi (y_1, \ldots, y_n) = y_1^{b_1} \ldots y_n^{b_n}.$$

Από τις σχέσεις (4.17) και (4.18) έχουμε τώρα ότι

$$\sum_{f \in I(\pi)} m_f = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \delta_\pi (x_1 + \ldots + x_r, \ldots, x_1^n + \ldots + x_r^n). \tag{4.19}$$

Η σχέση (4.19) είναι γνωστή ως θεώρημα του Pólya. Αν και θα διαφανεί καλύτερα στα παραδείγματα, παρατηρήστε ότι ο υπολογισμός του δεξιού μέρους του τύπου είναι σχετικά απλός, επειδή η δείκτρια συνάρτηση μιας συμμετρίας υπολογίζεται εύκολα.

Θέτοντας $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 1$ στη σχέση (4.19) παίρνουμε την πιο κάτω σχέση που λύνει το πρόβλημα που θέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου.

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \delta_\pi (|V|, \ldots, |V|). \tag{4.20}$$

Παράδειγμα 4.2: Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Pólya να λυθεί το Παράδειγμα 4.1.

Λύση.

Αντιμετάθεση	Κυκλική Αναπαράσταση	Δείκτρια Συνάρτηση
e	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)	y_1^7
π_1	(1)(23)(46)(57)	$y_1\ y_2^3$
π_2	(1)(2)(3)(45)(6)(7)	$y_1^5\ y_2$
$\pi_1\pi_2\pi_1$	(1)(2)(3)(4)(5)(67)	$y_1^5\ y_2$
$\pi_1\pi_2\pi_1\pi_2$	(1)(2)(3)(45)(67)	$y_1^3\ y_2^2$
$\pi_1\pi_2$	(1)(23)(4657)	$y_1\ y_2\ y_4$
$\pi_2\pi_1$	(1)(23)(4756)	$y_1\ y_2\ y_4$
$\pi_2\pi_1\pi_2$	(1)(23)(47)(56)	$y_1\ y_2^3$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}\sum_{f\in X/G} m_f &= \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\delta_\pi(y_1,\ldots,y_7)\\ &= \frac{1}{8}\left(y_1^7+2y_1y_2^3+2y_1^5y_2+2y_1y_2y_4+y_1^3y_2^2\right).\end{aligned}$$

Τα χρώματα είναι 2: x_1, x_2, άρα

$$\begin{aligned}\sum_{f\in X/G} m_f =&\frac{1}{8}\Big[(x_1+x_2)^7+2\,(x_1+x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right)^3+2\,(x_1+x_2)^5\left(x_1^2+x_2^2\right)\\ &+2\,(x_1+x_2)+\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^4+x_2^4\right)+(x_1+x_2)^3\left(x_1^2+x_2^2\right)^2\Big].\end{aligned}$$

Αντικαθιστώ $x_1 = x_2 = 1$ και παίρνω

$$\sum_{f\in X/G} m_f = \frac{1}{8}\left(2^7+2\cdot 2\cdot 2^3+2\cdot 2^5\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2^3\cdot 2^2\right)=42 \quad (4.21)$$

□

Παρατήρηση: Αν μας έβαζαν σαν περιορισμό ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το πρώτο χρώμα τουλάχιστον 4 φορές, τότε θα έπρεπε να αναπτύξουμε το παραπάνω πολυώνυμο των x_1, x_2 και να προσθέσουμε τους συντελεστές των μονωνύμων $x_1^i x_2^j$ με $i \geq 4$, ή αλλιώς να θέσουμε $x_2 = 1$ και να βρούμε το συντελεστή του x_1^4.

4.5 Ασκήσεις

4.1 Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών κολιέ που μπορούν να φτιαχτούν από πέντε χάντρες. Να χρησιμοποιηθούν τα χρώματα κίτρινο, μπλε και κόκκινο.

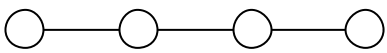
4.2 Θέλουμε να τυπώσουμε όλους τους πενταψήφιους αριθμούς σε φύλλα χαρτιού, με έναν αριθμό σε κάθε φύλλο. Πόσα φύλλα χαρτιού χρειάζονται;

4.3 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να βάψουμε τις τέσσερις πλευρές α,β,γ,δ μιας κανονικής τριγωνικής πυραμίδας χρησιμοποιώντας δύο χρώματα.

4.4 Να υπολογισθεί κατά πόσους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός κανονικού πενταγώνου με τρία χρώματα έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουμε το πρώτο χρώμα τουλάχιστον δύο φορές.

4.5 Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων για να βάψουμε τις οκτώ κορυφές ενός κύβου χρησιμοποιώντας δύο χρώματα.

4.6 Στο σχήμα έχουμε τέσσερις χάντρες σε γραμμική διάταξη.



Μπορούμε να βάψουμε την κάθε χάντρα πράσινη ή κόκκινη. Τα δύο άκρα της διάταξης δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους (δηλαδή η γραμμική διάταξη μπορεί να περιστρέφεται κατά 180° γύρω από το μέσο της). Βρείτε πόσες ξεχωριστές διατάξεις μπορούμε να έχουμε.

4.7 Ένα τραπέζι κυκλικό έχει πέντε θέσεις. Αντιπρόσωποι τριών πολιτικών κομμάτων Α,Β,Γ θα καθίσουν στο τραπέζι (τουλάχιστον ένας από κάθε κόμμα). Πόσοι διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν υπάρχουν; (Δύο τρόποι καθίσματος είναι ισοδύναμοι αν η περιστροφή του ενός δίνει τον άλλο.)

4.8 Οκτώ άνθρωποι σχεδιάζουν να κάνουν διακοπές μαζί. Έχουν υπ' όψη τους τρεις πόλεις. Ανάμεσα στους οκτώ ανθρώπους υπάρχουν πέντε που ανήκουν σε μια οικογένεια και άλλοι τρεις που ανήκουν σε άλλη οικογένεια. Εάν οι άνθρωποι της ίδιας οικογένειας πρέπει να πάνε μαζί, να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούν αυτοί οι οκτώ άνθρωποι να σχεδιάσουν τα ταξίδια τους.

4.9 Βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους για να βάψουμε τρεις μπάλες όταν έχουμε τρία χρώματα.

4.10 Να δειχτεί ότι ο ακέραιος $n^8 + 17n^4 + 6n^2$ διαιρείται από τον 24, για κάθε ακέραιο n. Υπόδειξη: Βρείτε τους τρόπους που μπορούμε να χρωματίσουμε τις ακμές ενός κύβου με n χρώματα.

4.11 Να περιγραφεί προσεκτικά η ομάδα συμμετριών του τετραγώνου και να υπολογισθούν οι δείκτριες συναρτήσεις των συμμετριών.

4.12 Διαιρούμε την παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου σε τέσσερις λωρίδες και χρησιμοποιούμε δύο χρώματα για να βάψουμε τις λωρίδες, έτσι ώστε κάθε μια να βαφεί με το ίδιο χρώμα. Πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί υπάρχουν;

4.13 Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που οι κορυφές ενός τετραγώνου μπορούν να βαφούν με τρία χρώματα x_1, x_2, x_3 με την παραδοχή ότι δύο χρωματισμοί είναι ισοδύναμοι όταν

(α) ο ένας προκύπτει από τον άλλο περιστρέφοντας το τετράγωνο γύρω από κάποιο άξονα ή

(β) ο ένας προκύπτει από τον άλλο αντιμεταθέτοντας τα χρώματα.

4.14 Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε με τέσσερα χρώματα τις κορυφές ενός κανονικού εξάγωνου, το οποίο είναι ελεύθερο να κινείται στο χώρο;

4.15 Υπολογίστε με πόσους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου με τρία χρώματα, έτσι ώστε ακριβώς δύο κορυφές να έχουν το ίδιο χρώμα.

Κεφάλαιο 5

Εγκλεισμός - Αποκλεισμός

5.1 Εισαγωγή

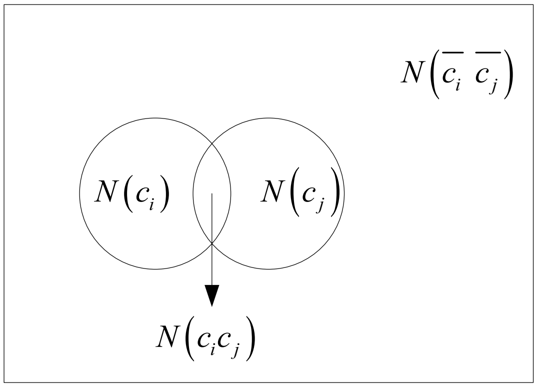
Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε μια συνολο-θεωρητική μέθοδο, η οποία θα μας επιτρέψει να λύσουμε μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων μέτρησης. Η μέθοδος αυτή λέγεται αρχή του Εγκλεισμού - Αποκλεισμού.

Πριν συζητήσουμε αυτή τη μέθοδο θα δώσουμε μερικούς ορισμούς και συμβολισμούς, οι οποίοι θα μας είναι χρήσιμοι για τη συνέχεια.

Ας είναι S ένα σύνολο με πληθικό αριθμό N, δηλαδή $N = |S|$. Έστω $c_1, c_2, \ldots, c_t$ μια συλλογή από συνθήκες, οι οποίες ικανοποιούνται από μερικά ή όλα τα στοιχεία του S. Είναι δυνατόν μερικά στοιχεία του S να ικανοποιούν περισσότερες από μια συνθήκες, ενώ μπορεί κάποια άλλα στοιχεία να μην ικανοποιούν καμιά συνθήκη. Για κάθε i, $1 \leq i \leq t$, ο αριθμός $N(c_i)$ θα δηλώνει τον αριθμό των στοιχείων του S, που ικανοποιούν τη συνθήκη c_i. Είναι άμεσο συμπέρασμα ότι για κάθε i, $1 \leq i \leq t$, ο αριθμός $N(\overline{c_i}) = N - N(c_i)$ μετρά τον αριθμό των στοιχείων του S, τα οποία δεν ικανοποιούν τη συνθήκη c_i.

Παράδειγμα 5.1: Σε μια τάξη υπάρχουν 100 μαθητές, οι οποίοι παρακολουθούν το μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι». Από αυτούς οι 30 έχουν το μάθημα σαν επιλογή. Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών που το έχουν υποχρεωτικό;

Λύση. Εδώ η ιδιότητα είναι, ότι κάποιος μαθητής έχει σαν επιλογή το μάθημα «Διακριτά Μαθηματικά Ι». Άρα ο αριθμός των μαθητών που το έχουν



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα Venn

υποχρεωτικό είναι

$$N(\text{όχι επιλογή, αλλά υποχρεωτικό}) = N - N(\text{επιλογή})$$
$$N(\text{όχι επιλογή, αλλά υποχρεωτικό}) = 100 - 30 = 70 \qquad \square$$

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε για 2 συνθήκες μαζί. Για κάθε $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, t\}$, με $i \neq j$ ο αριθμός $N(c_i c_j)$ δηλώνει τον αριθμό των στοιχείων του S, τα οποία ικανοποιούν και τις δυο συνθήκες c_i, c_j (και πιθανώς και κάποιες άλλες). Τώρα για κάθε i, j, με $1 \leq i, j \leq t$ και $i \neq j$, ο αριθμός $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j})$ μετρά τον αριθμό των στοιχείων του S τα οποία δεν ικανοποιούν είτε τη συνθήκη c_i ή την c_j.

Προσοχή ο αριθμός $N(c_i c_j)$ δεν είναι ίδιος με τον αριθμό $N(\overline{c_i}\ \overline{c_j})$. Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα Venn παίρνουμε τη πιο κάτω εικόνα. Από το Σχ. 5.1 έχουμε ότι:

$$N\left(\overline{c_i}\ \overline{c_j}\right) = N - \left[N\left(c_i\right) + N\left(c_j\right)\right] + N\left(c_i c_j\right)$$

Είναι εύκολο να πάρουμε τη πιο πάνω σχέση, αν χρησιμοποιήσουμε το Νόμο του de Morgan.

Παράδειγμα 5.2: Σε ένα σχολείο υπάρχουν 100 μαθητές και από αυτούς οι 50 μιλάνε Γαλλικά, οι 40 Λατινικά και 20 μιλάνε και τις 2 γλώσσες. Πόσοι μαθητές δεν μιλάνε καμιά γλώσσα.

Λύση. Οι ιδιότητες είναι 2.

Ιδιότητα F, ο μαθητής μιλά Γαλλικά και η ιδιότητα L, ο μαθητής μιλά Λατινικά.

Τα δεδομένα μας είναι τα πιο κάτω:

$$N = 100,\ N(F) = 50,\ N(L) = 40,\ N(FL) = 20$$

Εδώ το ζητούμενο είναι ο αριθμός $N(\overline{F}\ \overline{L})$. Από το Σχ. 5.1 έχουμε:

$$N\left(\overline{F}\ \overline{L}\right) = N - (N(F)\,N(L)) + N(FL) = 30 \qquad \square$$

Στην επόμενη παράγραφο θα γενικεύσουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στο πιο πάνω παράδειγμα.

5.2 Η αρχή του Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

Θα δώσουμε ένα θεώρημα και την απόδειξη του.

Θεώρημα: Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο S, με πληθικό αριθμό $|S| = N$ και τις συνθήκες c_i, $1 \le i \le t$, οι οποίες ικανοποιούνται από μερικά στοιχεία του S. Ο αριθμός των στοιχείων του S, τα οποία δεν ικανοποιούν καμία από τις συνθήκες c_i, $1 \le i \le t$, είναι:

$$\begin{aligned}
\overline{N} &= N\left(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ldots\overline{c_t}\right) \text{ όπου} \\
\overline{N} &= N - \left[N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \ldots + N(c_t)\right] \\
&\quad + \left[N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots + N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \ldots + N(c_{t-1}c_t)\right] \\
&\quad - \left[N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \ldots + N(c_1c_2c_t) + N(c_1c_3c_4) + \ldots\right. \\
&\quad \left. + N(c_1c_3c_t) + \ldots + N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)\right] + \ldots + (-1)^t N(c_1c_2c_3\ldots c_t)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

ή

$$\begin{aligned}
\overline{N} &= N - \sum_{1\le i\le t} N(c_i) + \sum_{1\le i<j\le t} N(c_ic_j) - \sum_{1\le i<j<k\le t} N(c_ic_jc_k) + \ldots \\
&\quad + (-1)^t N(c_1c_2c_3\ldots c_t)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Απόδειξη. Είναι εύκολο να αποδειχθεί το θεώρημα με επαγωγή στο t. Εμείς όμως θα δώσουμε μια συνδυαστική απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in S$, πως αυτό συμμετέχει το ίδιο, είτε 0 ή 1, σε κάθε μέρος της (5.1).

Εάν το x δεν ικανοποιεί καμιά από τις συνθήκες, τότε το x προσμετριέται μια φορά στο $\overline{N}$ και μια φορά στο N, αλλά καμιά φορά σε κάθε άλλο όρο της (5.1). Επομένως, το x συμμετέχει μια φορά με 1 σε κάθε μέρος της σχέσης.

Η άλλη περίπτωση είναι το x να ικανοποιεί ακριβώς r από τις συνθήκες, με $1 \leq r \leq t$. Σε αυτή τη περίπτωση το x δεν συμμετέχει στο $\overline{N}$. Αλλά στο δεξιό μέρος της (5.1), το x προσμετριέται.

1. Μια φορά στο N.
2. r φορές στο $\sum\limits_{1 \leq i \leq t} N(c_i)$ (Μια φορά για κάθε μία από τις r συνθήκες).
3. $\binom{r}{2}$ Φορές στο $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq t} N(c_i c_j)$ (Μια φορά για κάθε ζεύγος συνθηκών που επιλέγεται από τις r συνθήκες, τις οποίες ικανοποιεί).
4. $\binom{r}{3}$ φορές στο $\sum\limits_{1 \leq i < j < k \leq t} N(c_i c_j c_k)$.

   ...

r+1. $\binom{r}{r} = 1$ φορά στο $\sum N(c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_r})$.

Άρα στο δεξιό μέρος της (5.2), το x προσμετριέται.

$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0^r = 0 \text{ φορές}$$

Επομένως, τα 2 μέρη της σχέσης μετρούν τα ίδια στοιχεία του S και άρα η ισότητα ικανοποιείται. □

Συμπέρασμα: Σύμφωνα με τις υποθέσεις του θεωρήματος, ο αριθμός των στοιχείων του S τα οποία ικανοποιούν τουλάχιστον μια από τις συνθήκες c_i, $1 \leq i \leq t$, είναι:

$$N(c_1 \text{ ή } c_2 \text{ ή } c_3 \text{ ή } \ldots \text{ ή } c_t) = N - \overline{N}$$

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, θα δώσουμε μια συντομογραφία. Ας είναι:

$$S_0 = N$$
$$S_1 = [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \ldots + N(c_t)]$$
$$S_2 = [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots + N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + \ldots + N(c_{t-1}c_t)]$$

και επομένως γενικά

$$S_k = \sum N(c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k}),\ 1 \leq k \leq t$$

Τα αθροίσματα παίρνονται πάνω σε όλες τις επιλογές μεγέθους k από τη συλλογή των t συνθηκών. Άρα το S_k έχει $\binom{t}{k}$ όρους.

Παράδειγμα 5.3: Με πόσους τρόπους μπορούν τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφάβητου να αντιμετατεθούν έτσι ώστε κανένα από τα παρακάτω δείγματα να μην εμφανιστούν. Τα δείγματα είναι car, dog, pun, byte.

Λύση. Έστω S το σύνολο όλων των αντιμεταθέσεων των 26 γραμμάτων. Προφανώς $|S| = 26!$. Για κάθε i, $1 \leq i \leq 4$, μια αντιμετάθεση στο S λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη c_i, εάν η αντιμετάθεση περιέχει τα δείγματα car ή dog ή pun ή byte.

Είναι:

$$N(\text{ περιέχει το δείγμα car }) = N(c_1) = 24!$$
$$N(\text{ περιέχει το δείγμα dog }) = N(c_2) = 24!$$
$$N(\text{ περιέχει το δείγμα pun }) = N(c_3) = 24!$$
$$N(\text{ περιέχει το δείγμα byte }) = N(c_4) = 23!$$

Ακόμα έχουμε ότι:

$$N(c_1c_2) = N(c_1c_3) = N(c_2c_3) = 22!$$
$$N(c_ic_4) = 21!,\ i \neq 4$$

και

$$N(c_1c_2c_3) = 20!$$
$$N(c_ic_jc_4) = 19!,\ 1 \leq i < j < 3$$
$$N(c_1c_2c_3c_4) = 17!$$

Επομένως

$$N\left(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\right) = 26! - [3\,(24!) + 23!] + [3\,(22!) + 3\,(21!)] - [20! + 3\,(19!)] + 17!$$

□

Παράδειγμα 5.4: Για $n \in Z^+$, ας είναι $\phi(n)$ ο αριθμός των θετικών ακεραίων m, όπου $1 \leq m < n$ και $(m,n) = 1$, δηλαδή m, n είναι σχετικά πρώτοι. Αυτή η συνάρτηση είναι γνωστή σαν συνάρτηση ϕ του $Euler$[1]. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $\phi(2) = 1, \phi(3) = 2, \phi(4) = 2, \phi(5) = 2$ και $\phi(6) = 2$. Για κάθε πρώτο αριθμό p είναι $\phi(p) = p - 1$. Να βρεθεί ένας τύπος που να μας δίνει το $\phi(n)$.

Λύση. Για κάθε $n \leq 2$ μπορούμε να γράψουμε το n σαν $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_t^{e_t}$ όπου $p_1, p_2, \ldots, p_t$ είναι διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί και $e_i \geq 1, 1 \leq i \leq t$. Για ευκολία στις πράξεις θα θεωρήσουμε $t = 4$ και στη συνέχεια είναι εύκολο να γενικευθεί ο τύπος.

Είναι $S = \{l, 2, 3, \ldots, n\}$, $N = |S| = n$ και για $1 \leq i \leq 4$ λέμε ότι $k \in S$ και ικανοποιεί τη συνθήκη c_i, εάν το k είναι διαιρέσιμο από το p_i. Για $1 \leq k \leq n$, $(k, n) = 1$, εάν k δεν είναι διαιρετό από κανένα πρώτο p_i, $1 \leq i \leq 4$. Επομένως είναι:

$$\phi\,(n) = N\left(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\right)$$

Για $1 \leq i \leq 4,\ N(c_i) = n/p_i,\ N(c_i c_j) = n/(p_i p_j),\ 1 \leq i < j \leq 4.$

Επίσης είναι:

$$N\left(c_i c_j c_k\right) = n/\left(p_i p_j p_k\right),\ 1 \leq i < j < k \leq 4$$

και

$$N\left(c_1 c_2 c_3 c_4\right) = n/\left(p_1 p_2 p_3 p_4\right)$$

[1] L. Euler Ελβετός Μαθηματικός του 18ου αιώνα από τους μεγαλύτερους στην ιστορία.

Επομένως

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \\
&= n - \left[\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_4}\right] + \left[\frac{n}{p_1p_2} + \frac{n}{p_1p_3} + \ldots + \frac{n}{p_3p_4}\right] \\
&\quad - \left[\frac{n}{p_1p_2p_3} + \ldots + \frac{n}{p_2p_3p_4}\right] + \frac{n}{p_1p_2p_3p_4} = \\
&= n\left[1 - \left(\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_4}\right) + \left(\frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_1p_3} + \ldots + \frac{1}{p_3p_4}\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{p_1p_2p_3} + \ldots + \frac{1}{p_2p_3p_4}\right) + \frac{n}{p_1p_2p_3p_4}\right] = \\
&= \frac{n}{p_1p_2p_3p_4}\left[p_1p_2p_3p_4 - (p_2p_3p_4 + p_1p_3p_4 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_3)\right. \\
&\quad + (p_3p_4 + p_2p_4 + p_2p_3 + p_1p_4 + p_1p_3 + p_1p_2) \\
&\quad \left. - (p_4 + p_3 + p_2 + p_1) + 1\right] = \\
&= \frac{n}{p_1p_2p_3p_4}\left[(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(p_4-1)\right] = \\
&= n\left[\frac{p_1-1}{p_1}\frac{p_2-1}{p_2}\frac{p_3-1}{p_3}\frac{p_4-1}{p_4}\right] = n\prod_{i=1}^{4}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να γενικεύσουμε και να καταλήξουμε ότι:

$$\phi(n) = n\prod_{p/n}\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

όπου το γινόμενο παίρνεται πάνω σε όλους τους πρώτους που διαιρούν το n.

Παράδειγμα 5.5: Πόσοι είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διανείμουμε r διακεκριμένα αντικείμενα σε 5 (διακεκριμένα) κουτιά έτσι ώστε ένα τουλάχιστον κουτί να 'ναι άδειο;

Λύση. Ας είναι A_i η ιδιότητα ότι το κουτί i μένει άδειο σε κάποια διανομή ή διανομές. Αυτό που ζητάμε εμείς είναι το $N(A_1 \text{ ή } A_2 \text{ ή } \ldots \text{ ή } A_5)$. Αλλά αυτό με βάση το συμπέρασμα είναι:

$$\begin{aligned}
N(A_1 \text{ ή } A_2 \text{ ή } \ldots \text{ ή } A_5) &= N - \overline{N} = N - N\left(\overline{A_1}\;\overline{A_2}\;\overline{A_3}\;\overline{A_4}\;\overline{A_5}\right) \\
&= N - (N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4)
\end{aligned}$$

όπου S_i ο αριθμός των τρόπων να διανείμουμε τα αντικείμενα ώστε τουλάχιστον i στο πλήθος κουτιά άδεια

$$N\left(A_1 \text{ ή } A_2 \text{ ή } \ldots \text{ ή } A_5\right) = \binom{5}{1}4^r - \binom{5}{2}3^r + \binom{5}{3}2^r - \binom{5}{4}1^r \qquad \square$$

5.3 Ασκήσεις

5.1 Πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων $0, 1, 2, \ldots, 9$ υπάρχουν στις οποίες το πρώτο ψηφίο να 'ναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να 'ναι μικρότερο από το 8;

5.2 Πόσοι ακέραιοι μικρότεροι του 70 είναι σχετικά πρώτοι με το 70 (Σχετικά πρώτοι σημαίνει ότι δεν έχουν κοινούς διαιρέτες);

5.3 Πόσες λέξεις n-ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ υπάρχουν με ένα τουλάχιστον 0, με ένα τουλάχιστον 1 και με ένα τουλάχιστον 2;

5.4 Σε ένα σχολείο υπάρχουν 1.000 μαθητές. Από αυτούς οι 400 μιλάνε Γαλλικά, οι 300 Ιταλικά και 200 μιλάνε Γερμανικά. Εάν υπάρχουν 200 μαθητές που μιλάνε οποιεσδήποτε 2 γλώσσες και 100 μαθητές που μιλάνε και τις 3 γλώσσες, πόσοι είναι οι μαθητές που δεν μιλάνε καμιά γλώσσα;

5.5 Να λυθεί το Παρ. 5.5.4 στη γενική περίπτωση.

5.6 Να βρεθεί ο αριθμός των θετικών ακεραίων $n, 1 \leq n \leq 100$ και n μη διαιρέσιμος με 2,3 και 5.

5.7 Ένας φοιτητής θέλει να φτιάξει ένα πρόγραμμα για μια χρονική περίοδο 7 ημερών έτσι ώστε κάθε μέρα να μελετά ένα μόνο μάθημα. Τα μαθήματα είναι: μαθηματικά, φυσική, χημεία και οικονομία. Να βρεθεί ο αριθμός αυτών των προγραμμάτων.

5.8 Πόσες διαφορετικές ακέραιες λύσεις υπάρχουν για την εξίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20, \;\; 0 \leq x_i \leq 8$$

5.9 Να βρεθεί ο αριθμός των αντιμεταθέσεων των γραμμάτων του λατινικού αλφαβήτου a,b,c,...,x,y,z, στις οποίες δεν εμφανίζονται τα δείγματα spin, game, path και net.

5.10 Έστω τα πεπερασμένα σύνολα A, B με $|A| = m, |B| = n$ και $m \geq n$. Ας είναι $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ και $S =$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to B$. Προφανώς $N = |S| = n^m$. Για $1 \leq i \leq n$, ας είναι c_i η συνθήκη στο S που ικανοποιείται, όταν η συνάρτηση $f : A \to B$ δεν έχει στο πεδίο τιμών της το b_i. Τότε $N(\overline{c_i})$ είναι ο αριθμός των συναρτήσεων στο S, οι οποίες έχουν στο πεδίο τιμών τους το b_i. Να βρεθεί ο αριθμός N.

Βιβλιογραφία

1. Aho A., Hopcroft J., Ullman J., “The design and analysis of computer algorithms”, Addison-Wesley 1974.

2. Aho A., Hopcroft J., Ullman J., “Data structures and algorithms”, Addison-Wesley 1983.

3. Behzad M., Chartrand G., Lesniak-Foster L., “Graphs and Digraphs”, Wadsworth International Group 1981.

4. DeBruijn N., “Pólya’s Theory of Counting”, In Applied Combinatorial Mathematics, ed. Beckenbach, John Wiley 1964.

5. Feller W., “An Introduction to Probability Theory and its Application”, Vol. I. 3rd ed., John Willey 1968.

6. Harary F., “Graph Theory”, Addison-Wesley 1972.

7. Graham R., Knuth D., Patashnik O., “Concrete Mathematics”, Addison-Wesley 1989.

8. Grimaldi R., “Discrete and Combinatorial Mathematics An Applied introduction”, Second Edition, Addison-Wesley 1984.

9. Liu C, “Elements of Discrete Mathematics”, Second Edition, McGraw-Hill 1985.

10. Liu C, “Introduction to Combinatorial Mathematics”, McGraw-Hill 1968.

11. Lovasz L., “Combinatorial Problems and Exercises”, North-Holland 1979.

12. Lueker G., “Some Techniques for Solving Recurrences”, Computing Surveys, Vol. 12, No. 4, December 1980.

13. J Marshall H., “Combinatorial Theory”, Second Edition, John Wiley and Sons, 1986.

14. Pólya G., “Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und Chemishe Verbindungen”, Acta Informatica 68, 1937, pp. 145-254.

15. Read R., “Pólya’s Theorem and its Progeny”, Mathematics Magazine 60, No. 5, December 1987, pp. 275-282.

16. Reingold M., Nievergelt J., Deo N., “Combinatorial Algorithms: Theory and Practice”, Englewood Cliffs 1977.

17. Riordan J., “An Introduction to Combinatorial Analysis”, John Wiley 1958.

18. Ross K.A., C.R.B Wright, “Discrete Mathematics”, Prentice Hall, 1985.

19. Tomescu I. and Melter R., “Problems in Combinatorics and Graph Theory”, John Wiley and Sons, 1985.

20. Townsend M., “Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory”, Benjamin/Cummings Publishiny Company, 1987.

21. Tucker A., “Applied Combinatorics”, Second Edition, John Wiley and Sons 1984.

22. “Topics in Combinatorial Mathematics”, Mathematical Association of America, 1972.

Βιβλίο ΙΙ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Προβλήματα και Λύσεις

Γιώργος Α. Βουτσαδάκης
Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό δεν αποτελεί μόνο τη συνέχεια προηγούμενου βιβλίου μας, με τίτλο "*ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Τα Μαθηματικά της Επιστήμης των Υπολογιστών*", αλλά είναι και από μόνο του ένα αυτόνομο βιβλίο. Περιέχει ένα μεγάλο πλήθος από λυμένες ασκήσεις. Πολλές από αυτές διδάχθηκαν στα φροντιστήρια του μαθήματος Διακριτά Μαθηματικά Ι, στο τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου της Πάτρας και άλλες από αυτές εξετάσθηκαν σαν θέματα στις εξετάσεις.

Πιστεύουμε πως η προσπάθεια που γίνεται με την έκδοση αυτού του βιβλίου, θα καλύψει το γνωστικό αντικείμενο της περιοχής. Κριτές όμως, θα είναι οι αναγνώστες. Σε αυτούς το παραδίδουμε με την ευχή να τους βοηθήσει στην προσπάθεια τους.

Θέλουμε να ευχαριστήσουμε όλους τους φοιτητές του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους και τα σχόλια που έκαναν στα χειρόγραφα κείμενα, αυτής της προσπάθειας μας. Ακόμα ευχαριστούμε τον εκδοτικό οίκο GUTENBERG για την έκδοση αυτού του βιβλίου.

Τελειώνοντας θέλουμε να ευχαριστήσουμε μια σειρά από ανθρώπους που βοήθησαν, ώστε το βιβλίο να πάρει την τελική του μορφή. Χωρίς τον Βαγγέλη Καπούλα και τον Αντώνη Τατάκη θα ήταν αρκετά δύσκολο, το βιβλίο να έχει αυτή την εικόνα. Τους ευχαριστούμε θερμά.

ΠΑΤΡΑ, Γενάρης 1994

Γιώργος Α. Βουτσαδάκης
Λευτέρης Μ. Κυρούσης
Χρήστος Ι. Μπούρας
Παύλος Γ. Σπυράκης

Κεφάλαιο 1

Στοιχειώδης Συνδυαστική

I don't know why she's leaving
Nor where she's got to go
I guess she's got some reasons
But I just don't want to know
'Cause for twenty four years
I've been living next door to Alice ...

Twenty four years just waiting for a chance
To tell her how I feel
And maybe get a second glance
Now I'll never get used
To not living next door to Alice ...

Living Next Door to Alice
SMOKIE

Άσκηση 1.1. *Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 3 αριθμοί από τους αριθμούς 1 εώς 300, έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι διαιρετό διά 3 ; (Σημειώνεται ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά των αριθμών)*

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 300\}$. Χωρίζουμε το Ω σε τρία υποσύνολα Α,Β,Γ τέτοια ώστε $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$ και $A \cap B = \emptyset, B \cap \Gamma = \emptyset$ και $A \cap \Gamma = \emptyset$, ως εξής: Το Α περιέχει όλους τους ακέραιους $x \in \Omega : x \bmod 3 = 0$, δηλαδή $A = \{3, 6, 9, \ldots, 300\}$. Το Β περιέχει όλους τους $y \in \Omega : y \bmod 3 = 1$, δηλαδή $B = \{1, 4, 7, \ldots, 298\}$, και το Γ περιέχει όλους τους $z \in \Omega : z \bmod 3 = 2$, δηλαδή $\Gamma = \{2, 5, 8, \ldots, 299\}$. Είναι προφανές ότι $|A| = |B| = |\Gamma| = 100$.

Για να είναι το άθροισμα τριών αριθμών του Ω διαιρετό διά 3 πρέπει είτε και οι 3 αριθμοί να ανήκουν στο Α, είτε και οι 3 στο Β, είτε και οι 3 στο Γ, είτε τέλος να ανήκει ένας αριθμός σε καθένα από τα 3 αυτά υποσύνολα του Ω. Τότε οι δυνατοί τρόποι επιλογής είναι,

$$\tbinom{100}{3} + \tbinom{100}{3} + \tbinom{100}{3} + \tbinom{100}{1}\tbinom{100}{1}\tbinom{100}{1} = 3\tbinom{100}{3} + 100^3 = 1485100$$

Άσκηση 1.2. *Πόσοι από τους ακέραιους αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ του 1 και του 10000000000 περιέχουν το ψηφίο 1 και πόσοι δεν το περιέχουν;*

Μεταξύ των αριθμών 0 και 9999999999 υπάρχουν 9^{10} ακέραιοι που δεν περιέχουν το ψηφίο 1. Αυτό συμβαίνει γιατί το πλήθος των αριθμών αυτών ισούται με τον αριθμό των διατάξεων 9 στοιχείων (των 0,2,3,...,9) σε 10 θέσεις με επανάληψη. Συνεπώς μεταξύ του 1 και του 10000000000 υπάρχουν $9^{10} - 1$ ακέραιοι που δεν περιέχουν το ψηφίο 1 και επομένως $10^{10} - 9^{10} + 1$ ακέραιοι που περιέχουν το ψηφίο 1.

Άσκηση 1.3. *Να βρεθεί ο αριθμός των τετραψήφιων αριθμών του δεκαδικού συστήματος, που δεν έχουν δύο ίδια ψηφία.*

Για να είναι τετραψήφιος ο αριθμός πρέπει στην πρώτη θέση του να επιλέξουμε ένα από τα ψηφία 1 εώς 9. Επειδή δεν πρέπει να έχει δύο ίδια ψηφία, η επιλογή του ψηφίου για τη δεύτερη θέση μπορεί να γίνει με 9 τρόπους, δηλαδή να επιλέξουμε είτε το 0 είτε κάποιο από τα 8 ψηφία από 1 εώς 9, που δεν βάλαμε στην πρώτη θέση. Κατ' αναλογία η τρίτη θέση δύναται να πληρωθεί με 8 τρόπους και η τελευταία θέση με 7 τρόπους. Άρα το πλήθος των αριθμών αυτών είναι συνολικά,

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

Άσκηση 1.4. *Με πόσους τρόπους μπορούν να βαφούν 12 γραφεία έτσι ώστε 3 απ' αυτά να είναι κόκκινα, 2 ροζ, 2 λευκά και τα υπόλοιπα πράσινα;*

Για να υπολογίσουμε τους ζητούμενους τρόπους βαφής των γραφείων σκεφτόμαστε ως εξής: Παίρνουμε μία τυχούσα διάταξη των γραφείων. Θεωρούμε ότι σε κάθε τέτοια διάταξη (μετάθεση) τα 3 πρώτα σε σειρά γραφεία θα τα βάψουμε κόκκινα, τα επόμενα 2 ροζ, τα επόμενα 2 λευκά και τα υπόλοιπα 5 πράσινα. Αφού τα 3 πρώτα γραφεία θα είναι κόκκινα δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τους (μέσα στην τριάδα) και ομοίως δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των γραφείων μέσα στο ροζ και λευκό ζευγάρι, όπως και μέσα στην πράσινη πεντάδα. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο αριθμός των διατάξεων r αντικειμένων είναι r!, έχουμε σαν απάντηση,

$$\frac{12!}{3!2!2!5!} = 166320$$

Άσκηση 1.5. *Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να καθήσουν 5 φοιτητές σε μία σειρά από 12 έδρανα;*

1ος τρόπος:
Το πρόβλημα ισοδυναμεί με το πρόβλημα της διάταξης 12 αντικειμένων τα οποία ανήκουν σε έξι διαφορετικά είδη: τα πέντε είδη είναι τα πέντε έδρανα με τους φοιτητές και το έκτο, στο οποίο ανήκουν επτά αντικείμενα, είναι τα άδεια έδρανα. Συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι $\frac{12!}{7!} = 95040$.
2ος τρόπος:
Διατάσσουμε τους πέντε φοιτητές σε μία σειρά κατά 5! τρόπους και στη συνέχεια μοιράζουμε τα επτά άδεια έδρανα αυθαίρετα είτε μεταξύ των φοιτητών είτε στις δύο άκρες της σειράς. Ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτή η μοιρασιά είναι ίσος με τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης επτά όμοιων σφαιρών σε έξι διαφορετικά κουτιά και είναι ίσος με $\binom{6+7-1}{7}$. Συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, $5! \cdot \binom{12}{7} = \frac{12!}{7!}$.

Άσκηση 1.6. *Να βρεθεί ο αριθμός των διαιρετών του 180.*

Κάνουμε ανάλυση του 180 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων,

$$180 = 2 \cdot 90 = 2^2 \cdot 45 = 2^2 \cdot 3 \cdot 15 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Οι δυνατοί διαιρέτες του 180 είναι, σύμφωνα με τη Θεωρία Αριθμών, εκείνοι οι αριθμοί, οι οποίοι έχουν τη μορφή $2^k 3^m 5^n$ με $0 \leq k \leq 2, 0 \leq m \leq 2$ και $0 \leq n \leq 1$. Συνεπώς έχουμε 3 τρόπους επιλογής του παράγοντα 2, 3 τρόπους επιλογής του παράγοντα 3 και 2 τρόπους επιλογής του παράγοντα 5. Άρα από τον κανόνα του γινομένου ο αριθμός των δυνατών διαιρετών του 180 είναι,

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

Άσκηση 1.7. *Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 1400 ;*

Κάνουμε ανάλυση του 1400 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

$$1400 = 2 \cdot 700 = 2^2 \cdot 350 = 2^3 \cdot 175 = 2^3 \cdot 5 \cdot 35 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Οι δυνατοί διαιρέτες του 1400 είναι, σύμφωνα με τη Θεωρία Αριθμών, εκείνοι οι αριθμοί, οι οποίοι γράφονται με τη μορφή $x = 2^{\varkappa} 5^{\lambda} 7^{\mu}$ με $0 \leq \varkappa \leq 3, 0 \leq \lambda \leq 2$ και $0 \leq \mu \leq 1$. Δηλαδή υπάρχουν 4 τρόποι επιλογής του παράγοντα 2, 3 τρόποι επιλογής του παράγοντα 5 και 2 τρόποι επιλογής του παράγοντα 7. Έτσι όλοι οι δυνατοί διαιρέτες θα είναι σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου,

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Άσκηση 1.8. *Ενα ντόμινο είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε σε καθένα από τα δύο τετράγωνα κάθε κομματιού να υπάρχουν μία, δύο, τρεις, τέσσερις, πέντε ή έξι τελείες ή να είναι κενό. Πόσα διαφορετικά κομμάτια μπορεί να περιέχει αυτό το ντόμινο;*

Ο αριθμός των κομματιών στο ντόμινο ισούται με τον αριθμό των τρόπων επιλογής δύο αντικειμένων με επαναλήψεις από τα επτά διαφορετικά αντικείμενα "ένα", "δύο", "τρία", "τέσσερα", "πέντε", "έξι" και "κενό". Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με,

$$\tbinom{7+2-1}{2} = \tbinom{8}{2} = 28$$

Άσκηση 1.9. *Πόσες ζαριές υπάρχουν στο τάβλι; Πόσες ζαριές θα υπήρχαν σε ένα υποθετικό τάβλι με 3 ζάρια;*

Ο ζητούμενος αριθμός των ζαριών είναι ο αριθμός των συνδυασμών 2 αντικειμένων από 6 διαφορετικά αντικείμενα με επανάληψη. Αυτός είναι,

$$\tbinom{6+2-1}{2} = \tbinom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

Ανάλογα ο αριθμός των ζαριών στο υποθετικό τάβλι με τα 3 ζάρια είναι,

$$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

Άσκηση 1.10. *Ποιος ο αριθμός των διαφορετικών μονοπατιών που μπορεί να ακολουθήσει ένας πύργος για να κινηθεί από το νοτιοδυτικότερο στο βορειοανατολικότερο σημείο μιάς σκακιέρας όταν επιτρέπουμε να κινείται μόνον προς την ανατολή και προς το βορρά; Πόσα απ' αυτά τα μονοπάτια αποτελούνται από τέσσερις προς την ανατολή και τρεις προς το βορρά κινήσεις;*

Ας συμβολίσουμε με 0 μία κίνηση του πύργου προς την ανατολή και με 1 μία κίνηση του πύργου προς το βορρά. Τότε ο αριθμός των ζητούμενων μονοπατιών είναι ίσος με τον αριθμόν των τρόπων τοποθέτησης επτά μηδενικών και επτά μονάδων σε σειρά (εφόσον ο πύργος θα κινηθεί αναγκαστικά επτά τετράγωνα προς την ανατολή και επτά τετράγωνα προς το βορρά για να φτάσει από το σημείο εκκίνησης στο σημείο τερματισμού). Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με $\frac{14!}{7!7!} = 3432$.

Για το δεύτερο ερώτημα της άσκησης σκεφτόμαστε ως εξής: Ο αριθμός των τρόπων να σχηματίσουμε ένα μονοπάτι με τέσσερις κινήσεις προς την ανατολή είναι ο ίδιος με τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης επτά όμοιων σφαιρών σε τέσσερα διακεκριμένα κουτιά έτσι ώστε κανένα κουτί να μην μείνει άδειο. Τοποθετώντας λοιπόν κατ' αρχάς από μία σφαίρα σε κάθε κουτί κατά έναν τρόπο, μοιράζουμε τις υπόλοιπες τρεις σφαίρες στα τέσσερα κουτιά κατά $\binom{4+3-1}{3} = 20$ τρόπους. Όμοια ο αριθμός των τρόπων να σχηματίσουμε ένα μονοπάτι με τρεις κινήσεις προς το βορρά είναι $\binom{3+4-1}{4} = 15$. Άρα, ο συνολικός αριθμός των μονοπατιών, που αποτελούνται από τέσσερις προς την ανατολή και τρεις προς το βορρά κινήσεις, είναι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, $20 \cdot 15 = 300$.

Άσκηση 1.11. *Από ένα μεγάλο αριθμό από δραχμές, δίφραγκα, τάληρα και δεκάρικα, κατά πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 6 νομίσματα ;*

Ο ζητούμενος αριθμός τρόπων επιλογής 6 νομισμάτων από ένα μεγάλο αριθμό από δραχμές, δίφραγκα, τάληρα και δεκάρικα είναι ο αριθμός των συνδυασμών $r = 6$ αντικειμένων από $n = 4$ αντικείμενα με επανάληψη (δεδομένου ότι το πλήθος των διαθέσιμων νομισμάτων είναι μεγάλο). Αυτός ο αριθμός είναι,

$$\binom{r+n-1}{r} = \frac{(4+6-1)!}{6!(4-1)!} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3} = 84$$

Άσκηση 1.12. *Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί* $\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$ *και* $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ *είναι ακέραιοι.*

Έστω ότι έχουμε 3n το πλήθος στοιχεία χωρισμένα σε n ομάδες, καθεμία από τις οποίες περιέχει 3 όμοια μεταξύ τους στοιχεία. Τότε ο αριθμός των μεταθέσεων των 3n αυτών στοιχείων είναι,

$$\frac{(3n)!}{3!3!\dots 3!} = \frac{(3n)!}{(3!)^n} = \frac{(3n)!}{(2\cdot 3)^n} = \frac{(3n)!}{2^n\cdot 3^n},$$

που είναι ακέραιος, αφού αναπαριστά αριθμό μεταθέσεων.

Θα δείξουμε τώρα ότι και ο αριθμός $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι ακέραιος. Έστω ότι έχουμε n^2 αντικείμενα χωρισμένα σε n ομάδες, με n αντικείμενα όμοια μεταξύ τους στην κάθε ομάδα. Τότε ο αριθμός των μεταθέσεων των n^2 αυτών αντικειμένων είναι

$$\frac{(n^2)!}{n!n!\dots n!} = \frac{(n^2)!}{(n!)^n}$$

Όμως, ο αριθμός αυτός είναι διαιρετός διά $n!$ γιατί για κάθε μία από τις μεταθέσεις των n διαφορετικών στοιχείων (ένα από κάθε ομάδα) έχουμε ίσο αριθμό μεταθέσεων των n^2 στοιχείων. Άρα και ο αριθμός $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ είναι οπωσδήποτε ακέραιος.

Άσκηση 1.13. *Να υπολογιστεί ο σταθερός όρος στο ανάπτυγμα του* $(x^2+\frac{1}{x})^{12}$.

Έχουμε από τον τύπο του διωνυμικού αναπτύγματος ότι,

$$(x^2+\frac{1}{x})^{12} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^{2k}(\frac{1}{x})^{12-k} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^{3k-12}$$

Για τον σταθερό όρο πρέπει να είναι $3k-12=0 \Longrightarrow k=4$. Επομένως ο σταθερός όρος είναι ο,

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{8!4!} = 495$$

Άσκηση 1.14. *Να υπολογιστεί ο συντελεστής του x^{23} στο $(1+x^5+x^9)^{100}$.*

1ος τρόπος:

Το $x^5x^9x^9 = x^{23}$ είναι ο μόνος τρόπος για να πάρουμε το x^{23} από το ανάπτυγμα του $(1+x^5+x^9)^{100}$. Έτσι θα έχουμε $\binom{100}{2}$ τρόπους επιλογής των παραγόντων x^9 και μετά $\binom{98}{1}$ τρόπους επιλογής του παράγοντα x^5, οπότε ο συντελεστής του x^{23} είναι,

$$\binom{100}{2}\binom{98}{1} = \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 98 = 485100$$

2ος τρόπος:

Είναι,

$$(1+x^5+x^9)^{100} = \sum_{i=1}^{100} \binom{100}{i}(1+x^5)^i x^{9(100-i)}$$

Για να πάρουμε το x^{23} πρέπει να έχουμε $x^{23} = x^9x^9x^5$, δηλαδή το x^{23} θα δίνεται από το άθροισμα στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης για $100-i = 2 \Longrightarrow i = 98$. Ψάχνουμε άρα τον συντελεστή του x^{23} στο $\binom{100}{98}(1+x^5)^{98}(x^9)^2$. Αυτός είναι ο $\binom{100}{98} \cdot 98$, όπου το 98 είναι οι τρόποι επιλογής του x^5 από τον $(1+x^5)^{98}$. Έτσι,

$$\binom{100}{98} \cdot 98 = \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot 98 = 485100$$

Άσκηση 1.15. *Κατά πόσους τρόπους μπορούν r όμοιες μπάλλες να τοποθετηθούν σε n διακεκριμμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον 9 μπάλλες ;*

Αφού κάθε κουτί πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 9 μπάλλες, εξυπακούεται ότι $r \geq 9n$. Για να βρούμε τους ζητούμενους τρόπους τοποθέτησης παίρνουμε 9n από τις r μπάλλες και τοποθετούμε από 9 σε κάθε κουτί. Τις υπόλοιπες r-9n μπάλλες μπορούμε να τις τοποθετήσουμε στα n κουτιά με όλους τους δυνατούς τρόπους. Έτσι ο συνολικός αριθμός τρόπων τοποθέτησης, που πληρούν τις απαιτήσεις του προβλήματος, είναι,

$$\binom{r-9n+n-1}{r-9n} = \binom{r-8n-1}{r-9n}$$

Άσκηση 1.16. *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε 2t+1 μη διακεκριμμένες μπάλλες σε 3 διακεκριμμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε δύο κουτιά μαζί να περιέχουν περισσότερες μπάλλες απ' ότι το άλλο ένα.*

Εάν δεν λάβουμε υπόψιν τον περιορισμό κάθε δύο κουτιά μαζί να περιέχουν περισσότερες μπάλλες απ' ότι το άλλο ένα, υπάρχουν $\binom{2t+1+3-1}{2} = \binom{2t+3}{2}$ τρόποι να τοποθετήσουμε τις 2t+1 μπάλλες στα 3 κουτιά. Όμως ανάμεσα σ' αυτές τις τοποθετήσεις υπάρχουν ορισμένες, στις οποίες ένα κουτί περιέχει t+1 ή παραπάνω μπάλλες. Για κάθε κουτί υπάρχουν $\binom{t+3-1}{2} = \binom{t+2}{2}$ τρόποι τοποθέτησης, ώστε αυτό να περιέχει τουλάχιστον t+1 μπάλλες. Οι τρόποι αυτοί τοποθέτησης βρίσκονται αν βάλουμε στο συγκεκριμμένο κουτί t+1 μπάλλες και μοιράσουμε τις υπόλοιπες t μπάλλες στα 3 κουτιά κατά αυθαίρετο τρόπο.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων να μοιράσουμε τις μπάλλες, έτσι ώστε κανένα κουτί μόνο του να μην περιέχει t+1 ή περισσότερες μπάλλες, είναι,

$$\binom{2t+3}{2} - 3\binom{t+2}{2} = \frac{(2t+3)(2t+2)}{2} - 3\frac{(t+2)(t+1)}{2} =$$

$$= (t+1)(2t+3-\frac{3t}{2}-3) = \frac{t(t+1)}{2}$$

Άσκηση 1.17. *Ενα μήνυμα αποτελούμενο από 12 διαφορετικά σύμβολα θα μεταδοθεί μέσα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Επιπλέον των 12 συμβόλων του μηνύματος, ο αποστολέας θα στείλει και ένα σύνολο 45 συνολικά κενών χαρακτήρων μεταξύ των συμβόλων, με τουλάχιστον τρία κενά μεταξύ κάθε δύο γειτονικών συμβόλων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο αποστολέας να στείλει το μήνυμα;*

Υπάρχουν 12! διαφορετικοί τρόποι να διαταχθούν τα 12 διαφορετικά σύμβολα του μηνύματος, που πρόκειται να μεταδοθεί. Για κάθε μία απ' αυτές τις διατάξεις των συμβόλων υπάρχουν 11 θέσεις μεταξύ των 12 συμβόλων. Αφού πρέπει να τοποθετηθούν τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ δύο διαδοχικών συμβόλων του μηνύματος, χρησιμοποιούμε 33 από τα 45 κενά, που πρόκειται να αποσταλούν γι αυτές τις 11 θέσεις και απομένει να τοποθετήσουμε τα υπόλοιπα 12 κενά. Η τοποθέτηση αυτή ισοδυναμεί με την τοποθέτηση 12 όμοιων σφαιρών (των κενών χαρακτήρων) σε 11 διαφορετικά κουτιά(τις θέσεις μεταξύ των διαφορετικών χαρακτήρων του μηνύματος). Υπάρχουν συνεπώς κατά τα γνωστά $\binom{12+11-1}{12} = 646646$ τρόποι να τοποθετήσουμε τα 12 αυτά επιπλέον κενά.

Συνεπώς ο συνολικός αριθμός των τρόπων να αποσταλεί το συγκεκριμένο μήνυμα είναι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, $12! \cdot \binom{22}{12} = 3.097 \times 10^{14}$.

Άσκηση 1.18. *Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες:*

1.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

3.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

4.

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$$

1. Θεωρούμε το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

και θέτουμε όπου x την τιμή 1. Έτσι θα έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

2. Εργαζόμαστε όπως στο 1, αλλά εδώ αντί για την τιμή 1 στον τύπο του διωνυμικού αναπτύγματος βάζουμε την τιμή 2, οπότε έχουμε ότι,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n,$$

3. Έχουμε,

$$(1+x)^n(1+x^{-1})^n = (1+x)^n(1+x)^n x^{-n} = x^{-n}(1+x)^{2n} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}x^k \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}x^{-k} = x^{-n}\sum_{k=0}^{2n}\tbinom{2n}{k}x^k \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}^2 = \tbinom{2n}{n}$$

4. Θεωρούμε και πάλι το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}x^k$$

και αφού παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη ως προς x, έχουμε ότι,

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\tbinom{n}{k}x^{k-1}$$

θέτουμε όπου x την τιμή 1 οπότε παίρνουμε,

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\tbinom{n}{k}$$

Άσκηση 1.19.

1. *Πόσες από τις 2^r ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων περιέχουν έναν ζυγό αριθμό μονάδων;*

2. *Πόσες από τις 5^r πενταδικές ακολουθίες r ψηφίων περιέχουν έναν ζυγό αριθμό μονάδων;*

1. **1ος τρόπος:**

   Χωρίζουμε τις 2^r δοσμένες δυαδικές ακολουθίες μήκους r σε 2^{r-1} ζεύγη έτσι ώστε οι δύο ακολουθίες στο κάθε ζεύγος να διαφέρουν μόνον στα στοιχεία της r-οστής θέσης τους. Προφανώς σε κάθε ζεύγος μία και μόνον μία από τις ακολουθίες που το αποτελούν περιέχει ζυγό αριθμό μονάδων ενώ η άλλη περιέχει μονό αριθμό μονάδων. Συνεπώς υπάρχουν 2^{r-1} δυαδικές ακολουθίες r-ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων.

2ος τρόπος:

Υπάρχουν 2^{r-1} δυαδικές ακολουθίες r-1 δυαδικών ψηφίων. Σε μία τέτοια ακολουθία με ζυγό αριθμό μονάδων μπορούμε να τοποθετήσουμε στο τέλος ένα μηδενικό για να πάρουμε μία δυαδική ακολουθία r ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων. Εάν η ακολουθία των r-1 ψηφίων έχει μονό αριθμό μονάδων, τότε μπορούμε να τοποθετήσουμε στο τέλος της μία μονάδα ώστε να πάρουμε μία ακολουθία r ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων. Επειδή με τους δύο αυτούς τρόπους παίρνουμε όλες τις δυνατές ακολουθίες r δυαδικών ψηφίων, με ζυγό αριθμό μονάδων, και μόνον αυτές συμπεραίνουμε ότι ο συνολικός τους αριθμός είναι 2^{r-1}.

2. Θεωρούμε τις 5^r ακολουθίες r πενταδικών ψηφίων. Υπάρχουν 3^r απ' αυτές που περιέχουν μόνον τα ψηφία 2,3 και 4. Αυτές οι ακολουθίες συμπεριλαμβάνονται σε εκείνες που περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων. Οι υπόλοιπες $5^r - 3^r$ ακολουθίες μπορούν να διαχωριστούν σε ομάδες ανάλογα με τους σχηματισμούς των ψηφίων 2,3 και 4, που περιέχουν. Σε κάθε μία από αυτές τις ομάδες, σύμφωνα με το 1, οι μισές ακολουθίες θα περιέχουν ζυγό αριθμό μονάδων, οπότε ο συνολικός αριθμός των πενταδικών ακολουθιών r ψηφίων με ζυγό αριθμό μονάδων είναι τελικά $3^r + \frac{1}{2}(5^r - 3^r)$.

Άσκηση 1.20. *Μεταξύ 2n αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων απ' αυτά τα 2n αντικείμενα.*

1ος τρόπος:

Ο ζητούμενος αριθμός των επιλογών ισούται με το άθροισμα,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

γιατί μπορούμε να επιλέξουμε n αντικείμενα από τα 2n ως εξής: Είτε παίρνοντας κατά 1 τρόπο τα n όμοια αντικείμενα και κατά $\binom{n}{0}$ τρόπους μηδέν αντικείμενα από τα υπόλοιπα n, είτε παίρνοντας κατά 1 τρόπο n-1 από τα n όμοια αντικείμενα και κατά $\binom{n}{1}$ τρόπους 1 αντικείμενο από τα υπόλοιπα n κ.ο.κ., είτε τέλος παίρνοντας 0 από τα n όμοια αντικείμενα και κατά $\binom{n}{n}$ τρόπους n αντικείμενα από τα υπόλοιπα n διαφορετικά αντικείμενα. Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

2ος τρόπος:
Θεωρούμε μία σειρά n διαδοχικών θέσεων, όπου κάθε θέση αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο αντικείμενο από τα n διαφορετικά αντικείμενα. Για κάθε μία απ' αυτές τις θέσεις έχουμε τη δυνατότητα ή να επιλέξουμε το αντικείμενό της ή να βάλουμε στη θέση του κάποιο από τα n όμοια μεταξύ τους αντικείμενα. Άρα το συνολικό πλήθος των τρόπων επιλογής είναι τόσο όσο και οι δυαδικοί αριθμοί n ψηφίων, δηλαδή 2^n.

Άσκηση 1.21. *Μεταξύ 3n+1 αντικειμένων τα n είναι ίδια. Βρείτε τον αριθμό των επιλογών n αντικειμένων απ' αυτά τα 3n+1 αντικείμενα.*

Έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε τα n όμοια αντικείμενα κατά μοναδικό τρόπο και 0 από τα 2n+1 υπόλοιπα αντικείμενα κατά $\binom{2n+1}{0}$ τρόπους, ή να επιλέξουμε n-1 από τα n όμοια αντικείμενα επίσης κατά μοναδικό τρόπο και 1 από τα 2n+1 υπόλοιπα αντικείμενα κατά $\binom{2n+1}{1}$ τρόπους κ.ο.κ., ή τέλος να πάρουμε 0 από τα n όμοια αντικείμενα και n από τα 2n+1 υπόλοιπα με $\binom{2n+1}{n}$ τρόπους. Έτσι ο αριθμός των συνολικών τρόπων επιλογής είναι,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n}$$

Όμως,

$$2^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1} \Longrightarrow$$

$$2^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n-1} + \ldots + \binom{2n+1}{0} \Longrightarrow$$

$$2^{2n+1} = 2[\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n}]$$

ή τελικά,

$$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n} = 2^{2n}$$

Έτσι τελικά η πρώτη σχέση θα δώσει σε συνδυασμό με την τελευταία,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} = 2^{2n}$$

Άσκηση 1.22. *Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\binom{p+1}{q}$ τρόποι να τοποθετηθούν p πρόσημα "+" και q πρόσημα "-" σε μία γραμμή, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο πρόσημα "-" το ένα δίπλα στο άλλο.*

Ξεκινούμε τοποθετώντας πρώτα στη δοσμένη γραμμή τα "-" κατά τρόπο αυθαίρετο με μόνον τον περιορισμό ότι δεν πρέπει να κατέχουν γειτονικές θέσεις. Κατά την τοποθέτηση των "+" ο περιορισμός αυτός επιβάλλει την τοποθέτηση ενός τουλάχιστον "+" μεταξύ οποιονδήποτε δύο "-", που έχουν ήδη τοποθετηθεί. Έτσι τα πρώτα q-1 "+", που τοποθετούμε, τοποθετούνται σε προκαθορισμένες θέσεις (καθένα τους μεταξύ δύο "-").

Περισσεύουν τώρα p-q+1 "+" τα οποια πρέπει να τοποθετηθούν στη γραμμή με όλους τους δυνατούς τρόπους. Η τοποθέτησή τους αντιστοιχεί στην τοποθέτηση p-q+1 όμοιων σφαιρών (των "+" που περισσεύουν) σε q+1 διακεκριμένες υποδοχές (των θέσεων μεταξύ δύο διαδοχικών "-" στη γραμμή και των ακριανών θέσεων της γραμμής). Ο αριθμός των τρόπων για να γίνει αυτή η τοποθέτηση είναι,

$$\frac{((p-q+1)+(q+1)-1)!}{(p-q+1)!((q+1)-1)!} = \binom{p+1}{q}$$

Άσκηση 1.23. *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους r διακεκριμμένες σημαίες μπορούν να τοποθετηθούν σε n διακεκριμμένους ιστούς, δεδομένου ότι έχει σημασία η σειρά με την οποία οι σημαίες εμφανίζονται στους ιστούς και δεδομένου ότι κανένας ιστός δεν πρέπει να μείνει κενός ($r \geq n$).*

Αφού κανένας ιστός δεν πρέπει να μείνει κενός, παίρνουμε n από τις r σημαίες και τις τοποθετούμε μία σε κάθε ιστό. Επειδή και οι σημαίες και οι ιστοί είναι διακεκριμμένοι αυτό μπορεί να γίνει με $r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1) = \frac{r!}{(r-n)!}$ τρόπους.

Στη συνέχεια τοποθετούμε τις υπόλοιπες r-n σημαίες στους n ιστούς με οποιονδήποτε τρόπο. Ο αριθμός των δυνατών τρόπων τοποθέτησης, δεδομένου ότι παίζει ρόλο η σειρά εμφάνισης κάθε σημαίας πάνω στον ιστό, είναι $n(n+1)\ldots(n+r-n-1) = n(n+1)\ldots(r-1) = \frac{(r-1)!}{(n-1)!}$.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων επιλογής είναι,

$$\frac{r!}{(r-n)!} \cdot \frac{(r-1)!}{(n-1)!} = \binom{r-1}{n-1} \cdot r!$$

Άσκηση 1.24. *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους r διακεκριμμένα αυτοκίνητα μπορούν να περάσουν από n διακεκριμμένους σταθμούς διοδίων, δεδομένου ότι μία το πολύ διαδρομή επιτρέπεται να μη δεχθεί αυτοκίνητο ($r \geq n-1$ και $n \geq 2$).*

Ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι το άθροισμα του αριθμού των τρόπων, με τους οποίους r διακεκριμμένα αυτοκίνητα μπορούν να περάσουν από n διακεκριμμένους σταθμούς διοδίων, δεδομένου ότι καμμιά διαδρομή δε θα μείνει κενή (δε θα δεχτεί αυτοκίνητο) συν τον αριθμό των τρόπων, εάν μείνει μία ακριβώς διαδρομή κενή.

Ο πρώτος από τους δύο αριθμούς είναι (βλέπε άσκηση 1.23) $\binom{r-1}{n-1}r!$, ενώ ο δεύτερος για τον ίδιο λόγο και δεδομένου ότι η επιλογή της διαδρομής, που δε θα δεχτεί αυτοκίνητο, μπορεί να γίνει κατά n τρόπους είναι $n\binom{r-1}{n-2}r!$.

Έτσι ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι,

$$\binom{r-1}{n-1}r! + n\binom{r-1}{n-2}r! = r!\binom{r-2}{n-2}\frac{(r-1)[r+(n-1)^2]}{(n-1)(r-n+1)}$$

Άσκηση 1.25. *Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν τέσσερα όμοια πορτοκάλια και έξι διαφορετικά μήλα (διαφορετικών ποικιλιών) σε πέντε διαφορετικά κουτιά; Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται δύο ακριβώς φρούτα σε κάθε κουτί;*

Υπάρχουν κατά τα γνωστά $\binom{4+5-1}{4} = 70$ τρόποι για να τοποθετηθούν τέσσερα όμοια αντικείμενα σε πέντε διακεκριμένα κουτιά και $5^6 = 15625$ τρόποι για να τοποθετηθούν έξι διαφορετικά μήλα σε πέντε διαφορετικά κουτιά. Επειδή οι τοποθετήσεις αυτές είναι ανεξάρτητες, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, υπάρχουν συνολικά $70 \cdot 15625 = 1093750$ τρόποι για να μοιραστούν τα τέσσερα όμοια και τα έξι διαφορετικά φρούτα στα πέντε διακεκριμένα κουτιά.

Για να απαντήσουμε στο δεύτερο ερώτημα σκεφτόμαστε ως εξής: Ξεκινούμε τη διαδικασία της μοιρασιάς από τα τέσσερα όμοια πορτοκάλια και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Έστω ότι τοποθετούνται από δύο πορτοκάλια σε δύο από τα πέντε κουτιά και κανένα πορτοκάλι στα υπόλοιπα κουτιά. Τα δύο κουτιά μπορεί να επιλεγούν κατά $\binom{5}{2} = 10$ τρόπους και τα έξι διαφορετικά μήλα μπορούν να μοιραστούν στα υπόλοιπα τρία κουτιά κατά $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ τρόπους. Έτσι, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, σ' αυτήν την κατηγορία υπάρχουν $10 \cdot 90 = 900$ τρόποι τοποθέτησης.

Έστω ότι τοποθετούνται δύο όμοια πορτοκάλια σ' ένα από τα κουτιά, από ένα πορτοκάλι σε δύο από τα υπόλοιπα τέσσερα κουτιά και τα άλλα δύο κουτιά μένουν χωρίς πορτοκάλι. Το κουτί με τα δύο πορτοκάλια μπορεί να επιλεγεί κατά 5 τρόπους, τα δύο κουτιά που θα πάρουν από ένα πορτοκάλι μπορεί να επιλεγούν κατά $\binom{4}{2} = 6$ τρόπους και τέλος τα έξι διαφορετικά μήλα μπορούν να μοιραστούν στις θέσεις, που περισσεύουν κατά $\frac{6!}{2!2!} = 180$ τρόπους. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει $5 \cdot 6 \cdot 180 = 5400$ τρόπους τοποθέτησης.

Έστω, τέλος, ότι τοποθετείται από ένα πορτοκάλι σε καθένα από τέσσερα διακεκριμένα κουτιά. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{5}{4} = 5$ τρόπους και τα έξι διαφορετικά μήλα θα μοιραστούν στις θέσεις που περισσεύουν κατά $\frac{6!}{2!} = 360$ τρόπους. Έτσι η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει $5 \cdot 360 = 1800$ τρόπους τοποθέτησης.

Από τα παραπάνω και αφού έχουμε εξαντλήσει κάθε δυνατό τρόπο τοποθέτησης δύο φρούτων σε κάθε διακεκριμένο κουτί γίνεται φανερό ότι έχουμε συνολικά $900 + 5400 + 1800 = 8100$ τρόπους τοποθέτησης. Το κλάσμα των τρόπων αυτών ως προς το συνολικό αριθμό των τρόπων που υπολογίστηκε παραπάνω είναι $\frac{8100}{1093750} = 0.0074$.

Άσκηση 1.26. *Πόσες ακέραιες λύσεις της εξισώσεως* $x_1+x_2+x_3+x_4 = 12$ *με* $x_i \geq 0$ *υπάρχουν;* [1] *Πόσες με* $x_i > 0$*; Πόσες με* $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$*;*

[1] Βλέπε και Κεφάλαιο 4 για κάποιες άλλες τεχνικές λύσεως ακεραίων εξισώσεων με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού.

Με τον όρο ακεραία λύση μιας εξίσωσης εννοούμε ένα διατεταγμένο σύνολο ακεραίων τιμών για τα x_i με άθροισμα 12. Αυτό το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα τοποθέτησης 12 όμοιων σφαιρών σε 4 διαφορετικά κουτιά και έχει $\binom{12+4-1}{12} = 455$ διαφορετικές λύσεις.

Εάν απαιτήσουμε $x_i > 0$ τότε θέτουμε στο παραπάνω αντίστοιχο πρόβλημα τον επιπλέον περιορισμό να μην μείνει κανένα από τα τέσσερα κουτιά άδειο. Η λύση στο πρόβλημα αυτό δίνεται αφού πρώτα τοποθετήσουμε σε κάθε κουτί μία σφαίρα, τοποθετώντας τις υπόλοιπες 8 σφαίρες κατά τυχαίο τρόπο στα 4 κουτιά. Αυτό γίνεται κατά $\binom{8+4-1}{8} = 165$ τρόπους, οπότε 165 είναι και οι λύσεις της εξίσωσης.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι για την τρίτη περίπτωση υπάρχουν $\binom{4+4-1}{4} = 35$ ακέραιες λύσεις, που ικανοποιούν τους πιο πάνω περιορισμούς.

Άσκηση 1.27. *Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 10$ και πόσες η ανίσωση $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 < 10$;*

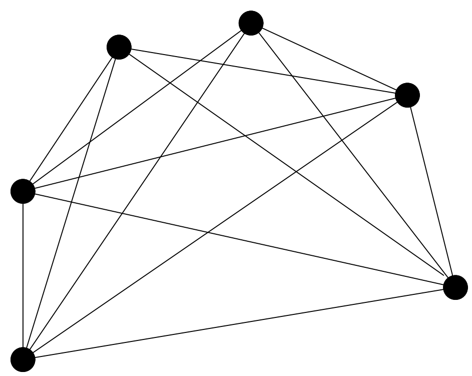
Από τη άσκηση 1.26 παίρνουμε άμεσα απάντηση για το πρώτο ερώτημα. Η δοσμένη εξίσωση έχει $\binom{6+10-1}{10} = 3003$ ακέραιες μη αρνητικές λύσεις.

Για να λύσουμε τη δοσμένη ανισότητα μετασχηματίζουμε το πρόβλημα κάνοντας την παρατήρηση ότι υπάρχει κάποια αντιστοιχία μεταξύ των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της ανισότητας και των ακεραίων λύσεων της $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 + x_7 = 10, 0 \leq x_i, 1 \leq i \leq 6, 0 < x_7$. Ο αριθμός των λύσεων της τελευταίας εξισώσεως είναι ο ίδιος με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της $y_1 + y_2 + \ldots + y_6 + y_7 = 9$, όπου $y_i = x_i$ για $1 \leq i \leq 6$ και $y_7 = x_7 - 1$. Αυτός όμως ισούται με $\binom{7+9-1}{9} = 5005$.

Άσκηση 1.28. *Σε ένα κατάστημα τα αντικείμενα A,B και Γ πωλούνται στην τιμή των 500 δρχ. και το αντικείμενο Δ στην τιμή των 2000 δρχ.. Πόσες διαφορετικές αγορές προϊόντων (από το σύνολο $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$) μπορούμε να κάνουμε στο κατάστημα αυτό αν διαθέτουμε 10000 δρχ. και τις ξοδέψουμε όλες;*

Θεωρούμε ως μονάδα μέτρησης το πεντακοσάρικο αφού όλες οι άλλες τιμές που δίδονται είναι πολλαπλάσια αυτής της τιμής. Επομένως διαθέτουμε συνολικά 20 μονάδες για να ξοδέψουμε, με το προϊόν Δ να κοστίζει 4 μονάδες και όλα τα άλλα προϊόντα από 1 μονάδα το καθένα. Ενα μοντέλο για το πρόβλημα σε μορφή εξίσωσης είναι η,

$$A + B + \mathit{\Gamma} + 4\Delta = 20, A, B, \mathit{\Gamma}, \Delta \geq 0.$$



Σχήμα 1.1: Το κυρτό n-γωνο της άσκησης 1.29 και οι διαγώνιες του.

Για να αντιμετωπίσουμε το γεγονός ότι το Δ έχει συντελεστή 4 στην παραπάνω εξίσωση αρκεί πρώτα να προσδιορίσουμε ακριβώς πόσα κομμάτια του προϊόντος Δ αγοράζουμε. Εάν π.χ. αγοράσουμε ένα κομμάτι, τότε παίρνομε την εξίσωσιν $A+B+\Gamma=16$, η οποία έχει (βλέπε άσκηση 1.26) $\binom{16+3-1}{16}=153$ ακέραιες μη αρνητικές λύσεις. Στη γενική περίπτωση, αν $\Delta=i$, τότε θα έχουμε $A+B+\Gamma=20-4i$, μία εξίσωση με $\binom{(20-4i)+3-1}{20-4i}=\binom{22-4i}{2}$ λύσεις, για $i=0,1,2,3,4,5$. Αθροίζοντας λοιπόν όλες αυτές τις περιπτώσεις έχουμε για το συνολικό αριθμό των δυνατών αγορών,

$$\binom{22}{2}+\binom{18}{2}+\binom{14}{2}+\binom{10}{2}+\binom{6}{2}+\binom{2}{2}=536$$

διαφορετικούς τρόπους αγοράς.

Άσκηση 1.29. *Σε πόσα ευθύγραμμα τμήματα χωρίζονται οι διαγώνιοι ενός κυρτού n-γώνου από τις τομές τους, υπό την προϋόθεση ότι οποιεσδήποτε τρεις διαγώνιες δεν τέμνονται στο ίδιο σημείο.*

Κατ' αρχάς σημειώνουμε ότι ο συνολικός αριθμός των διαγωνίων είναι $\binom{n}{2}-n$, αφού υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα $\binom{n}{2}$ ζεύγη των κορυφών του n-γώνου αλλά n απ' αυτά τα τμήματα είναι οι πλευρές του n-γώνου. Αφού το n-γωνον είναι κυρτό κάθε δύο διαγώνιες τέμνονται σε ένα σημείο, δηλαδή κάθε τέσσερις κορυφές συνεισφέρουν κατά ένα στο πλήθος των σημείων τομής των διαγωνίων. Συνεπώς το σύνολο των σημείων αυτών έχει πληθικό αριθμό $\binom{n}{4}$. Όμως κάθε διαγώνιος διαιρείται σε k+1 ευθύγραμμα τμήματα από τα k σημεία τομής που βρίσκονται επάνω της και κατά συνέπεια αφού κάθε σημείον τομής ανήκει σε δύο διαγωνίους (και όχι σε περισσότερες εξ' υποθέσεως) ο συνολικός αριθμός των ευθυγράμμων τμημάτων στα οποία χωρίζονται οι διαγώνιες ενός τέτοιου n-γώνου είναι,

$$\binom{n}{2} - n + 2 \cdot \binom{n}{4}$$

Άσκηση 1.30. *Πόσες αύξουσες ακολουθίες n όρων από το σύνολο* $\{0, 1, \ldots, m\}$ *υπάρχουν;*

Για να κατασκευάσουμε μία αύξουσα ακολουθία n όρων από το σύνολο $\{0, 1, \ldots, m\}$ αρκεί να επιλέξουμε n στοιχεία από το σύνολο αυτό με επανάληψη και να τα αντιστοιχίσουμε διατεταγμένα στους δείκτες $1, 2, \ldots, n$ της ακολουθίας. Δύο τέτοιες ακολουθίες θα είναι διαφορετικές εάν είναι διαφορετικές οι επιλογές των n στοιχείων με επανάληψη από το δοσμένο σύνολο. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός των ακολουθιών ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών με επανάληψη n στοιχείων από το σύνολο $\{0, 1, \ldots, m\}$. Ο αριθμός αυτός είναι $\binom{n+m}{n}$

Άσκηση 1.31. *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που ένας φυσικός m μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα* $m = m_1 + \ldots + m_n$ *n φυσικών με την παραδοχή ότι δύο αθροίσματα θεωρούνται διαφορετικά είτε όταν διαφέρουν ως προς τους φυσικούς που τα αποτελούν είτε ως προς τη σειρά με την οποία αυτοί εμφανίζονται στο άθροισμα.*

Θεωρούμε ένα δοσμένο φυσικό m και ας είναι $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ ένας τρόπος με τον οποίο ο φυσικός m γράφεται σαν άθροισμα n φυσικών. Δύο τέτοια αθροίσματα θα θεωρούνται διαφορετικά είτε όταν αποτελούνται από διαφορετικούς προσθετέους είτε όταν διαφέρει η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι προσθετέοι τους στο κάθε άθροισμα. Μία εκ των δύο παραπάνω διαφορών έχει σαν αποτέλεσμα οπωσδήποτε διαφορά και στην ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{M_i\}$, όπου $M_i = m_1 + \ldots + m_i, 1 \leq i \leq n$. Αντιστρόφως, μία διαφορά στην ακολουθία αυτή είναι προφανές ότι προκύπτει από κάποια διαφοροποίηση των δύο αθροισμάτων ως προς τους προσθετέους τους στη συγκεκριμένη θέση, όπου εμφανίζεται η συγκεκριμένη διαφορά.

Επειδή επιπλέον οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσες, από τις παραπάνω παρατηρήσεις, την άσκηση 1.30 και το γεγονός ότι ο τελικός τους όρος (n-οστός) θα είναι αναγκαστικά ίσος με m, ανεξάρτητα των προηγούμενων όρων, προκύπτει ότι ο αριθμός των ακολουθιών αυτών ταυτίζεται με τον ζητούμενο αριθμό των αθροισμάτων και είναι ίσος με $\binom{n+m-1}{n-1}$.

Άσκηση 1.32. *Να υπολογιστεί το άθροισμα* $1^2+2^2+\ldots+n^2$.

Έχουμε από το διωνυμικό ανάπτυγμα ότι $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$, οπότε θέτοντας διαδοχικά $x=1,2,\ldots,n$ και αθροίζοντας έχουμε :

$$\left\{\begin{array}{l} 2^3 = 1+3\cdot 1+3\cdot 1^2+1^3 \\ 3^3 = 1+3\cdot 2+3\cdot 2^2+2^3 \\ 4^3 = 1+3\cdot 3+3\cdot 3^2+3^3 \\ \vdots \\ (n+1)^3 = 1+3\cdot n+3\cdot n^2+n^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$(n+1)^3 = n+3(1+2+\ldots+n)+3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+1 \Longrightarrow$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n+1}{3} - (1+2+\ldots+n) \Longrightarrow$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{2(n+1)^3-2(n+1)-3n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+2+4n-2-3n)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Άρα τελικά $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Άσκηση 1.33. *Να δειχθεί ότι* $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.

Έχουμε,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!(n-r)!} =$$

$$= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} =$$

$$= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Άσκηση 1.34. *Να αποδειχθεί ότι,*

1.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}(-1)^k = (-1)^n \binom{r-1}{n}$$

2.
$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

3.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

4.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

1. Ζητούμε να δείξουμε ότι $\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{r}{n} = (-1)^n \binom{r-1}{n}$. Γνωρίζουμε (βλέπε άσκηση 1.33) ότι ισχύει η ταυτότητα $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$, οπότε έχουμε,

$$\left.\begin{cases} \binom{r}{0} = \binom{r-1}{0} \\ -\binom{r}{1} = -\binom{r-1}{1} - \binom{r-1}{0} \\ \binom{r}{2} = \binom{r-1}{2} + \binom{r-1}{1} \\ \vdots \\ (-1)^n \binom{r}{n} = (-1)^n \binom{r-1}{n} + (-1)^n \binom{r-1}{n-1} \end{cases}\right\} \overbrace{\Longrightarrow}^{(+)}$$

$$\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{r}{n} = (-1)^n \binom{r-1}{n}$$

2.

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \frac{r!}{m!(r-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{r!}{(r-k)!k!} \cdot \frac{(r-k)!}{(m-k)!(r-m)!} =$$

$$= \frac{r!}{(r-k)!k!} \cdot \frac{(r-k)!}{(m-k)!(r-k-m+k)!} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

3. Ο συνολικός αριθμός τρόπων επιλογής n αντικειμένων από r+s αντικείμενα ισούται με τους τρόπους επιλογής k αντικειμένων από r από τα r+s αντικείμενα και των υπόλοιπων n-k αντικειμένων από τα υπόλοιπα s από τα r+s αντικείμενα, όπου τα r,s παραμένουν σταθερά, το k όμως μεταβάλλεται από 0 εώς n. Άρα πράγματι,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

4. Με βάση τον τύπο που απεδείχθει στην άσκηση 1.33 έχουμε,

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{m+1} &= \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1} = \\ &= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m} + \binom{n-2}{m+1} = \ldots = \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m}\end{aligned}$$

Άσκηση 1.35. *Ποια η τιμή του αθροίσματος,*

$$\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{k} k$$

όταν $r \geq 0$;

Από τον ορισμό των συνδυασμών $\binom{s}{k}$ έχουμε ότι,

$$\binom{s}{k} = \frac{s!}{k!(s-k)!} = \frac{s}{k} \cdot \frac{(s-1)!}{(k-1)!(s-k)!} = \frac{s}{k}\binom{s-1}{k-1}$$

Από την παραπάνω σχέση με αντικατάσταση στην αρχική παίρνουμε,

$$\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{k} k = \sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1} s = s \sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1}$$

Από την άσκηση 1.34 (μέρος 3) έχουμε ότι,

$$\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s-1}{k-1} = \binom{r+s-1}{r-1}$$

οπότε τελικά το ζητούμενο άθροισμα είναι,

$$\sum_{k} \binom{r}{k}\binom{s}{k} k = \binom{r+s-1}{r-1} s, r \geq 0$$

Άσκηση 1.36. *Ποια η τιμή του αθροίσματος,*

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

για $n\geq 0$;

Προκειμένου να βοηθηθούμε στη λύση της άσκησης αυτής υπενθυμίζουμε τους επόμενους τύπους,

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\cdot\binom{n}{k}$$

$$\binom{n+k}{k}=\binom{n+k}{n}$$

και τέλος,

$$\sum_{k}\binom{r}{k}\binom{s+k}{n}(-1)^k=(-1)^r\binom{s}{n-r}$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους παίρνουμε σταδιακά από την αρχική σχέση,

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{n+1}=$$

$$=-\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 1}\binom{n-1+k}{n}\binom{n+1}{k}(-1)^k=$$

$$=-\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n-1+k}{n}\binom{n+1}{k}(-1)^k+\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}=$$

$$=-\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}\binom{n-1}{-1}+\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}=\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}$$

Το πρόβλημα έχει ουσιαστικά λυθεί γιατί ο συνδυασμός $\binom{n-1}{n}$ είναι ίσος με μηδέν, εκτός από την περίπτωση όπου $n=0$, οπότε ισούται με τη μονάδα.

Κεφάλαιο 2

Γεννήτριες Συναρτήσεις

Now you play the loving woman I'll play the faithful man
But just don't look too close into the palm of my hand
We stood at the altar the gypsy swore our future was right
But come the wee wee hours well maybe baby the gypsy lied
So when you look at me you better look hard and look twice
Is that me baby or just a brilliant disguise

Tonight our bed is cold I'm lost in the darkness of our love
God have mercy of the man who doubts what he's sure of

Brilliant Disguise
BRUCE SPRINGSTEEN

Άσκηση 2.1. *Ποια ακολουθία έχει γεννήτρια συνάρτηση την,*

1.

$$A(x) = \frac{1 + 2x - x^2 - x^3}{1 + x - x^2 - x^3}$$

2.

$$A(x) = \frac{2 + 3x - 6x^2}{1 + 2x}$$

3.

$$A(x) = \frac{2}{1 - 4x^2}$$

1. Είναι,

$$A(x) = \frac{1 + x - x^2 - x^3}{1 + x - x^2 - x^3} + \frac{x}{1 + x - x^2 - x^3} = 1 + \frac{x}{1 + x - x^2(1 + x)} =$$

$$= 1 + \frac{x}{(1 + x)(1 - x^2)} = 1 + \frac{x}{(1 + x)^2(1 - x)}$$

Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{x}{(1+x)^2(1-x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων,

$$\frac{x}{(1 + x)^2(1 - x)} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 + x} + \frac{C}{(1 + x)^2} \Longrightarrow$$

$$x = A(1 + x)^2 + B(1 - x)(1 + x) + C(1 - x) \Longrightarrow$$

$$x = (A - B)x^2 + (2A - C)x + A + B + C \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A - B = 0 \\ 2A - C = 1 \\ A + B + C = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = B \\ 4A = 1 \\ C = -2A \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \\ C = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Άρα έχουμε,

$$A(x) = 1 + \frac{1}{4}(1 - x)^{-1} + \frac{1}{4}(1 + x)^{-1} - \frac{1}{2}(1 + x)^{-2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-1)^k x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} x^k =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^k - \frac{1}{2}(-1)^k(k+1)]x^k =$$

$$= 1 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + 3x^5 - 3x^6 + \dots.$$

2.

$$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1+2x} = -3x + 3 - \frac{1}{2x+1} =$$

$$= 3 - 3x - (1+2x)^{-1} = 3 - 3x - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}2^k x^k =$$

$$= 3 - 3x - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k x^k = 2 - x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + \dots.$$

3.

$$A(x) = \frac{2}{1-4x^2} = 2(1-4x^2)^{-1} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k 4^k x^{2k} =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^{2k} = 2 + 0\cdot x + 8x^2 + 0\cdot x^3 + 32x^4 + \dots.$$

Άσκηση 2.2. *Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας,*

1. $2, 5, 13, 35, \dots, 2^n + 3^n, \dots.$

2. $1, 2, 3, \dots, r, \dots.$

1. Είναι,

$$A(x) = 2^0 + 3^0 + (2^1 + 3^1)x + (2^2 + 3^2)x^2 + \dots =$$

$$= (2^0 + 2^1x + 2^2x^2 + \dots) + (3^0 + 3^1x + 3^2x^2 + \dots) =$$

$$= [(2x)^0 + (2x)^1 + (2x)^2 + \dots] + [(3x)^0 + (3x)^1 + (3x)^2 + \dots] =$$

$$= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{1-3x+1-2x}{1-5x+6x^2} = \frac{2-5x}{1-5x+6x^2}.$$

2. Έχουμε,

$$A(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + rx^{r-1} + \ldots =$$
$$= (x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \ldots)' = [(1 + x + x^2 + \ldots) - 1]' =$$
$$= (\frac{1}{1-x} - 1)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Άσκηση 2.3. *Να αποδειχθεί η σχέση* $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ *με χρήση γεννητριών συναρτήσεων.* [1]

Παρατηρούμε ότι οι $\binom{n}{r}$ είναι οι συντελεστές του z^r στο ανάπτυγμα του $(1+z)^n$. Αυτό όμως γράφεται και στη μορφή $(1+z)^{n-1} + z(1+z)^{n-1}$, του οποίου οι συντελεστές της δύναμης z^r είναι σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος, $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$, και άρα έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Άσκηση 2.4. *Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των μερικών αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης. Ακόμα, να αποδειχθεί και η ιδιότητα της κλίμακας.*

Η ιδιότητα της συνέλιξης μας λέει ότι η ακολουθία,

$$\delta_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r}, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

που είναι συνέλιξη των ακολουθιών a_r, b_r, δηλαδή $\delta_r = a_r * b_r$, έχει γεννήτρια συνάρτηση $\Delta(x) = A(x) \cdot B(x)$. Με βάση την ιδιότητα αυτή θα δείξουμε ότι, αν $b_k = \sum_{r=0}^{k} a_r, k = 0, 1, 2, \ldots$, τότε η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας b_k είναι

$$B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

Θεωρούμε την ακολουθία $\gamma_k = 1 \ \forall k \in N$, οπότε η (γ_k) έχει γεννήτρια συνάρτηση τη $\Gamma(x) = \frac{1}{1-x}$. Τότε,

$$b_k = \sum_{r=0}^{k} a_r = \sum_{r=0}^{k} a_r \cdot 1 = \sum_{r=0}^{k} a_r \gamma_{k-r}$$

[1] Βλέπε και Κεφάλαιο 1 για μία συνδυαστική απόδειξη της παραπάνω σχέσεως.

Δηλαδή η b_k είναι συνέλιξη των a_k και γ_k κι έτσι σύμφωνα με την υπόθεση θα έχει γεννήτρια συνάρτηση,

$$B(x) = A(x) \cdot \Gamma(x) \Longrightarrow B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

Έστω τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $B(x)$ της ακολουθίας $b_k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r$. Έχουμε ότι,

$$b_k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r = \sum_{r=0}^{\infty} a_r - \sum_{r=0}^{k-1} a_r = A(1) - \sum_{r=0}^{k-1} a_r \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} A(1) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k-1} a_r x^k \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \frac{A(1)}{1-x} - \frac{xA(x)}{1-x} \Longrightarrow B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$$

Θα αποδείξουμε τώρα την ιδιότητα της κλίμακας, δηλαδή ότι η ακολουθία $b_r = ra_r, r = 0, 1, 2, \ldots,$ έχει γεννήτρια συνάρτηση $B(x) = xA'(x)$ και ότι η ακολουθία $\delta_r = \frac{a_r}{r+1}, r = 0, 1, 2, \ldots,$ έχει γεννήτρια,

$$\Delta(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(t) dt.$$

Εχουμε,

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = 0a_0 + 1a_1 x + 2a_2 x^2 + \ldots =$$

$$= x(1a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots) = x(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)' =$$

$$= x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)' = xA'(x).$$

$$\Delta(x) = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} x + \frac{a_2}{3} x^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{x}(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots) dt = \frac{1}{x} \int_0^x A(t) dt$$

Άσκηση 2.5. *Έστω* $a_0, a_1, \ldots$ *μία άπειρη ακολουθία. Έστω ακόμα ότι*

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

$a \in R$ *και*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Η ακολουθία των αθροισματικών υπολοίπων ορίζεται ως εξής,

$$b_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$$

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της b_n *σαν συνάρτηση των* a *και* $A(x)$.

Έχουμε ότι

$$b_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i - \sum_{i=0}^{n} a_i \Longrightarrow$$

$$b_n = a - \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a, a, \ldots$ είναι η $\frac{a}{1-x}$, ενώ από την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων γνωρίζουμε ότι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας

$$\sum_{i=0}^{n} a_i$$

είναι η $\frac{A(x)}{1-x}$. Επομένως από την γραμμική ιδιότητα των γεννητριών συναρτήσεων, η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση της b_n είναι η,

$$B(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{A(x)}{1-x} = \frac{a - A(x)}{1-x}$$

Άσκηση 2.6. *Να βρεθεί κλειστός τύπος για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας* $a_r = r^2, r = 0, 1, 2, \ldots$ *και στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + r^2$. [2]

[2] Βλέπε Κεφάλαιο 1 για έναν άλλο τρόπο υπολογισμού του τελευταίου αθροίσματος.

Έχουμε,

$$A(x) = 0 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \ldots =$$

$$= x(1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \ldots) = x(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots)' =$$

$$= x[x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)]' = x[x(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)']' =$$

$$= x[x(\frac{1}{1-x} - 1)']' = x[\frac{x}{(1-x)^2}]' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

ο οποίος είναι και ο ζητούμενος κλειστός τύπος για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_r = r^2$.

Από την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων προκύπτει ότι γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $0^2, 0^2+1^2, 0^2+1^2+2^2, \ldots, 0^2+1^2+2^2+\ldots+r^2, \ldots$ είναι η

$$S(x) = \frac{A(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο άθροισμα αρκεί συνεπώς να υπολογίσουμε τον συντελεστή του x^r στην παραπάνω συνάρτηση.

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε για τον συντελεστή του x^r στο $(1-x)^{-4}$,

$$\frac{(-4)(-4-1)\ldots(-4-r+1)}{r!}(-1)^r = \frac{4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (r+3)}{r!} =$$

$$= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Επομένως ο συντελεστής του x^r στην συνάρτηση $S(x)$ είναι ο

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(r-1)r(r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

Έτσι τελικά έχουμε για το ζητούμενο ότι,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

Άσκηση 2.7. *Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας* $a_r = (r-1)r(r+1)$. *Στη συνέχεια να υπολογιστεί το άθροισμα* $3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + \ldots + (n+1)n(n-1)$.

Έχουμε,

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = 1\cdot 0\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 0x + 3\cdot 2\cdot 1x^2 + \ldots =$$
$$= 3\cdot 2\cdot 1x^2 + 4\cdot 3\cdot 2x^3 + \ldots = x^2(3\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 2x + \ldots) =$$
$$= x^2(3\cdot 2x + 4\cdot 3x^2 + \ldots)' = x^2(3x^2 + 4x^3 + \ldots)'' =$$
$$= x^2(x^3 + x^4 + \ldots)''' = x^2[\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2)]''' =$$
$$= x^2(\frac{1}{1-x})''' = \ldots = \frac{6x^2}{(1-x)^4}$$

Με βάση την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων, εάν $S(x) = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \ldots$, όπου

$$s_k = \sum_{r=0}^{k} a_r$$

θα έχουμε $S(x) = \frac{A(x)}{1-x} \Longrightarrow S(x) = \frac{6x^2}{(1-x)^5}$. Άρα για να βρούμε το

$$s_n = \sum_{r=0}^{n} a_n$$

αρκεί να αναπτύξουμε το S(x). Έχουμε:

$$S(x) = 6x^2(1-x)^{-5} = 6x^2\sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{-5}{k}(-1)^k x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} 6\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}x^{k+2} \Longrightarrow$$
$$s_k = 6\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4!} = \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4}$$

Άσκηση 2.8. *Με χρήση γεννητριών συναρτήσεων, να αποδείξετε τους παρακάτω τύπους:*

1.

$$\sum_{k=0}^{n}\tbinom{r}{k}\tbinom{s}{n-k} = \tbinom{r+s}{n}$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

(Βλέπε και Κεφάλαιο 1 για μία συνδυαστική απόδειξη των παραπάνω τύπων.)

1. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα αποτελεί συνέλιξη των ακολουθιών $x_k = \binom{r}{k}$ και $y_k = \binom{s}{k}$. Όμως η ακολουθία $x_k = \binom{r}{k}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $(1+z)^r$ ενώ η $y_k = \binom{s}{k}$ έχει γεννήτρια συνάρτηση την $(1+z)^s$. Σύμφωνα με την ιδιότητα της συνέλιξης η γεννήτρια συνάρτηση της

   $$(\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k})$$

   είναι η $(1+z)^{r+s}$ οπότε το παραπάνω άθροισμα, που παριστά τον n-οστό όρο της ακολουθίας θα ισούται με τον συντελεστή του z^n στην προηγούμενη γεννήτρια συνάρτηση. Δηλαδή έχουμε,

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

2. Θέτουμε

   $$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^m$$

   και

   $$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} [\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}] z^m.$$

   Αρκεί να δείξομε ότι $X(z) = Y(z)$. Έχουμε,

   $$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^m = z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+1}{m+1} z^{m+1} =$$

   $$= z^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+1}{k} z^k = z^{-1}[(1+z)^{n+1} - 1]$$

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty}[\sum_{k=0}^{n} \tbinom{k}{m}]z^m = \sum_{k=0}^{n}[\sum_{m=0}^{\infty} \tbinom{k}{m} z^m] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(1+z)^k = \frac{(1+z)^{n+1}-1}{(1+z)-1} =$$

$$= z^{-1}[(1+z)^{n+1}-1]$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι,

$$X(z) = Y(z) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \tbinom{k}{m} = \tbinom{n+1}{m+1}$$

Άσκηση 2.9. *Για δοσμένο t να υπολογιστεί το άθροισμα,*

$$\sum_{i=0}^{t} \tbinom{2i}{i}\tbinom{2t-2i}{t-i}.$$

Έστω $a_i = \binom{2i}{i}$. Τότε $b_i = \binom{2t-2i}{t-i} = a_{t-i}$, οπότε είναι,

$$\delta(t) = \sum_{i=0}^{t} \tbinom{2i}{i}\tbinom{2t-2i}{t-i} = a_i * b_i = a_i * a_{t-i}$$

και έτσι η γεννήτρια συνάρτηση της δ_i είναι σύμφωνα με την ιδιότητα της συνέλιξης $\Delta(x) = [A(x)]^2$. Όμως είναι,

$$A(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

γιατί,

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k 4^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(\frac{-2k+1}{2})}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k}(-1)^k 4^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2k-1)}{1\cdot 2\dots k}2^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 2\dots(2k)}{(k!)^2}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{2k}{k}x^k$$

Έτσι,

$$\Delta(x) = [A(x)]^2 = [(1-4x)^{-\frac{1}{2}}]^2 = (1-4x)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-1)^k 4^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k$$

Άρα,

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i} = 4^t$$

Άσκηση 2.10. *Να υπολογιστεί το άθροισμα,*

$$\sum_{k=2}^{n-1}(n-k)(n-k)\binom{n-1}{n-k}.$$

Έστω $a_k = k^2$ και $b_k = \binom{n-1}{n-k}$. Τότε,

$$b_k * a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k =$$

$$= a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} b_k + a_0 b_n = (n-1)^2 + \sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} b_k \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} b_k = b_k * a_k - (n-1)^2$$

Όμως έχουμε από την άσκηση 2.6 ότι,

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = 0^2 + 1^2 x + 2^2 x^2 + \ldots =$$

$$= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

και

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = \binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1}x + \binom{n-1}{n-2}x^2 + \ldots =$$

$$= x[\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n-2}x + \ldots] = x[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}x + \ldots] = x(1+x)^{n-1}$$

Επομένως η συνέλιξη

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση,

$$A(x) \cdot B(x) = x(1+x)^{n-1} \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2(1+x)^n}{(1-x)^3} =$$

$$= x^2 \sum_{m=0}^{n} \tbinom{n}{m} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{-3}{k} (-1)^k x^k = x^2 \sum_{m=0}^{n} \tbinom{n}{m} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{n}{m} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^{m+k+2}$$

Άρα ο συντελεστής του x^n είναι ο,

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{m=0}^{n-2} \tbinom{n}{m} \frac{(n-m-1)(n-m)}{2}$$

Επομένως από τα παραπάνω έχουμε ότι,

$$\sum_{k=2}^{n-1} a_{n-k} b_k = \sum_{m=0}^{n-2} \tbinom{n}{m} \frac{(n-m-1)(n-m)}{2} - (n-1)^2 =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \sum_{m=0}^{n-2} \tbinom{n-2}{m} - (n-1)^2 = n(n-1)2^{n-3} - (n-1)^2$$

Άσκηση 2.11. *Έστω X μία τυχαία μεταβλητή, που παίρνει τις τιμές $0, 1, \ldots$ με πιθανότητα αντίστοιχα*

$$x_0, x_1, \ldots, (x_i \geq 0 \text{ και } \sum_i x_i = 1).$$

Έστω $X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k s^k$ η γεννήτρια συνάρτηση της X. Έστω Y η τυχαία μεταβλητή, που παίρνουμε εάν προσθέσουμε n ανεξάρτητα δείγματα της X. Έστω $y_0, y_1, \ldots$ οι πιθανότητες να πάρει η y τις τιμές $0, 1, 2, \ldots$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η γεννήτρια συνάρτηση $Y(s) = \sum_k y_k s^k$ είναι ίση με $[X(s)]^n$.

Έστω οι ισόνομες με τη X τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και έστω ότι $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Τότε η πιθανότητα y_k να πάρει η μεταβλητή Y την τιμή k θα ισούται με το άθροισμα των $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$ για όλα τα $i_1, i_2, \ldots, i_n$ τέτοια ώστε $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k$. Το άθροισμα όμως αυτών των γινομένων είναι πράγματι ο συντελεστής του x^k στο πολυώνυμο,

$$Y(s) = (x_0 s^0 + x_1 s + x_2 s^2 + \ldots)(x_0 s^0 + x_1 s + x_2 s^2 + \ldots) \ldots$$
$$\ldots (x_0 s^0 + x_1 s + x_2 s^2 + \ldots) =$$
$$= (x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + \ldots)^n = [X(s)]^n$$

Επομένως,

$$Y(s) = \sum_k y_k s^k = [X(s)]^n$$

Άσκηση 2.12. *Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots$ όπου a_r είναι ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε (με επαναλήψεις) r γράμματα από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ με τον περιορισμό ότι το γράμμα 0 θα επιλεγεί ζυγό αριθμό φορών. Με βάση τη γεννήτρια συνάρτηση υπολογίστε το a_r.*

Η γεννήτρια συνάρτηση, που έχει σαν συντελεστές τους αριθμούς των τρόπων επιλογής, είναι η,

$$A(x) = (1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{1 - x^2} \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 + x} \frac{1}{(1 - x)^3}$$

Κάνουμε ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων,

$$A(x) = \frac{1}{1 + x} \frac{1}{(1 - x)^3} = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{1 - x} + \frac{C}{(1 - x)^2} + \frac{D}{(1 - x)^3} \Longrightarrow$$

$$1 = A(1 - x)^3 + B(1 + x)(1 - x)^2 + C(1 - x)(1 + x) + D(1 + x) \Longrightarrow$$

$$1 = A + 3Ax^2 - 3Ax - Ax^3 + Bx^3 - Bx^2 - Bx + B + C - Cx^2 + D + Dx \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A - B = 0 \\ 3A - B - C = 0 \\ -3A - B + D = 0 \\ A + B + C + D = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = B \\ C = 2A \\ D = 4A \\ A + A + 2A + 4A = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{8} \\ B=\frac{1}{8} \\ C=\frac{1}{4} \\ D=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Άρα,

$$A(x)=\frac{1}{8}(1+x)^{-1}+\frac{1}{8}(1-x)^{-1}+\frac{1}{4}(1-x)^{-2}+\frac{1}{2}(1-x)^{-3}=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-1)^k x^k+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}(-1)^k x^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}(-1)^k x^k=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k+\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}x^k+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k \Longrightarrow$$

$$a_r=\frac{1}{8}(-1)^r+\frac{1}{8}+\frac{r+1}{4}+\frac{(r+1)(r+2)}{4}=$$

$$=\frac{1}{8}[1+(-1)^r]+\frac{(r+1)(r+3)}{4}$$

Άσκηση 2.13. *Δίνεται η γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία $a_0, a_1, \ldots$. Να βρεθούν*

1. *η γεννήτρια συνάρτηση της υπακολουθίας a_1, a_4,a_7,$\ldots$ (Υπόδειξη: Αν $w=e^{\frac{2}{3}\pi i}$ τότε $w^0+w^1+w^2=0$.)*
2. *η γεννήτρια συνάρτηση για την υπακολουθία των όρων με ζυγό δείκτη, δηλαδή a_0,a_2,a_4,$\ldots$*

1. Έστω $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$. Οι,

$$w_0=1, w_1=e^{\frac{2}{3}\pi i}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

και

$$w_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = -(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

είναι οι τρεις μιγαδικές τρίτες ρίζες της μονάδος και γι αυτές ισχύει από τη μιγαδική ανάλυση ότι

$$w_0 + w_1 + w_2 = 0 \text{ και } w_1^2 = w_2, w_2^2 = w_1$$

Έχουμε,

$$\frac{A(x) - a_0}{x} = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \frac{A(w_0x)-a_0}{w_0x} = \frac{A(x)-a_0}{x} = a_1 + a_2w_0x + a_3w_0^2x^2 + \ldots \\ \frac{A(w_1x)-a_0}{w_1x} = a_1 + a_2w_1x + a_3w_1^2x^2 + \ldots \\ \frac{A(w_2x)-a_0}{w_2x} = a_1 + a_2w_2x + a_3w_2^2x^2 + \ldots \end{cases}\right\} \overbrace{\Longrightarrow}^{(+)}$$

$$\frac{A(w_0x) - a_0}{w_0x} + \frac{A(w_1x) - a_0}{w_1x} + \frac{A(w_2x) - a_0}{w_2x} =$$

$$= 3a_1 + (w_0 + w_1 + w_2)a_2x + (w_0 + w_1 + w_2)a_3x^2 + \ldots \Longrightarrow$$

$$\frac{A(w_0x) + w_2A(w_1x) + w_1A(w_2x)}{3x} = a_1 + a_4x^3 + a_7x^6 + \ldots \Longrightarrow$$

$$\frac{A(w_0\sqrt[3]{x}) + w_2A(w_1\sqrt[3]{x}) + w_1A(w_2\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}} = a_1 + a_4x + a_7x^2 + \ldots.$$

Άρα η γεννήτρια συνάρτηση της υπακολουθίας $a_1, a_4, a_7, \ldots$ είναι η,

$$A_{3k-2}(x) = \frac{A(w_0\sqrt[3]{x}) + w_2A(w_1\sqrt[3]{x}) + w_1A(w_2\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}}$$

2. Έστω $A(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$. Τότε $A(-x) = a_0-a_1x+a_2x^2-\ldots$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε,

$$A(x) + A(-x) = 2a_0 + 2a_2x^2 + \ldots \Longrightarrow$$

$$\frac{A(x) + A(-x)}{2} = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots$$

και τελικά,

$$a_0 + a_2x + a_4x^2 + \ldots = \frac{A(\sqrt{x}) + A(-\sqrt{x})}{2}.$$

Άρα γεννήτρια συνάρτηση της υπακολουθίας των όρων με ζυγό δείκτη είναι η,

$$Z(x) = \frac{A(\sqrt{x}) + A(-\sqrt{x})}{2}$$

Άσκηση 2.14. *Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots,$ όπου ο όρος a_r ισούται με τον αριθμό των τρόπων να επιλέξουμε r αντικείμενα με επαναλήψεις από 10 συνολικά αντικείμενα, μεταξύ των οποίων το αντικείμενο X μπορεί να επιλεγεί το πολύ δύο φορές, το αντικείμενο Y το πολύ τρεις φορές και τα υπόλοιπα αντικείμενα από μία το πολύ φορά.*

Θα δείξουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας είναι η,

$$A(z) = (1 + z + z^2)(1 + z + z^2 + z^3)(1 + z)^8$$

Πράγματι ο συντελεστής του z^r στο ανάπτυγμα της $A(z)$ είναι ο αριθμός των τρόπων δημιουργίας του όρου z^r από τους παράγοντες $1+z+z^2, 1+z+z^2+z^3$ και τους οκτώ παράγοντες $1 + z$.

Η συνεισφορά του παράγοντα $1 + z + z^2$ είναι $1, z$ ή z^2 ανάλογα με το αν επιλέγουμε το αντικείμενο X μηδέν, μία ή δύο φορές. Ομοίως η συνεισφορά του παράγοντα $1+z+z^2+z^3$ είναι $1, z, z^2$ ή z^3 ανάλογα με το αν επιλέγουμε το αντικείμενο Y μηδέν, μία, δύο ή τρεις φορές. Τέλος η συνεισφορά καθενός από τους οκτώ παράγοντες $1 + z$ είναι 1 ή z ανάλογα με το αν καθένα από τα υπόλοιπα οκτώ αντικειμένων επιλέγεται καμμία ή μία φορά.

Άσκηση 2.15. *Με τη χρήση απαριθμητών να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε r αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις από n αντικείμενα.*

Η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ των απαριθμητών είναι η,

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^n$$

αφού κάθε παρένθεση αντιστοιχεί στη δυνατότητά μας να επιλέξουμε κανένα, ένα, δύο, ... αντικείμενα από κάθε είδος, ενώ το γινόμενο των παρενθέσεων (ύψωση στη n-οστή δύναμη) αντιστοιχεί στο συνδυασμό των τρόπων επιλογής για τα n αντικείμενα μαζί. Έτσι έχουμε,

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^n = (\frac{1}{1-x})^n = (1-x)^{-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{-n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{n+k-1}{k} x^k$$

Άρα ο απαριθμητής για την επιλογή r αντικειμένων με επανάληψη από n αντικείμενα είναι ο συντελεστής του x^r στο άθροισμα, δηλαδή ο $\binom{n+r-1}{r}$.

Άσκηση 2.16. *Ποιος είναι ο απαριθμητής για τις επιλογές r αντικειμένων από n αντικείμενα ($r \geq n$), με απεριόριστες επαναλήψεις, αλλά κάθε αντικείμενο να επιλέγεται κάθε φορά.*

Αφού κάθε αντικείμενο από τα r μπορεί να επιλέγεται μία, δύο, τρεις, ... φορές, ο ζητούμενος απαριθμητής θα είναι,

$$A(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^n = (\frac{1}{1-x} - 1)^n = (\frac{1-1+x}{1-x})^n =$$

$$= (\frac{x}{1-x})^n = x^n(1-x)^{-n} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{-n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{n+k-1}{k} x^{n+k}$$

Άρα ο αριθμός των τρόπων για την επιλογή r αντικειμένων από τα n με τον δοσμένο περιορισμό, κάθε αντικείμενο να επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά, δίνεται από τον συντελεστή του x^r, δηλαδή για $k = r - n$ και είναι ο $\binom{r-1}{r-n}$.

Άσκηση 2.17. *Να υπολογιστεί το άθροισμα,*

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{r!}{(r-i+1)!(i+1)!}$$

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{r!}{(r-i+1)!(i+1)!} = \sum_{i=0}^{r} \frac{r!(r+1)(r+2)}{(r-i+1)!(i+1)!} \cdot \frac{1}{(r+1)(r+2)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \tbinom{r+2}{i+1} \frac{1}{(r+1)(r+2)} = \frac{1}{(r+1)(r+2)} \sum_{i=0}^{r} \tbinom{r+2}{i+1} =$$

$$= \frac{1}{(r+1)(r+2)} [\tbinom{r+2}{1} + \tbinom{r+2}{2} + \ldots + \tbinom{r+2}{r+1}] =$$

$$= \frac{1}{(r+1)(r+2)} [2^{r+2} - \tbinom{r+2}{0} - \tbinom{r+2}{r+2}] =$$

$$= \frac{1}{(r+1)(r+2)} (2^{r+2} - 1 - 1) = \frac{2^{r+2}-2}{(r+1)(r+2)}$$

Άσκηση 2.18. *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους 2t+1 μπάλλες μπορούν να τοποθετηθούν σε 3 διακεκριμμένα κουτιά, έτσι ώστε κάθε κουτί να μην περιέχει περισσότερες από t μπάλλες.*

Ο απαριθμητής του ζητούμενου αριθμού τρόπων για τις διάφορες τιμές του 2t+1 είναι ο,

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^t)(1 + x + x^2 + \ldots + x^t)(1 + x + x^2 + \ldots + x^t)$$

όπου κάθε παρένθεση συμβολίζει το γεγονός ότι σε κάθε κουτί μπορούμε να τοποθετήσουμε από 0 εώς και t μπάλλες, ενώ το γινόμενο των παρενθέσεων είναι ο ολικός τρόπος τοποθέτησης των μπαλλών στα 3 κουτιά (θα δίνεται από το συντελεστή του x^{2t+1} στο ανάπτυγμα της $A(x)$). Έχουμε,

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^t)^3 = (\frac{1-x^{t+1}}{1-x})^3 =$$

$$= (1-x^{t+1})^3(1-x)^{-3} = (1 - 3x^{t+1} + 3x^{2t+2} - x^{3t+3}) \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{-3}{k}(-1)^k x^k =$$

$$= (1 - 3x^{t+1} + 3x^{2t+2} - x^{3t+3}) \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{k+2}{2} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k - 3\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{t+k+1} + 3\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{2t+2+k} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{3t+3+k}$$

Άρα η ζητούμενη τιμή, δηλαδή ο συντελεστής του x^{2t+1} στο παραπάνω ανάπτυγμα, είναι ανάπτυγμα, είναι $\binom{2t+3}{2} - 3\binom{t+2}{2}$.

Άσκηση 2.19. *Έχουμε 2 είδη αντικειμένων. Το είδος 1 έχει p αντικείμενα και το είδος 2 έχει q αντικείμενα. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε r αντικείμενα;*

Εάν θέσουμε $m = min\{p, r\}$ και $n = min\{q, r\}$, τότε ο απαριθμητής A(x) των ζητούμενων τρόπων επιλογής είναι

$$A(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^m)(1+x+x^2+\ldots+x^n) = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x} =$$

$$= (1 - x^{m+1} - x^{n+1} + x^{m+n+2})(1-x)^{-2} =$$

$$= (1 - x^{m+1} - x^{n+1} + x^{m+n+2}) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Εάν $p + q < r$, τότε προφανώς οι ζητούμενοι τρόποι είναι 0.

2. Εάν $p + q > r$ και

   - $p > r, q > r$, τότε,

     $$A(x) = (1 - 2x^{r+1} + x^{2r+2}) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

     και ο συντελεστής του x^r είναι r+1.

   - $p > r, q < r$, τότε,

     $$A(x) = (1 - x^{r+1} - x^{q+1} + x^{r+q+2}) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k,$$

     και ο συντελεστής του x^r είναι $(r + 1) - (r - q) = q + 1$.

- $p < q, q > r$, τότε όμοια με την προηγούμενη υποπερίπτωση θα έχουμε $p+1$.

Άσκηση 2.20. *Να προσδιοριστεί ο συντελεστής του x^{15} στο ανάπτυγμα της $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^4$.*

Αφού,

$$(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^4 = [x^2(1 + x + x^2 + \ldots)]^4 =$$

$$= (\frac{x^2}{1-x})^4 = \frac{x^8}{(1-x)^4},$$

ο συντελεστής του x^{15} στο ανάπτυγμα της $f(x)$ είναι ο συντελεστής του x^7 στο ανάπτυγμα του $(1-x)^{-4}$, δηλαδή,

$$\tbinom{-4}{7}(-1)^7 = (-1)^7\tbinom{4+7-1}{7}(-1)^7 = \tbinom{10}{7} = 120.$$

Άσκηση 2.21. *Με πόσους τρόπους μπορεί ένας ταγματάρχης να μοιράσει 24 σφαίρες σε τέσσερις λοχίες έτσι ώστε κάθε λοχίας να πάρει τουλάχιστον τρεις σφαίρες αλλά όχι περισσότερες από οκτώ σφαίρες.*

Οι επιλογές για τον αριθμό των σφαιρών που παίρνει κάθε λοχίας δίνονται από την συνάρτηση $x^3 + x^4 + \ldots + x^8$. Έτσι ο απαριθμητής των ζητούμενων τρόπων διαμοίρασης, δεδομένου ότι οι λοχίες είναι τέσσερις, είναι ο $A(x) = (x^3 + x^4 + \ldots + x^8)^4$.

Αναζητούμε τον συντελεστή του x^{24} στο ανάπτυγμα της $A(x)$. Έχουμε,

$$(x^3 + x^4 + \ldots + x^8)^4 = x^{12}(1 + x + x^2 + \ldots + x^5)^4 =$$

$$= x^{12}(\frac{1-x^6}{1-x})^4$$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι ο συντελεστής του x^{12} στο ανάπτυγμα της,

$$(1-x^6)^4(1-x)^{-4} =$$

$$= [1 - \tbinom{4}{1}x^6 + \tbinom{4}{2}x^{12} - \ldots + x^{24}][\tbinom{-4}{0} + \tbinom{-4}{1}(-x) + \tbinom{-4}{2}(-x)^2 + \ldots]$$

ο οποίος είναι ο,

$$[\tbinom{-4}{12}(-1)^{12} - \tbinom{4}{1}\tbinom{-4}{6}(-1)^6 + \tbinom{4}{2}\tbinom{-4}{0}] = [\tbinom{15}{12} - \tbinom{4}{1}\tbinom{9}{6} + \tbinom{4}{2}] = 125.$$

Άσκηση 2.22. *Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να τοποθετηθούν 25 όμοιες σφαίρες σε 7 διαφορετικά κουτιά, με μόνο τον περιορισμό ότι το πρώτο κουτί δεν επιτρέπεται να έχει πάνω από 10 σφαίρες;*

Η γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των τρόπων τοποθέτησης r σφαιρών σε 7 κουτιά, με τον περιορισμό να τοποθετηθούν το πολύ 10 σφαίρες στο πρώτο κουτί, είναι,

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{10})(1 + x + x^2 + \ldots)^6 =$$

$$= (\frac{1 - x^{11}}{1 - x})(\frac{1}{1 - x})^6 = (1 - x)^{-7}(1 - x^{11}) =$$

$$= (1 + \binom{7}{1}x + \binom{8}{2}x^2 + \ldots + \binom{r+7-1}{r}x^r + \ldots)(1 - x^{11})$$

Ζητάμε τον συντελεστή του x^{25} στο παραπάνω γινόμενο, ο οποίος δίνεται από το άθροισμα, [3]

$$\binom{25+7-1}{25} \cdot 1 + \binom{14+7-1}{14} \cdot (-1) = \binom{31}{25} - \binom{20}{14} = 697521$$

Άσκηση 2.23. *Πόσοι τρόποι επιλογής 25 παιχνιδιών από μία γκάμα 7 συνολικά παιχνιδιών υπάρχουν, όταν μπορούμε να επιλέξουμε από δύο εώς έξι κομμάτια από κάθε παιχνίδι;*

Η γεννήτρια συνάρτηση για την a_r, δηλαδή την ακολουθία που δίνει τον αριθμό των τρόπων επιλογής r παιχνιδιών από 7 διαφορετικά παιχνίδια, με επιλογή από δύο εώς έξι κοματιών από κάθε παιχνίδι, είναι,

$$f(x) = (x^2 + x^3 + \ldots + x^6)^7 =$$

$$= [x^2(1 + x + \ldots + x^4)]^7 = x^{14}(1 + x + \ldots + x^4)^7$$

---

[3] Η απάντηση στην άσκηση μπορούσε να βρεθεί με το εξής συνδυαστικό επιχείρημα:
Μετρούμε όλους τους τρόπους τοποθέτησης 25 σφαιρών σε 7 κουτιά και αφαιρούμε απ' αυτούς εκείνους που δεν πληρούν τον δοσμένο περιορισμό. Ολοι οι τρόποι είναι $\binom{25+7-1}{25} = \binom{31}{25}$, ενώ ο αριθμός των τρόπων που δεν πληρούν τον περιορισμό βρίσκεται αν τοποθετήσουμε 11 από τις 25 σφαίρες στο πρώτο κουτί και τις υπόλοιπες αυθαίρετα σε όλα τα κουτιά, του πρώτου συμπεριλαμβανομένου, δηλαδή είναι ο $\binom{(25-11)+7-1}{25-11} = \binom{20}{14}$, πράγμα που επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα που βρέθηκε παραπάνω.

Αναζητούμε τον συντελεστή του x^{25} στο ανάπτυγμα της $f(x)$. Αυτός είναι ο συντελεστής του x^{11} στο ανάπτυγμα,

$$(1+x+\ldots+x^4)^7$$

Έχουμε,

$$(1+x+\ldots+x^4)^7 = (\frac{1-x^5}{1-x})^7 = (1-x)^{-7}(1-x^5)^7 =$$

$$= (1+\tbinom{1+7-1}{1}x+\ldots+\tbinom{r+7-1}{r}x^r+\ldots)\cdot$$

$$\cdot(1-\tbinom{7}{1}x^5+\ldots+(-1)^r\tbinom{7}{r}x^{5r}-\ldots-\tbinom{7}{7}x^{35})$$

Άρα ο συντελεστής του x^{11} στο παραπάνω γινόμενο είναι,

$$\tbinom{11+7-1}{11}\cdot 1+\tbinom{6+7-1}{6}\cdot(-\tbinom{7}{1})+\tbinom{1+7-1}{1}\cdot\tbinom{7}{2} =$$

$$= \tbinom{17}{11}-\tbinom{12}{6}\tbinom{7}{1}+\tbinom{7}{1}\tbinom{7}{2} = 6055$$

Άσκηση 2.24. *Με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων να προσδιορίσετε πόσα τετραμελή υποσύνολα του συνόλου $S=\{1,2,\ldots,15\}$ δεν περιέχουν συνεχόμενους ακεραίους.*

Έστω $A=\{a,b,c,d\}$ ένα τετραμελές υποσύνολο του S, που δεν περιέχει δύο συνεχόμενους ακεραίους. Χωρίς βλάβη της γενικότητος, αφού τα στοιχεία ενός συνόλου δεν θεωρούνται διατεταγμένα, θεωρούμε ότι $1\leq a<b<c<d\leq 15$. Τότε υποχρεωτικά με βάση τους περιορισμούς που θέτει η άσκηση ισχύουν τα εξής,

$$c_1=a-1\geq 0, c_2=b-a\geq 2, c_3=c-b\geq 2$$

$$c_4=d-c\geq 2, c_5=15-d\geq 0$$

Τέλος, είναι προφανές ότι έχουμε και,

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=14$$

Αντίστροφα, αν έχουμε πέντε ακεραίους c_1,c_2,c_3,c_4 και c_5 τέτοιους ώστε $c_1,c_5\geq 0, c_2,c_3,c_4\geq 2$ και $c_1+c_2+\ldots+c_5=14$ μπορούμε αυτομάτως να δημιουργήσουμε ένα τετραμελές υποσύνολο του S,

$$A=\{1+c_1,1+c_1+c_2,\ldots,1+c_1+\ldots+c_4\}$$

Το υποσύνολο αυτό ικανοποιεί τον περιορισμό που τέθηκε από την άσκηση.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των τετραμελών υποσυνόλων του S, που δεν περιέχουν συνεχόμενους ακεραίους, και των ακεραίων λύσεων της παραπάνω εξίσωσης, με τους δοσμένους περιορισμούς. Η γεννήτρια συνάρτηση που δίνει τον αριθμό των λύσεων της πιο πάνω εξίσωσης είναι η,

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)(x^2 + x^3 + \ldots)^3(1 + x + x^2 + \ldots) =$$

$$= x^6(1 - x)^{-5}$$

Αναζητούμε τον συντελεστή του x^{14} στο ανάπτυγμα της $f(x)$ ή διαφορετικά τον συντελεστή του x^8 στο ανάπτυγμα του $(1 - x)^{-5}$. Αυτός είναι ο,

$$\binom{-5}{8}(-1)^8 = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = 495$$

Άσκηση 2.25. *Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας a_r, του αριθμού των τρόπων έκφρασης του r σαν άθροισμα διαφορετικών ακεραίων.*

Η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση είναι η,

$$g(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \ldots (1 + x^k) \ldots .$$

Ο παράγοντας $1 + x^k$ στο παραπάνω γινόμενο εκφράζει το γεγονός ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσομε τον ακέραιο k μία ή καμία φορά σ' ένα συγκεκριμένο άθροισμα για το σχηματισμό του ακεραίου r. Έτσι ο r μπορεί να σχηματιστεί με χρήση κάθε ακεραίου το πολύ μία φορά, όπως απαιτεί και η άσκηση.

Άσκηση 2.26. *Να δειχθεί με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων ότι κάθε θετικός ακέραιος μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2.*

Η γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία a_r του αριθμού των τρόπων να γράψουμε τον ακέραιο r σαν άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2 είναι,

$$g(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \ldots (1 + x^{2^k}) \ldots .$$

Για να δείξουμε ότι κάθε ακέραιος μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2, αρκεί να δείξουμε ότι ο συντελεστής κάθε δύναμης του x στην $g(x)$ είναι η μονάδα. Δηλαδή ότι,

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \Longrightarrow$$

$$(1-x)g(x) = 1$$

Αποδεικνύουμε αυτήν την ταυτότητα με την εξής αναδρομική τεχνική,

$$(1-x)g(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots =$$

$$= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\ldots = (1-x^4)(1+x^4)\ldots =$$

$$= \ldots = 1$$

αφού η διαρκής αντικατάσταση του γινομένου $(1-x^{2^k})(1+x^{2^k})$ από το $1-x^{2^{k+1}}$ διαγράφει όλους τους παράγοντες της $g(x)$ τον έναν μετά τον άλλον με αποτέλεσμα να έχουμε τελικά,

$$(1-x)g(x) = 1 \Longrightarrow g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Άσκηση 2.27. *Έστω $d_o(n)$ ο αριθμός των διαμερίσεων ενός ακεραίου n σε αθροίσματα που περιέχουν μόνο περιττούς όρους. Ορίζουμε $d_o(0) = 1$.*

1. *Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση $D_o(x)$ της ακολουθίας $d_o(0), d_o(1), \ldots$.*

2. *Εάν $d_d(n)$ είναι ο αριθμός των διαμερίσεων ενός ακεραίου n σε αθροίσματα που περιέχουν διαφορετικούς όρους, τί σχέση έχουν τα $D_d(x)$ και $D_o(x)$;*

1. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $d_o(0), d_o(1), d_o(2), \ldots$ είναι η,

$$D_o(x) = (1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\ldots =$$

$$= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\ldots$$

2. Έχουμε,

$$\begin{aligned} D_d(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots = \\ &= \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\ldots = \\ &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\ldots = D_o(x) \end{aligned}$$

Άσκηση 2.28. *Βρείτε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για την a_r, τον αριθμό των μεταθέσεων r αντικειμένων από n αντικείμενα χωρίς επανάληψη.*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι η,

$$f(x) = (1+x)^n$$

όπου κάθε παράγοντας στο παραπάνω γινόμενο αντιπροσωπεύει τη δυνατότητα να επιλέξουμε ή όχι ένα από τα n διαφορετικά αντικείμενα σε κάποια συγκεκριμένη μετάθεση r αντικειμένων. Το ότι η σειρά επιλογής παίζει ρόλο εκφράζεται από το γεγονός ότι θεωρούμε τον παραπάνω απαριθμητή σαν έναν εκθετικό απαριθμητή. Έτσι ο ζητούμενος αριθμός a_r είναι ο συντελεστής του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$, δηλαδή στο,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

και επομένως, $a_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Άσκηση 2.29. *Βρείτε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για το a_r, τον αριθμό των διαφορετικών μεταθέσεων r αντικειμένων, που επιλέγονται από τέσσερις διαφορετικούς τύπους αντικειμένων, εκ των οποίων τα αντικείμενα κάθε τύπου επιλέγονται τουλάχιστον δύο και όχι περισσότερες από πέντε φορές.*

Ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε στη σειρά r αντικείμενα με e_i αντικείμενα του i-οστού τύπου είναι $\frac{r!}{e_1!e_2!e_3!e_4!}$. Για να υπολογίσομε το άθροισμα όλων αυτών των όρων, που πληρούν τους δοθέντες περιορισμούς, θέλουμε τον συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της,

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4$$

Κάθε παράγοντας στο πιο πάνω γινόμενο αντιπροσωπεύει τη δυνατότητα επιλογής δύο, τριών, τεσσάρων ή πέντε αντικειμένων από κάθε ένα από τα τέσσερα είδη. Ο απαριθμητής λαμβάνεται εκθετικός γιατί προφανώς μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία παρουσιάζονται τα αντικείμενα στην κάθε μας επιλογή των r αντικειμένων.

Άσκηση 2.30. *Βρείτε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης r (διαφορετικών) ανθρώπων σε τρεις διαφορετικές αίθουσες με έναν τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα. Επαναλάβετε την παραπάνω άσκηση με τον περιορισμό ότι θα τοποθετηθεί ζυγός αριθμός ανθρώπων σε κάθε αίθουσα.*

Στην πρώτη περίπτωση η ζητούμενη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση είναι η,

$$f(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^3$$

όπου ο κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα τοποθέτησης ενός, δύο, τριών ή περισσοτέρων ανθρώπων σε κάθε μία από τις τρεις αίθουσες. Θεωρούμε τον εκθετικό απαριθμητή γιατί τόσο οι άνθρωποι όσο και οι αίθουσες στις οποίες τοποθετούνται, θεωρούνται διακεκριμένοι.

Με αντίστοιχο σκεπτικό η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για το δεύτερο ερώτημα της άσκησης είναι η,

$$g(x) = (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)^3$$

Άσκηση 2.31. *Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών διατάξεων r αντικειμένων που επιλέγονται από απεριόριστο αριθμό αντικειμένων n διαφορετικών ειδών.*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση που λύνει το ζητούμενο πρόβλημα είναι η,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^n = \\ &= (e^x)^n = e^{nx} \end{aligned}$$

Κάθε παράγοντας στο γινόμενο εκφράζει τη δυνατότητα επιλογής κανενός, ενός, δύο ή περισσοτέρων αντικειμένων από καθένα από τα n διαφορετικά είδη αντικειμένων. Ο εκθετικός απαριθμητής λαμβάνεται για να ληφθεί υπόψιν η σειρά με την οποία θα διαταχθούν τα επιλεγμένα αντικείμενα. Αναζητούμε τώρα τον συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$. Αυτός είναι n^r.

Άσκηση 2.32. *Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης 25 διαφορετικών αντικειμένων σε 3 διαφορετικά κουτιά με ένα τουλάχιστον αντικείμενο σε κάθε κουτί.*

Στην άσκηση 2.30 είδαμε ότι ο εκθετικός απαριθμητής για το ανάλογο πρόβλημα τοποθέτησης r ανθρώπων σε τρεις αίθουσες με έναν τουλάχιστον άνθρωπο σε κάθε αίθουσα είναι ο,

$$f(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^3 = (e^x - 1)^3$$

Για να βρούμε τον συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα του $(e^x - 1)^3$ πρέπει πρώτα να αναπτύξουμε αυτή τη διωνυμική έκφραση ως προς e^x. Έχουμε λοιπόν,

$$(e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1 =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} 3^r \frac{x^r}{r!} - 3\sum_{r=0}^{\infty} 2^r \frac{x^r}{r!} + 3\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} - 1 =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (3^r - 3 \cdot 2^r + 3)\frac{x^r}{r!} - 1$$

Επομένως ο συντελεστής του $\frac{x^{25}}{25!}$ είναι ο $3^{25} - 3 \cdot 2^{25} + 3$.

Άσκηση 2.33. *Βρείτε με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων τον αριθμό των τετραδικών ακολουθιών r ψηφίων, που περιέχουν ζυγό αριθμό μηδενικών και μονό αριθμό μονάδων.*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για το πρόβλημα είναι η,

$$f(x) = (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots)(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \cdot e^x \cdot e^x =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} - e^0 + e^0 - e^{-2x})e^{2x} = \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)$$

Έτσι για θετικό r ο συντελεστής του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$ είναι ο $\frac{1}{4}4^r = 4^{r-1}$.

Άσκηση 2.34. *Να βρεθεί ο εκθετικός απαριθμητής για τον αριθμό των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε r ή λιγότερα αντικείμενα από r διακεκριμμένα αντικείμενα και να τα κατανείμουμε σε n διακεκριμμένες υποδοχές, με τα αντικείμενα μέσα σε κάθε υποδοχή ταξινομημένα.*

Θα υπολογίσουμε κατ' αρχάς τον εκθετικό απαριθμητή για τον αριθμό των τρόπων επιλογής ακριβώς r από r διακεκριμμένα αντικείμενα και κατανομής τους σε n διακεκριμμένες υποδοχές, με τα αντικείμενα σε κάθε υποδοχή ταξινομημένα. Αυτός είναι,

$$A(x) = (1 + 1!\frac{x}{1!} + 2!\frac{x^2}{2!} + 3!\frac{x^3}{3!} + \ldots)^n =$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^n = (\frac{1}{1-x})^n = (1-x)^{-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{-n}{k}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

Άρα ο αριθμός των τρόπων κατανομής r διαφορετικών αντικειμένων σε n διακεκριμμένες υποδοχές είναι $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$. Συνεπώς ο συνολικός αριθμός τρόπων επιλογής r ή λιγότερων αντικειμένων από r διακεκριμμένα αντικείμενα και κατανομής τους σε n διακεκριμμένες υποδοχές είναι,

$$\sum_{k=0}^{r} \tbinom{r}{k} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

και ο εκθετικός απαριθμητής του,

$$A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{r} \tbinom{r}{k} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{x^r}{r!}$$

Άσκηση 2.35. *Ενα πλοίο διαθέτει 48 σημαίες, από τις οποίες 12 κόκκινες, 12 άσπρες, 12 μπλέ και 12 μαύρες. Δώδεκα απ' αυτές τις σημαίες τοποθετούνται σε ένα κατακόρυφο ιστό προκειμένου να ανταλλάσσονται μηνύματα με άλλα πλοία. Πόσα απ' αυτά τα μηνύματα χρησιμοποιούν ζυγό αριθμό μπλέ σημαιών και μονό αριθμό μαύρων σημαιών;*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση,

$$f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots)$$

συμπεριλαμβάνει όλα τα μηνύματα που αποτελούνται από n σημαίες,με $n \geq 1$. Οι δύο τελευταίες παρενθέσεις περιορίζουν τα μηνύματα έτσι ώστε να αποτελούνται από ζυγό αριθμό μπλέ σημαιών και μονό αριθμό μαύρων σημαιών. Έχουμε,

$$f(x) = (e^x)^2(\frac{e^x + e^{-x}}{2})(\frac{e^x - e^{-x}}{2}) = \frac{1}{4}e^{2x}(e^{2x} - e^{-2x}) =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{4x} - 1) = \frac{1}{4}(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!} - 1) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!}$$

Επομένως ο συντελεστής του $\frac{x^{12}}{12!}$ που είναι και ο ζητούμενος αριθμός μηνυμάτων είναι,

$$\frac{1}{4}4^{12} = 4^{11} = 4194304$$

Άσκηση 2.36. *Μία εταιρεία προσλαμβάνει 11 νέους υπαλλήλους. Κάθε υπάλληλος τοποθετείται σε ένα από τα τέσσερα υποκαταστήματα της εταιρείας και κάθε υποκατάστημα ενισχύεται με έναν τουλάχιστον νέο υπάλληλο. Με πόσους τρόπους μπορούν να γίνουν οι τοποθετήσεις των νεοπροσληφθέντων υπαλλήλων;*

Έστω A, B, C και D τα υποκαταστήματα της παραπάνω εταιρείας. Ο ζητούμενος αριθμός τρόπων ισούται τότε με τον αριθμό των ακολουθιών 11 γραμμάτων από το σύνολο $\{A, B, C, D\}$, όπου κάθε γράμμα πρέπει να εμφανίζεται μία τουλάχιστον φορά. [4] Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για

[4] Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των επί συναρτήσεων $g : X \longrightarrow Y$, με $|X| = 11$ και $|Y| = 4$. Το ίδιο πρόβλημα γενικευμένο μελετάται στην άσκηση 3.4.

τον αριθμό αυτών των διατάξεων είναι,

$$f(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^4 = (e^x - 1)^4 =$$

$$= e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$$

Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του $\frac{x^{11}}{11!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$. Αυτός είναι,

$$4^{11} - 4 \cdot 3^{11} + 6 \cdot 2^{11} - 4 \cdot 1^{11} = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \tbinom{4}{i} (4-i)^{11}.$$

Άσκηση 2.37. *Να υπολογισθεί ο αριθμός των επί συναρτήσεων από ένα σύνολο r στοιχείων σε ένα σύνολο n στοιχείων ($r \geq n$). Στη συνέχεια να υπολογισθεί ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου με r στοιχεία σε n μη κενές κλάσεις ισοδυναμίας.*

Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση για την ακολουθία a_r του αριθμού των επί συναρτήσεων από ένα σύνολο r στοιχείων σε ένα σύνολο n στοιχείων είναι η,

$$f(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^n$$

Κάθε ένας από τους n παράγοντες του παραπάνω γινομένου εκφράζει το γεγονός ότι σε κάθε ένα από τα n στοιχεία του πεδίου τιμών πρέπει να αντιστοιχίζεται ένα τουλάχιστο στοιχείο του πεδίου ορισμού. Ο εκθετικός απαριθμητής λαμβάνεται για να συνυπολογισθεί το γεγονός ότι τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το πεδίο τιμών αποτελούνται από διακεκριμένα στοιχεία.

Αναζητούμε τον συντελεστή του $\frac{x^r}{r!}$ στο ανάπτυγμα της $f(x)$,

$$f(x) = (e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} (-1)^k e^{(n-k)x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[(n-k)x]^i}{i!}$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός των επί συναρτήσεων είναι ο,

$$a_r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^r.$$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το δεύτερο ερώτημα της άσκησης είναι ισοδύναμο με το πρώτο.

Κεφάλαιο 3

Σχέσεις Αναδρομής

I saw a man down on lonely street
A broken man who looked like me
And no one knows the pain that he's been living
He lost his love and still hasn't forgiven
He said: I've been through some changes
But one thing always stays the same

Whithout love,there's nothing whithout love
Nothing else can get you through the night
Nothing else feels right whithout love
There's nothing whithout love
Nothing else but love can burn as bright
And nothing would mean nothing without love

Without Love
BON JOVI

Άσκηση 3.1. *Να λυθούν οι παρακάτω σχέσεις αναδρομής με δύο τρόπους:*

1.
$$a_n + a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2} = 0, a_0 = 0, a_1 = 1$$

2.
$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2, a_0 = 6, a_1 = 7$$

3.
$$a_n = 2a_{n-1} + 1, a_0 = 1$$

4.
$$a_n = 2a_{n-1} + n, a_1 = 1$$

5.
$$a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0, a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = 8$$

6.
$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n, a_0 = 1, a_1 = 1$$

1. **1ος τρόπος:**

   Έστω $a_n = Ax^n$. Τότε θα πάρουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομικής σχέσης, η οποία είναι η $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$, με ρίζες τις $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$ (διπλή ρίζα). Άρα $a_n = (An + B)(-\frac{1}{2})^n$ και από τις αρχικές συνθήκες $a_0 = B = 0$ και $a_1 = -\frac{1}{2}(A + B) = -\frac{1}{2}A = 1 \Longrightarrow A = -2$, οπότε τελικά
$$a_n = -2n(-\frac{1}{2})^n,\ \forall n \in N$$

   2ος τρόπος:

   Είναι,

$$a_n + a_{n-1} + \frac{1}{4}a_{n-2} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty}[a_k x^k + a_{k-1}x^k + \frac{1}{4}a_{k-2}x^k] = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k + x\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}x^{k-1} + \frac{1}{4}x^2\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{k-2} = 0 \overbrace{\Longleftrightarrow}^{A(x)\ \gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau\rho\iota\alpha\ \tau\eta\varsigma\ a_n}$$

$$A(x) - a_0 - a_1 x + x[A(x) - a_0] + \frac{1}{4}x^2 A(x) = 0 \overset{a_0=0, a_1=1}{\widehat{\iff}}$$

$$A(x) - x + xA(x) + \frac{1}{4}x^2 A(x) = 0 \iff$$

$$A(x) = \frac{x}{\frac{1}{4}x^2 + x + 1} = \frac{4x}{x^2 + 4x + 4} \iff$$

$$A(x) = \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{x}{(1+\frac{x}{2})^2} = x\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k}(\frac{x}{2})^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k}(\frac{1}{2})^k x^{k+1}$$

Άρα,

$$a_n = \binom{-2}{n-1}(\frac{1}{2})^{n-1} = -2n(-\frac{1}{2})^n, \ \forall n \in N$$

2. **1ος τρόπος:**

Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή της γραμμικής, που είναι η $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ και παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωσή της για να βρούμε την ομογενή λύση της γραμμικής:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2, \ \textit{διπλή ρίζα}.$$

Άρα,

$$a_n^{(h)} = (An + B)2^n.$$

Επιχειρούμε τώρα να βρούμε την ειδική λύση της γραμμικής. Δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = Cn + D$ και έχουμε,

$$Cn + D - 4(Cn - C + D) + 4(Cn - 2C + D) = n + 2 \iff$$

$$Cn + D - 4C = n + 2 \iff (C = 1, D = 6)$$

Άρα $a_n^{(p)} = n + 6$. Επομένως η δοθείσα γραμμική έχει γενική λύση,

$$a_n = (An+B)2^n + n + 6 \overset{n=0, n=1}{\widehat{\Longrightarrow}} \left\{ \begin{array}{c} B + 6 = 6 \\ 2A + 2B + 7 = 7 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} B = 0 \\ A = 0 \end{array} \right\}.$$

Άρα η γενική λύση της δοθείσης γραμμικής είναι η,

$$a_n = n + 6,\ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k - 4x \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + 4x^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} (k+2) x^k \Longleftrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - a_1 x - 4x[A(x) - a_0] + 4x^2 A(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2} - (2+3x) \Longleftrightarrow$$

$$(4x^2 - 4x + 1)A(x) - 6 - 7x + 24x = \frac{2-x}{(1-x)^2} - (2+3x) \Longleftrightarrow$$

$$A(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2(2x-1)^2} + \frac{4-20x}{(2x-1)^2} = \frac{-5x+6}{(1-x)^2} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = 5\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-1)^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-1)^k x^k$$

Άρα,

$$a_n = 5\binom{-1}{n}(-1)^n + \binom{-2}{n}(-1)^n = 5 + n + 1 = n + 6,\ \forall n \in N.$$

3. **1ος τρόπος:**

Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή της γραμμικής και παίρνουμε τη χαρακτηριστική της εξίσωση προκειμένου να προσδιορίσουμε την ομογενή λύση της γραμμικής. Είναι,

$$a_n - 2a_{n-1} = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$, οπότε $a_n^{(h)} = A2^n$. Στη συνέχεια επιχειρούμε να βρούμε την ειδική λύση της γραμμικής. Έστω $a_n^{(p)} = C$. Τότε,

$$C - 2C = 1 \Longrightarrow -C = 1 \Longrightarrow C = -1$$

Άρα η γενική λύση της γραμμικής είναι,

$$a_n = A2^n - 1 \overbrace{\Longrightarrow}^{n=0} A - 1 = 1 \Longrightarrow A = 2$$

Άρα,

$$a_n = 2^{n+1} - 1, \ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot x^k \Longrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - 2xA(x) = \frac{1}{1-x} - 1 \Longrightarrow A(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} = -\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-1)^k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-2)^k x^k.$$

Άρα,

$$a_n = 2^{n+1} - 1, \ \forall n \in N$$

4. **1ος τρόπος:**

Είναι $a_n = 2a_{n-1} + n, a_1 = 1$. Θέτουμε $a_0 = 0$ ώστε η δοθείσα να ισχύει $\forall n \in N$. Έχουμε $a_n - 2a_{n-1} = 0$ η αντίστοιχη ομογενής και έτσι η χαρακτηριστική εξίσωση είναι,

$$x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

οπότε $a_n^{(h)} = A2^n$. Για την ειδική λύση δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = Cn + D$ και έχουμε,

$$Cn + D - 2[C(n-1) + D] = n \Longrightarrow -Cn + 2C - D = n \Longrightarrow$$

$$(C = -1, D = -2)$$

Άρα,

$$a_n^{(p)} = -n - 2$$

Έτσι η γραμμική σχέση έχει γενική λύση,

$$a_n = A2^n - n - 2 \overset{n=0}{\overbrace{\Longrightarrow}} A - 2 = 0 \Longrightarrow A = 2$$

δηλαδή,

$$a_n = 2^{n+1} - n - 2, \ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n = 2a_{n-1} + n \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - 2x \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^k \Longrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - 2xA(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1-2x)} = -\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2} \Longrightarrow$$

$$A(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-2)^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k}(-1)^k x^k$$

Άρα,

$$a_n = -1 + 2^{n+1} - (n+1) = 2^{n+1} - n - 2, \ \forall n \in N$$

5. **1ος τρόπος:**

Έχουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0 \Longrightarrow$$

$$x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8 = 0 \Longrightarrow$$

$$x^2(x+2) + 4x(x+2) + 4(x+2) = 0 \Longrightarrow (x+2)(x^2 + 4x + 4) = 0 \Longrightarrow$$

$$(x+2)^3 = 0 \Longrightarrow x = -2, \ \textit{τριπλή ρίζα},$$

Επομένως,

$$a_n = (An^2+Bn+C)(-2)^n \overset{n=0,1,2}{\widehat{\Longrightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} C = 1 \\ (A+B+C)(-2) = -2 \\ (4A+2B+C)(-2)^2 = 8 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C = 1 \\ A+B+C = 1 \\ 4A+2B+C = 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = 1 \\ A+B = 0 \\ 4A-2A = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = 1 \end{array} \right\}$$

Άρα,

$$a_n = (\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1)(-2)^n,\ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k x^k + 6x \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + 12x^2 \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} + 8x^3 \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-3} x^{k-3} = 0 \Longrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 + 6x[A(x) - a_0 - a_1 x] +$$

$$+12x^2[A(x) - a_0] + 8x^3 A(x) = 0 \Longrightarrow$$

$$(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1)A(x) - 12x^2 - 6x + 12x^2 - 8x^2 + 2x - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{8x^2+4x+1}{8x^3+12x^2+6x+1} = \frac{8x^2+4x+1}{(2x+1)^3} =$$

$$= \frac{2}{2x+1} + \frac{-2}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} \Longrightarrow$$

$$A(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} 2^k x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} 2^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} 2^k x^k$$

Άρα,

$$a_k = 2(-1)^k 2^k - 2(-1)^k (k+1) 2^k + (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2} 2^k \Longrightarrow$$

$$a_n = (\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1)(-2)^n,\ \forall n \in N$$

6. **1ος τρόπος:**

Η αντίστοιχη ομογενής της γραμμικής είναι η,

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \textit{ διπλή ρίζα}.$$

Άρα η $a_n^{(h)} = (An + B)(-1)^n$. Για να βρούμε την ειδική λύση της γραμμικής δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = C2^n$. Έχουμε,

$$C2^n + 2C2^{n-1} + C2^{n-2} = 2^n \Longrightarrow 4C + 4C + C = 4 \Longrightarrow$$

$$9C = 4 \Longrightarrow C = \frac{4}{9}$$

Άρα $a_n^{(p)} = \frac{2^{n+2}}{9}$. Επομένως,

$$a_n = (An + B)(-1)^n + \frac{2^{n+2}}{9} \overbrace{\Longrightarrow}^{n=0,1} \left\{ \begin{array}{l} B + \frac{4}{9} = 1 \\ -A - B + \frac{8}{9} = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{5}{9} \\ A = -\frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

Άρα,

$$a_n = (-\frac{2n}{3} + \frac{5}{9})(-1)^n + \frac{2^{n+2}}{9}, \ \forall n \in N$$

2ος τρόπος:

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k + 2x \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} 2^k x^k \Longrightarrow$$

$$A(x) - a_0 - a_1 x + 2x[A(x) - a_0] + x^2 A(x) = \frac{1}{1-2x} - 1 - 2x \Longrightarrow$$

$$(x^2 + 2x + 1)A(x) - 1 - x - 2x = \frac{4x^2}{1-2x} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{4x^2}{(1-2x)(x+1)^2} - \frac{3x+1}{(x+1)^2} \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-2x} + (-\frac{16}{9})\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-2x} + \frac{11}{9}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{4}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-2)^k x^k + \frac{11}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k$$

Άρα,

$$a_n = \frac{4}{9}2^n + \frac{11}{9}(-1)^n - \frac{2}{3}(n+1)(-1)^n \Longrightarrow$$

$$a_n = (-\frac{2n}{3} + \frac{5}{9})(-1)^n + \frac{2^{n+2}}{9},\ \forall n \in N$$

Άσκηση 3.2. *Να υπολογιστούν οι πιο κάτω $n \times n$ ορίζουσες με τη βοήθεια των σχέσεων αναδρομής:*

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\textit{ως προς γραμμή 1}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\textit{ως προς στήλη 1}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Άρα $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, όπου $a_1 = 1$ και $a_2 = 0$. Η σχέση αυτή είναι ομογενής αναδρομική. Η χαρακτηριστική της εξίσωση $x^2 - x + 1 = 0$, έχει ρίζες,

$$x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Επομένως,

$$a_n = A(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n + B(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^n =$$

$$= A(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^n + B(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3})^n =$$

$$= A\cos\frac{n\pi}{3} + Ai\sin\frac{n\pi}{3} + B\cos\frac{n\pi}{3} - Bi\sin\frac{n\pi}{3} =$$

$$= (A+B)\cos\frac{n\pi}{3} + (A-B)i\sin\frac{n\pi}{3}$$

Αν λοιπόν θέσουμε $A + B = C$ και $(A - B)i = D$ θα έχουμε,

$$a_n = C\cos\frac{n\pi}{3} + D\sin\frac{n\pi}{3} \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1,2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}D = 1 \\ -\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}D = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = 1 \\ D = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right\}$$

οπότε τελικά η γενική λύση της αναδρομικής σχέσης, δηλαδή η $n \times n$ ορίζουσα, έχει τιμή,

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\textit{ως προς γραμμή 1}}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\textit{ως προς στήλη 1}}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Άρα $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, όπου $a_1 = 2$ και $a_2 = 3$. Η αναδρομική αυτή ομογενής σχέση έχει χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - 2x + 1 = 0$, με διπλή χαρακτηριστική ρίζα $x_1 = x_2 = 1$. Άρα η γενική της λύση είναι,

$$a_n = (An + B)(1)^n = An + B$$

και από τις αρχικές συνθήκες για $n = 1, 2$ έχουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = A + B = 2 \\ a_2 = 2A + B = 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \end{array} \right\}$$

Άρα,

$$a_n = n + 1, \ \forall n \in N^*$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\textit{ως προς γραμμή 1}}$$

$$= (1+a^2) \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} -$$

$$-a \begin{vmatrix} a & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\textit{ως προς στήλη 1}}$$

$$= (1+a^2) \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix} -$$

$$-a^2\begin{vmatrix} 1+a^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Άρα $b_n = (1+a^2)b_{n-1} - a^2 b_{n-2}$, με $b_1 = 1+a^2$ και $b_2 = a^4 + a^2 + 1$. Η σχέση αυτή είναι ομογενής γραμμική σχέση αναδρομής με χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - (1+a^2)x + a^2 = 0 \Longrightarrow (x_1 = 1 \vee x_2 = a^2)$$

Άρα έχει γενική λύση,

$$b_n = A1^n + Ba^{2n} = A + Ba^{2n} \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1,2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + Ba^2 = 1 + a^2 \\ A + Ba^4 = a^4 + a^2 + 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{1+a^2}{a^2} - \frac{A}{a^2} \\ A + a^2(1+a^2) - a^2 A = a^4 + a^2 + 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{a^4}{a^2(a^2+1)} \\ A = \frac{1}{1-a^2} \end{array} \right\}$$

Επομένως,

$$b_n = \frac{1}{1-a^2} + \frac{a^{2(n+2)}}{a^2(a^2-1)} \Longrightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{1-a^2} - \frac{a^{2(n+1)}}{1-a^2}, \ \forall n \in N^*$$

Άσκηση 3.3. *Έστω ότι στρίβουμε ένα νόμισμα n φορές. Υπάρχουν προφανώς 2^n ακολουθίες πιθανών αποτελεσμάτων. Ποιος είναι ο αριθμός των ακολουθιών των αποτελεσμάτων, στις οποίες ποτέ δεν εμφανίζεται "Κεφάλι" (Κ) σε διαδοχικά στριφίματα;*

Έστω μία ακολουθία μήκους n από K και Γ που δίνει ένα πιθανό αποτέλεσμα. Ας πάρουμε την τελευταία θέση στην ακολουθία και ας τη σημειώσουμε σαν "ξεχωριστή θέση". Τότε αν a_n είναι ο αριθμός των ακολουθιών μήκους n, στις οποίες δεν έχουμε δύο διαδοχικά K, θα έχουμε την εξής σχέση: Εάν στη θέση n, που ξεχωρίσαμε, έχουμε Γ, τότε θεωρούμε τις θέσεις από 1 εώς n-1 σαν μία νέα ακολουθία μήκους n-1, στην οποία πάλι δεν πρέπει να έχουμε δύο K γειτονικά, ενώ αν στη θέση n έχουμε K, τότε επειδή στη θέση n-1 πρέπει υποχρεωτικά να έχουμε Γ, παίρνουμε σαν νέα ακολουθία τις θέσεις από 1 εώς n-2. Σ' αυτές η ακολουθία μήκους n-2 δεν πρέπει να έχει δύο διαδοχικά K. Έτσι έχουμε την ομογενή αναδρομική σχέση $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, με αρχικές συνθήκες $a_1 = 2$ και $a_2 = 3$.

Αυτή έχει χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow (x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

Έτσι,

$$a_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1,2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B = 2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}A + \frac{3-\sqrt{5}}{2}B = 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{array} \right\}$$

Άρα,

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \ \forall n \in N^*.$$

Άσκηση 3.4. *Να βρεθεί με τη βοήθεια των σχέσεων αναδρομής ο αριθμός των δυαδικών ακολουθιών μήκους n, που δεν περιλαμβάνουν διαδοχικά μηδενικά.*

Για $n \geq 0$, έστω a_n ο αριθμός των δυαδικών ακολουθιών μήκους n, που δεν περιέχουν διαδοχικά μηδενικά. Ας είναι $a_n^{(0)}$ ο αριθμός αυτών των ακολουθιών που τελειώνουν σε μηδέν και $a_n^{(1)}$ αυτών που τελειώνουν σε ένα. Προφανώς $a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)}$. Επίσης ισχύει η αναδρομική σχέση,

$$a_n = 2a_{n-1}^{(1)} + 1a_{n-1}^{(0)}$$

αφού από μία δυαδική ακολουθία n-1 ψηφίων που τελειώνει σε ένα, μπορούμε να πάρουμε δύο αποδεκτές ακολουθίες n ψηφίων προσθέτοντας στο τέλος έναν άσσο ή ένα μηδενικό, ενώ από μία δυαδική ακολουθία n-1 ψηφίων, που τελειώνει σε μηδέν, μπορούμε να πάρουμε μόνο μία αποδεκτή ακολουθία n ψηφίων προσθέτοντας έναν άσσο στο τέλος της. Συνεπώς θα έχουμε,

$$a_n = a_{n-1}^{(1)} + [a_{n-1}^{(1)} + a_{n-1}^{(0)}] =$$

$$= a_{n-1}^{(1)} + a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Άρα η σχέση αναδρομής που επιλύει το πρόβλημα είναι η $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, με $n \geq 2$ και $a_0 = 1, a_1 = 2$. Η σχέση αυτή είναι ομογενής αναδρομική δευτέρου βαθμού με χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - x - 1 = 0$.

Από την Άσκηση 3.3 έχουμε ($x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Έτσι η αναδρομική σχέση έχει γενική λύση της μορφής,

$$a_n = A(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Άρα από αρχικές συνθήκες $a_0 = 1$ και $a_1 = 2$ έχουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}A + \frac{1+\sqrt{5}}{2}B = 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \\ B = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \end{array} \right\}$$

Επομένως ο αριθμός των δυαδικών ακολουθιών μήκους n που δεν περιέχουν συνεχόμενα μηδενικά είναι,

$$a_n = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{10})^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

Άσκηση 3.5. *Να λυθούν οι παρακάτω σχέσεις αναδρομής:*

1.

$$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3, T(1) = 1$$

2.

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1, T(1) = 1$$

3.
$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 1$$

4.
$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + 2n^{1.5}, T(1) = 1$$

5.
$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n, T(1) = 1$$

6.
$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \log n, T(1) = 1$$

1.
$$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3 = 8[8T(\frac{n}{2^2}) + (\frac{n}{2})^3] + n^3 =$$
$$= 8^2T(\frac{n}{2^2}) + 8(\frac{n}{2})^3 + n^3 = 8^2[8T(\frac{n}{2^3}) + (\frac{n}{2^2})^3] + 8(\frac{n}{2})^3 + n^3 =$$
$$= 8^3T(\frac{n}{2^3}) + 8^2(\frac{n}{2^2})^3 + 8(\frac{n}{2})^3 + n^3 = \ldots =$$
$$= 8^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 8^k(\frac{n}{2^k})^3$$

Έτσι αν θεωρήσουμε $n = 2^i$ έχουμε,

$$T(n) = (2^3)^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1}(2^3)^k(\frac{n}{2^k})^3 \Longrightarrow$$

$$n^3 + \sum_{k=0}^{i-1} n^3 = T(n) \Longrightarrow T(n) = n^3 + n^3\log n$$

Άρα $T(n) = O(n^3\log n)$.

2.
$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 = T(\frac{n}{2^2}) + 1 + 1 = T(\frac{n}{2^3}) + 3 = \ldots =$$
$$= T(\frac{n}{2^i}) + i$$

Έστω ότι $n = 2^i$. Τότε,

$$T(n) = \log n + 1 \Longrightarrow T(n) = O(\log n)$$

3.

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}] + n =$$
$$= 2^2 T(\frac{n}{2^2}) + 2n = 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2}] + 2n =$$
$$= 2^3 T(\frac{n}{2^3}) + 3n = \ldots = 2^i T(\frac{n}{2^i}) + in$$

Επομένως άν $n = 2^i$, έχουμε,

$$T(n) = n + n\log n \Longrightarrow T(n) = O(n\log n)$$

4.

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + 2n^{1.5} = 3[3T(\frac{n}{2^2}) + 2(\frac{n}{2})^{1.5}] + 2n^{1.5} =$$
$$= 3^2 T(\frac{n}{2^2}) + 3 \cdot 2(\frac{n}{2})^{1.5} + 2n^{1.5} =$$
$$= 3^2[3T(\frac{n}{2^3}) + 2(\frac{n}{2^2})^{1.5}] + 3 \cdot 2(\frac{n}{2})^{1.5} + 2n^{1.5} =$$
$$= 3^3 T(\frac{n}{2^3}) + 3^2 \cdot 2(\frac{n}{2^2})^{1.5} + 3 \cdot 2(\frac{n}{2})^{1.5} + 2n^{1.5} = \ldots =$$
$$= 3^i T(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k \cdot 2(\frac{n}{2^k})^{1.5}$$

Άρα αν $n = 2^i$ έχουμε,

$$T(n) = 3^i + \sum_{k=0}^{i-1} 3^k \cdot 2(\frac{n}{2^k})^{1.5} = 3^i + 2n^{1.5}\sum_{k=0}^{i-1} \frac{3^k}{(2^{1.5})^k} =$$
$$= 3^i + 2n^{1.5}\frac{(\frac{3}{2^{1.5}})^i - 1}{\frac{3}{2^{1.5}} - 1} = 3^i + \frac{(1.06)^i - 1}{0.06}2n^{1.5} \Longrightarrow$$
$$T(n) = O(33n^{1.5}(1.06)^{\log n}) = O(n^{1.5}(1.06)^{\log n})$$

5.

$$\begin{aligned}
T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}\log\frac{n}{2}] + n\log n = \\
= 2^2T(\frac{n}{2^2}) + 2\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + n\log n = \\
= 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2}\log\frac{n}{2^2}] + 2\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + n\log n = \\
= 2^3T(\frac{n}{2^3}) + n\log\frac{n}{2^2} + n\log\frac{n}{2} + n\log n = \ldots = \\
= 2^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} n\log\frac{n}{2^k}
\end{aligned}$$

Αν $2^i = n$, έχουμε,

$$\begin{aligned}
T(n) = n + n[\log n + \log\frac{n}{2} + \ldots + \log\frac{n}{2^{i-1}}] = \\
= n + n\log\frac{n^i}{2^0 2^1 \ldots 2^{i-1}} = n + n\log\frac{n^i}{2^{\frac{i(i-1)}{2}}} = \\
= n(\log n)^2 - \frac{(\log n)^2}{2} + \frac{\log n}{2} + n = O(n(\log n)^2)
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \log n = 2[2T(\frac{n}{2^2}) + \log\frac{n}{2}] + \log n = \\
= 2^2T(\frac{n}{2^2}) + 2\log\frac{n}{2} + \log n = \\
= 2^2[2T(\frac{n}{2^3}) + \log\frac{n}{2^2}] + 2\log\frac{n}{2} + \log n = \\
= 2^3T(\frac{n}{2^3}) + 2^2\log\frac{n}{2^2} + 2\log\frac{n}{2} + \log n = \ldots = \\
= 2^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k\log\frac{n}{2^k}
\end{aligned}$$

Άρα αν $2^i = n$ έχουμε,

$$T(n) = n + \sum_{k=0}^{i-1}[2^k\log n] - \sum_{k=0}^{i-1} 2^k\log 2^k =$$

$$= n + \log n \sum_{k=0}^{i-1} 2^k - \sum_{k=0}^{i-1} k2^k =$$

$$= n + (2^i - 1)\log n - (i2^i - 2^{i+1} + 2) =$$

$$= n + n\log n - \log n - (n\log n - 2n + 2) = 3n - \log n - 2$$

Άρα $T(n) = O(n)$.

Άσκηση 3.6. *Έστω a_r ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε (με επαναλήψεις) r γράμματα από το αλφάβητο $\{0,1,2\}$, με τον περιορισμό ότι το γράμμα 0 θα επιλεγεί ζυγές φορές. Βρείτε μία σχέση αναδρομής για το πρόβλημα και λύστε τη.(Βλέπε και Κεφάλαιο 2 για ένα άλλο τρόπο με γεννήτριες συναρτήσεις)*

Έστω a_r ο ζητούμενος αριθμός. Ως γνωστόν το συνολικό πλήθος των τρόπων επιλογής r γραμμάτων από το αλφάβητο $\{0,1,2\}$, με επαναλήψεις, είναι,

$$\binom{r+2}{2} = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Εάν πάρουμε μία τυχαία επιλογή r γραμμάτων, τότε αυτή μπορεί να προκύψει κατά μοναδικό τρόπο είτε από μία έγκυρη επιλογή r-1 γραμμάτων με την προσθήκη ενός μηδενικού, εάν η τυχαία επιλογή είναι άκυρη, είτε από μία έγκυρη επιλογή r γραμμάτων χωρίς αλλαγή, εάν η τυχαία επιλογή είναι έγκυρη. Έτσι έχουμε τη σχέση αναδρομής

$$a_{r-1} + a_r = \frac{(r+1)(r+2)}{2} \text{ ή } a_n + a_{n-1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Αυτή είναι μη ομογενής γραμμική αναδρομική εξίσωση με αντίστοιχη ομογενή,

$$a_n + a_{n-1} = 0$$

που έχει χαρακτηριστική εξίσωση $x + 1 = 0$ και απλή ρίζα $x = -1$. Άρα η ομογενής λύσις της γραμμικής είναι $a_n^{(h)} = A(-1)^n$. Για να βρούμε την ειδική λύση δοκιμάζουμε την $a_n^{(p)} = Bn^2 + Cn + D$. Είναι,

$$Bn^2 + Cn + D + Bn^2 - 2Bn + B + Cn - C + D = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + \frac{2}{2} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2B = \frac{1}{2} \\ -2B + 2C = \frac{3}{2} \\ B - C + 2D = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} B = \frac{1}{4} \\ C = 1 \\ D = \frac{7}{8} \end{array}\right\}$$

Άρα $a_n^{(p)} = \frac{1}{4}n^2 + n + \frac{7}{8}$, επομένως,

$$a_n = A(-1)^n + \frac{1}{4}n^2 + n + \frac{7}{8} \overbrace{\Longrightarrow}^{n=1}$$

$$\frac{1}{4} + 1 + \frac{7}{8} - A = 2 \Longrightarrow A = \frac{1}{8}.$$

Συνεπώς,

$$a_n = \frac{2n^2 + 8n + 7 + (-1)^n}{8}, \ \forall n \in N^*$$

Άσκηση 3.7. *Ενας πατέρας δίνει στο γιο του n χιλιάρικα. Ο γιος μπορεί να ξοδέψει τα λεφτά με τον εξής τρόπο:*

Κάθε μέρα μπορεί να κάνει μία από τις ακόλουθες αγορές:

1. *1 βιβλίο (τιμή:1000 δρχ.)*
2. *10 δισκέτες (τιμή:2000 δρχ.)*
3. *1 θήκη (τιμή:1000 δρχ.)*

Ποιος είναι ο αριθμός των δυνατών τρόπων να ξοδέψει τα χρήματα; (Είναι εύκολο να λυθεί το πρόβλημα με σχέση αναδρομής 2ης τάξης. Προσπαθήστε όμως να βρείτε και μία σχέση αναδρομής 1ης τάξης, η οποία να λύνει το πρόβλημα).

1ος τρόπος με σχέση αναδρομής 2ης τάξης:

Έστω a_n ο αριθμός των δυνατών τρόπων να ξοδέψει ο γιος n χιλιάρικα. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων αυτών είναι το άθροισμα των τρόπων να ξοδέψει ένα χιλιάρικο επί τους τρόπους να ξοδέψει τα υπόλοιπα n-1 χιλιάρικα συν τους τρόπους να ξοδέψει δύο χιλιάρικα επί τους τρόπους να ξοδέψει n-2 χιλιάρικα. Δηλαδή,

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

Η σχέση αυτή είναι ομογενής αναδρομική 2ης τάξης. Εχει χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 0$, με ρίζες $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ και $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Άρα είναι,

$$a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$$

με $a_0 = 1, a_1 = 2$ και έτσι,

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ A + B + \sqrt{2}(A - B) = 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ A - B = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array} \right\}$$

Άρα,

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1}, \ \forall n \in N$$

2ος τρόπος με σχέση αναδρομής 1ης τάξης:

Παρατηρούμε ότι έχουμε:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 12, \ldots,$$

ή αλλιώς $a_{n+1} = (1+\sqrt{2})a_n + (1-\sqrt{2})^{n+1}$. Αυτή είναι μία μη ομογενής αναδρομική σχέση 1ης τάξης, η οποία έχει σα λύση τη ζητούμενη ακολουθία. Έχουμε $a_n^{(h)} = A(1+\sqrt{2})^n$. Έστω $a_n^{(p)} = B(1-\sqrt{2})^n$. Τότε,

$$B(1-\sqrt{2})^{n+1} = B(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^{n+1} \Longrightarrow$$

$$B(1-\sqrt{2}) = B(1+\sqrt{2}) + 1 \Longrightarrow B - B\sqrt{2} = B + B\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} \Longrightarrow$$

$$B = -\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Άρα,

$$a_n = A(1+\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1}$$

οπότε αφού $a_0 = 1$, έχουμε,

$$A - \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \Longrightarrow A = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Συνεπώς τελικά είναι,

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1},\ \forall n \in N$$

Άσκηση 3.8. *Ποιος είναι ο αριθμός των τρόπων να ανεβούμε n σκαλιά, εάν εμείς κάθε στιγμή ανεβαίνουμε ένα ή δύο σκαλιά;*

Έστω a_n ο αριθμός των τρόπων να ανεβούμε n σκαλιά. Τότε αυτός θα είναι $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, γιατί είτε ανεβαίνουμε ένα σκαλί με ένα τρόπο και μας μένουν n-1 σκαλιά με a_{n-1} τρόπους, είτε ανεβαίνουμε 2 σκαλιά με ένα τρόπο και μας μένουν $n-2$ σκαλιά με a_{n-2} τρόπους. Επίσης έχουμε $a_0 = 1, a_1 = 1$. Κατά συνέπεια η ζητούμενη ακολουθία (a_n) είναι η ακολουθία των αριθμών Fibonacci με,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1},\ \forall n \in N$$

Άσκηση 3.9. *Πόσες νόμιμες αριθμητικές εκφράσεις μήκους n χωρίς παρενθέσεις κατασκευάζονται από τα στοιχεία 0,1,2,...,9 και τα σύμβολα των δυαδικών πράξεων $+, *$ και $/$.*

Για κάθε θετικό ακέραιο n έστω a_n ο ζητούμενος αριθμός των νόμιμων αριθμητικών εκφράσεων μήκους n, που κατασκευάζονται από τα δέκα δεκαδικά ψηφία και τους τρεις δυαδικούς τελεστές. Τότε προφανώς $a_1 = 10$ αφού οι μόνες νόμιμες εκφράσεις μήκους 1 είναι τα 10 δεκαδικά ψηφία. Επίσης έχομε $a_2 = 100$ διότι οι μόνες νόμιμες εκφράσεις μήκους δύο είναι οι 00,01,...,99. Θεωρούμε ότι δεν χρησιμοποιούνται περιττά "+" μπροστά από θετικούς αριθμούς.

Για $n \geq 3$ διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις για το a_n :

- Εάν x είναι μία αριθμητική έκφραση με n-1 σύμβολα, το τελευταίο σύμβολο πρέπει να είναι ένα ψηφίο. Με προσθήκη στα δεξιά αυτού του ψηφίου ενός ακόμα ψηφίου μπορούμε να πάρουμε $10a_{n-1}$ αριθμητικές εκφράσεις n ψηφίων όπου τα δύο τελευταία τους σύμβολα είναι δεκαδικά ψηφία.

- Έστω y μία έκφραση n-2 συμβόλων. Για να πάρουμε μία έκφραση n συμβόλων (που δεν προκύπτει από την προηγούμενη περίπτωση) προσθέτομε στα δεξιά της y μία από τις 29 εκφράσεις δύο συμβόλων +1,...,+9,+0, ∗1,...,∗9,∗0, /1,...,/9.

Από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις παίρνουμε τη σχέση αναδρομής,

$$a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2}$$

όπου $n \geq 2$ και $a_1 = 10, a_2 = 100$. Η παραπάνω σχέση είναι ομογενής αναδρομική σχέση 2ου βαθμού με χαρακτηριστική εξίσωση,

$$x^2 - 10x - 29 = 0 \Longrightarrow (x = 5 - 3\sqrt{6} \vee x = 5 + 3\sqrt{6})$$

Άρα έχει γενική λύση της μορφής,

$$a_n = A(5 - 3\sqrt{6})^n + B(5 + 3\sqrt{6})^n$$

και αφού $a_1 = 10, a_2 = 100$ παίρνουμε τις εξισώσεις,

$$\left\{ \begin{array}{l} (5 - 3\sqrt{6})A + (5 + 3\sqrt{6})B = 10 \\ (79 - 30\sqrt{6})A + (79 + 30\sqrt{6})B = 100 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{5}{3\sqrt{6}} \\ B = \frac{5}{3\sqrt{6}} \end{array} \right\}$$

Συνεπώς τελικά η γενική λύση της ομογενούς αναδρομικής σχέσης, η οποία αποτελεί και την απάντηση στο πρόβλημα που τέθηκε, είναι η,

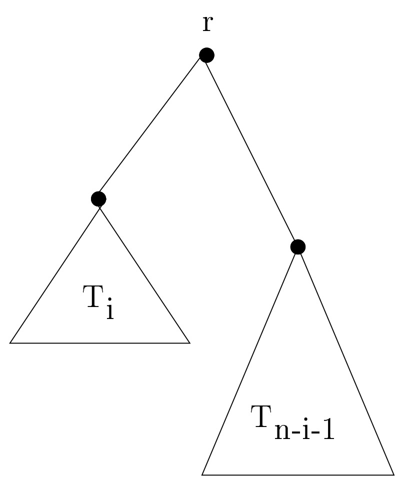
$$a_n = -\frac{5}{3\sqrt{6}}(5 - 3\sqrt{6})^n + \frac{5}{3\sqrt{6}}(5 + 3\sqrt{6})^n.$$

Άσκηση 3.10. *Ενα δυαδικό δένδρο n κορυφών είναι είτε άδειο, αν $n = 0$, είτε μία τριάδα (T_i, r, T_{n-i-1}), όπου r είναι ένας διακεκριμμένος κόμβος (η ρίζα), T_i είναι ένα δυαδικό δένδρο i κορυφών και T_{n-i-1} είναι ένα δυαδικό δένδρο n-i-1 κορυφών (αριστερό και δεξιό υποδένδρο αντίστοιχα.). Πόσα δυαδικά δένδρα n κορυφών υπάρχουν;*

Εστω a_n ο ζητούμενος αριθμός των δυαδικών δένδρων με n κορυφές. Τότε,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-i-1}$$

γιατί ο a_n είναι άθροισμα των τρόπων σχηματισμού αριστερού υποδένδρου με $0, 1, 2, \ldots, n-1$ κόμβους επί τους τρόπους αντίστοιχα σχηματισμού δεξιού



Σχήμα 3.1: Το δυαδικό δένδρο της Άσκησης 3.10.

υποδένδρου με τους υπόλοιπους κόμβους, δηλαδή $n-1, n-2, \ldots, 1, 0$. Έτσι θα έχουμε

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} x^n \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} x^n \quad \overset{A(x) \text{ γεννήτρια της } a_n}{\overbrace{\Longrightarrow}}$$

$$\frac{1}{x}[A(x) - a_0] = [A(x)]^2 \Longrightarrow xA^2(x) - A(x) + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \pm \frac{1}{2x}[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} x^k]$$

κι επειδή $a_n \geq 0$ επιλέγουμε το “$-$” και έχουμε

$$A(x) = \frac{1}{2x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(2k+1)} \binom{2k+2}{k+1} x^k$$

Άρα,

$$a_n = \frac{1}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1} \text{ ή } a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, n \geq 0$$

Οι αριθμοί αυτοί καλούνται και *αριθμοί Catalan.*

Άσκηση 3.11. *Με τη βοήθεια των σχέσεων αναδρομής να υπολογιστεί ο αριθμός των τρόπων επιλογής r αντικειμένων με επαναλήψεις από ένα σύνολο n διαφορετικών αντικειμένων.*

Έστω n θετικός ακέραιος. Για $r \geq 0$, έστω $a_{n,r}$ ο αριθμός των τρόπων επιλογής r αντικειμένων με επαναλήψεις από n διαφορετικά αντικείμενα. Για $n \geq 0$, ας είναι $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ το σύνολο αυτών των αντικειμένων και ας θεωρήσουμε το αντικείμενο b_1. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Το αντικείμενο b_1 δεν επιλέγεται ποτέ. Τότε τα r αντικείμενα επιλέγονται από το σύνολο $\{b_2, \ldots, b_n\}$. Αυτό μπορεί να γίνει με $a_{n-1,r}$ τρόπους.

- Το αντικείμενο b_1 επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά. Τότε πρέπει να επιλέξομε r-1 αντικείμενα από το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ έτσι ώστε να είναι δυνατή η επανεπιλογή του b_1. Υπάρχουν $a_{n,r-1}$ τρόποι για να επιτευχθεί αυτό.

Αφού οι παραπάνω δύο τρόποι επιλογής των r αντικειμένων είναι αμοιβαία αποκλειόμενοι και καλύπτουν όλες τις δυνατές επιλογές έχουμε,

$$a_{n,r} = a_{n-1,r} + a_{n,r-1}$$

Έστω

$$f_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n,r} x^r$$

η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots$. Από την προηγούμενη σχέση για $n \geq 1, r \geq 1$ παίρνουμε,

$$a_{n,r}x^r = a_{n-1,r}x^r + a_{n,r-1}x^r \Longrightarrow$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_{n,r}x^r = \sum_{r=1}^{\infty} a_{n-1,r}x^r + \sum_{r=1}^{\infty} a_{n,r-1}x^r$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις προφανείς αρχικές συνθήκες $a_{n,0} = 1$ για $n \geq 0$ και $a_{0,r} = 0$ για $r > 0$ παίρνουμε,

$$f_n - a_{n,0} = f_{n-1} - a_{n-1,0} + x\sum_{r=1}^{\infty} a_{n,r-1}x^{r-1} \Longrightarrow$$

$$f_n - 1 = f_{n-1} - 1 + xf_n \Longrightarrow f_n - xf_n = f_{n-1} \Longrightarrow$$

$$f_n = \frac{f_{n-1}}{1-x} \Longrightarrow f_n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$$

Αφού ο $a_{n,r}$ είναι ο συντελεστής του x^r εις το ανάπτυγμα της f_n θα έχομε $a_{n,r} = \binom{-n}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}$[1]

Άσκηση 3.12. *Πόσες ακολουθίες μήκους n μπορούν να σχηματιστούν από τα a,b,c,d με τέτοιο τρόπο ώστε τα a,b να μην είναι ποτέ γειτονικά.*

Έστω a_n ο αριθμός των ακολουθιών n ψηφίων από τα $\{a, b, c, d\}$, στις οποίες τα a,b δεν είναι ποτέ γειτονικά, και οι οποίες αρχίζουν από a ή b. Όμοια έστω b_n ο αριθμός των αντίστοιχων ακολουθιών, που αρχίζουν από c ή d. Τότε,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = 2b_{n-1} + a_{n-1} \\ b_n = 2b_{n-1} + 2a_{n-1} \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 2x\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = 2x\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^{n-1} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} \end{array} \right\} \overset{a_0=0,b_0=1}{\widehat{\Longrightarrow}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) = 2xB(x) + xA(x) \\ B(x) - 1 = 2xB(x) + 2xA(x) \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) = \frac{2x}{x-1}[-B(x)] \\ B(x) - 1 = 2xB(x) + \frac{4x^2}{1-x}B(x) \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$B(x) = \frac{x-1}{2x^2+3x-1} \Longrightarrow B(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{(x+\frac{3+\sqrt{17}}{4})(x+\frac{3-\sqrt{17}}{4})} \Longrightarrow$$

[1] Το αποτέλεσμα που προέκυψε είναι γνωστό από τη στοιχειώδη θεωρία της Συνδυαστικής Ανάλυσης, όπου και έχει αποδειχθεί με καθαρά συνδυαστικά επιχειρήματα.

$$B(x) = \frac{\frac{\sqrt{17}+7}{4\sqrt{17}}}{x + \frac{3+\sqrt{17}}{4}} + \frac{\frac{\sqrt{17}-7}{4\sqrt{17}}}{x + \frac{3-\sqrt{17}}{4}} \Longrightarrow$$

$$B(x) = \frac{\sqrt{17}+7}{3\sqrt{17}+17}(1 + \frac{4x}{3+\sqrt{17}})^{-1} + \frac{\sqrt{17}-7}{3\sqrt{17}-17}(1 + \frac{4x}{3-\sqrt{17}})^{-1} \Longrightarrow$$

$$B(x) = \frac{\sqrt{17}+7}{3\sqrt{17}+17}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{4}{3+\sqrt{17}})^k x^k + \frac{\sqrt{17}-7}{3\sqrt{17}-17}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{4}{3-\sqrt{17}})^k x^k$$

οπότε,

$$b_n = \frac{\sqrt{17}+7}{3\sqrt{17}+17}(-\frac{4}{3+\sqrt{17}})^n + \frac{\sqrt{17}-7}{3\sqrt{17}-17}(-\frac{4}{3-\sqrt{17}})^n \ \forall n \in N.$$

΄Ομως,

$$b_n = 2b_{n-1} + 2a_{n-1} \Longrightarrow a_n + b_n = \frac{b_{n+1}}{2} \Longrightarrow$$

$$a_n + b_n = \frac{1}{2} \cdot [\frac{\sqrt{17}+7}{3\sqrt{17}+17}(-\frac{4}{3+\sqrt{17}})^{n+1} + \frac{\sqrt{17}-7}{3\sqrt{17}-17}(-\frac{4}{3-\sqrt{17}})^{n+1}]$$

$$\forall n \in N^*$$

Άσκηση 3.13. *Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε παρενθέσεις στο γινόμενο $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ βάζοντας παρένθεση σε κάθε δύο όρους του γινομένου, έτσι ώστε να πολλαπλασιάζονται δύο όροι κάθε φορά.*

Ας είναι a_n ο αριθμός των τρόπων να τοποθετήσουμε παρενθέσεις στο γινόμενο n όρων. Θεωρούμε τα δύο υπογινόμενα $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-r}$ και $x_{n-r+1} \cdot x_{n-r+2} \cdot \ldots \cdot x_n$. Υπάρχουν a_{n-r} τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στην 1η έκφραση και a_r τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις στη 2η έκφραση, επομένως $a_r \cdot a_{n-r}$ τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις σε όλο το γινόμενο, όπου βεβαίως το τελευταίο ζεύγος εκφράσεων, που θα πολλαπλασιαστεί είναι το ζεύγος των δύο παραπάνω υπογινομένων. Οταν το r κινηθεί από 1 εώς n-1 παίρνουμε τη σχέση αναδρομής,

$$a_n = a_{n-1}a_1 + a_{n-2}a_2 + \ldots + a_2 a_{n-2} + a_1 a_{n-1},$$

με $a_1 = 1$ Θέτουμε $a_0 = 0$ και γράφουμε την προηγούμενη,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i} x^n \Longrightarrow$$

$$A(x) - a_1 x - a_0 = A^2(x) - a_0^2 - (a_1 a_0 + a_0 a_1)x \Longrightarrow$$

$$A^2(x) - A(x) + x = 0 \Longrightarrow A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Δεχόμαστε τη λύση με το "-", που δίδει θετικούς συντελεστάς δυνάμεων του x. Έτσι έχουμε,

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{2}{n}\tbinom{2n-2}{n-1}x^n]$$

οπότε,

$$A(x) = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{1}{2}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\tbinom{2n-2}{n-1}x^n] \Longrightarrow A(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tbinom{2n-2}{n-1}x^n$$

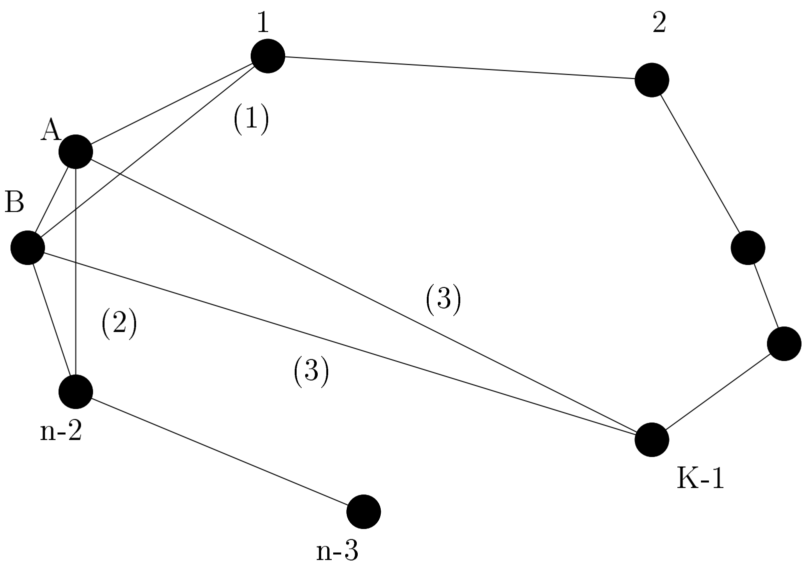
Άρα είναι,

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Άσκηση 3.14. *Να βρεθεί ο αριθμός d_n των τριγωνισμών ενός κυρτού n-γώνου. Τριγωνισμός είναι ένα σύνολο από n-3 διαγώνιες, όπου κάθε δύο απ' αυτές δεν τέμνονται στο εσωτερικό του n-γώνου.*

Ας ξεχωρίσουμε δύο γειτονικές κορυφές του n-γώνου, έστω τις A,B, κι ας είναι $1, 2, \ldots, n-2$ οι υπόλοιπες n-2 κορυφές του n-γώνου, όπως διατρέχουμε την περιφέρεια του n-γώνου από το A προς το B. Τότε ο αριθμός των τριγωνισμών είναι, έστω T_n, ίσος με τον αριθμό των τριγωνισμών ενός (n-1)-γώνου, με δοσμένη την A στον τριγωνισμό του n-γώνου, συν τον αριθμό των τριγωνισμών ενός (n-1)-γώνου, με δοσμένη τη B στον τριγωνισμό του n-γώνου, συν, τέλος, τον αριθμό

$$\sum_{k=3}^{n-2} T_k T_{n+1-k},$$



Σχήμα 3.2: Το κυρτό n-γωνο της Άσκησης 3.14.

όπου το k κινείται από την κορυφή 2 εώς την κορυφή n-3, οπότε και σχηματίζεται ένα k-γωνο, με κορυφές $A, 1, \ldots, k-1$, κι ένα (n+1-k)-γωνο, με κορυφές $k-1, k, \ldots, n-2, B$, $(k = 3, 4, \ldots, n-2)$. Έτσι έχουμε,

$$T_n = \sum_{k=3}^{n-2} T_k T_{n-k+1} + 2T_{n-1} \overset{T_2=1}{\overbrace{\Longrightarrow}} T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n+1-k} \overset{T_k=S_{k-2}}{\overbrace{\Longrightarrow}}$$

$$S_{n-2} = \sum_{k=2}^{n-1} S_{k-2} S_{n-1-k} \Longrightarrow S_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-3} S_k S_{n-3-k} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} S_{n-2} x^{n-3} = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-3} S_k S_{n-3-k} x^{n-3} \Longrightarrow \frac{1}{x}[S(x) - s_0] = S^2(x) \Longrightarrow$$

$$xS^2(x) - S(x) + 1 = 0 \Longrightarrow S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Άρα (βλέπε Άσκηση 3.10) οι S_n είναι οι αριθμοί Catalan, δηλαδή,

$$S_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

όπου $n \geq 0$. Επομένως,

$$T_n = S_{n-2} \Longrightarrow T_n = \frac{1}{n-1}\tbinom{2n-4}{n-2}, n \geq 3$$

Άσκηση 3.15.

1. *Πόσες ακολουθίες n ψηφίων από τα ψηφία 0,1,2,3 έχουν μονό αριθμό από 0;*

2. *Να βρεθεί ο αριθμός των ακολουθιών n ψηφίων από τα 0,1 στις οποίες το δείγμα 010 εμφανίζεται στο n–οστό ψηφίο.*

1. Έστω a_{n-1} ο αριθμός των (n-1)-ψηφίων ακολουθιών, που έχουν μονό αριθμό από 0. Τότε ο αριθμός των ακολουθιών (n-1)-ψηφίων, που έχουν ζυγό αριθμό 0, είναι $4^{n-1} - a_{n-1}$. Σε κάθε μία από τις a_{n-1} ακολουθίες με μονό αριθμό 0, τα ψηφία 1,2,3 μπορούν να προστεθούν, για να δώσουν ακολουθίες μήκους n με μονό αριθμό 0. Σε κάθε μία από τις $4^{n-1} - a_{n-1}$ ακολουθίες με ζυγό αριθμό 0 το 0 μπορεί να προστεθεί για να πάρουμε ακολουθίες μήκους n με μονό αριθμό 0. Έτσι,

$$a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1} - a_{n-1},$$

όπου $a_1 = 1$, και έτσι θέτουμε $a_0 = 0$ και έχουμε,

$$a_n - 2a_{n-1} = 4^{n-1}, a_0 = 0$$

Η σχέση αυτή είναι μη ομογενής γραμμική με αντίστοιχη ομογενή $a_n - 2a_{n-1} = 0$ και χαρακτηριστική ρίζα $x = 2$, οπότε $a_n^{(h)} = A2^n$. Δοκιμάζουμε $a_n^{(p)} = B4^n$ και έχουμε,

$$B4^n - 2B4^{n-1} = 4^{n-1} \Longrightarrow 4B - 2B = 1 \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$$

οπότε,

$$a_n = A2^n + \frac{1}{2}4^n \overbrace{\Longrightarrow}^{n=0} A + \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Επομένως,

$$a_n = \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}2^n, \ \forall n \in N.$$

2. Έστω a_n ο ζητούμενος αριθμός ακολουθιών. Μεταξύ όλων των ακολουθιών n δυαδικών ψηφίων υπάρχουν 2^{n-3} ακολουθίες, που έχουν τα 010 σαν τρία τελευταία ψηφία.Αυτές μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ομάδες: Αυτές, που έχουν το 010 να εμφανίζεται στο n-οστό ψηφίο κι αυτές, στις οποίες το 010 δεν εμφανίζεται στο n-οστό ψηφίο. Στην πρώτη ομάδα υπάρχουν a_n ακολουθίες, ενώ οι ακολουθίες της δεύτερης ομάδας πρέπει να εμφανίζουν το 010 στο (n-2) ψηφίο, αφού αυτός είναι ο μοναδικός λόγος, για τον οποίο δε δεχόμαστε την εμφάνιση του 010 στα τρία τελευταία ψηφία. Έτσι η τελευταία ομάδα έχει a_{n-2} ακολουθίες, οπότε,

$$2^{n-3} = a_n + a_{n-2}, n \geq 5, a_3 = 1, a_4 = 2$$

Έχουμε,

$$a_n + a_{n-2} = 0 \Longrightarrow x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm i$$

Άρα,

$$\begin{aligned} a_n^{(h)} &= Ai^n + B(-i)^n = \\ &= A(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^n + B(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2})^n = \\ &= (A+B)\cos\frac{n\pi}{2} + i(A-B)\sin\frac{n\pi}{2} = \\ &= C\cos\frac{n\pi}{2} + D\sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Δοκιμάζουμε $a_n^{(p)} = F2^n$,

$$F2^n + F2^{n-2} = 2^{n-3} \Longrightarrow 8F + 2F = 1 \Longrightarrow F = \frac{1}{10}$$

Άρα,

$$a_n = C\cos\frac{n\pi}{2} + D\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{10}2^n \overbrace{\Longrightarrow}^{n=3,4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -D + \frac{4}{5} = 1 \\ C + \frac{8}{5} = 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D = -\frac{1}{5} \\ C = \frac{2}{5} \end{array} \right\}$$

Επομένως,

$$a_n = \frac{2}{5}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2^n}{10},\ \forall n \in N.$$

Άσκηση 3.16. *Να λυθεί η σχέση αναδρομής* $a_n = 10a_{n-1}^2, n \geq 1, a_0 = 1.$

Θέτουμε $b_n = \log a_n$ με $b_0 = \log 1 = 0$ και έχουμε,

$$\log a_n = \log 10 + \log a_{n-1}^2 \Longrightarrow \log a_n = 2\log a_{n-1} + \log 10 \Longrightarrow$$

$$b_n = 2b_{n-1} + 1$$

Η τελευταία έχει λύση (βλέπε Άσκηση 3.1) $b_n = 2^{n+1} - 1,\ \forall n \in N$, και άρα

$$a_n = 10^{b_n} \Longrightarrow a_n = 10^{2^{n+1}-1},\ \forall n \in N.$$

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Μέτρησης Pólya

The old Rocker wore his hair too long,wore his trouser cuffs too tight.
Unfashionable to the end-drank his ale too light.
Death's head belt buckle-yesterday's dreams-
The transport caf 'prophet of doom
Ringing no change in his double-sewn seams,in his post-war-babe gloom.

Now he's too old to Rock'n'Roll but he's too young to die
Yes, he's too old to Rock'n'Roll but he's too young to die...

He once owned a Harley Davidson and a Triumph Bonneville.
Counted his friends in burned out spark plugs And prays that he always will.
But he's the last of the blue blood greaser boys All his mates are doing time
Married with three kids up by the ring road Sold their souls straight down the line
And some of them own little sports cars and meet at the tennis club do's For drinks on a Sunday-work on Monday They've thrown away their blue suede shoes.

Now they're too old to Rock'n'Roll but they're too young to die
Yes, they're too old to Rock'n'Roll but they're too yoyng to die...

So the old Rocker gets out his bike to make a ton before he takes

his leave
Upon the A1 by Scotch Corner just like it used to be.
And as he flies-tears in his eyes-his wind-whipped words echo the final take
As he hits the trunk road doing around 120 with no room left to brake

And he was too old to Rock'n'Roll
And he was too young to die...

Too Old To Rock'n'Roll:Too Young To Die
JETHRO TULL

Άσκηση 4.1. *Έστω p_k ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου, που περιέχει k στοιχεία. Είναι προφανώς $p_0 = 1$. Δείξτε ότι*

$$p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} p_i.$$

Για να διαμερίσουμε ένα σύνολο S με $|S| = n + 1$ ακολουθούμε την εξής μέθοδο. Ξεχωρίζουμε ένα στοιχείο από τα n+1 στοιχεία του συνόλου και το βάζουμε στην άκρη. Επειτα είτε δημιουργούμε μία διαμέριση παίρνοντας μαζεμένα n στοιχεία από τα υπόλοιπα n με $\binom{n}{n}$ τρόπους και διαμερίζοντας τα υπόλοιπα $n - n = 0$ στοιχεία, είτε δημιουργούμε μία διαμέριση παίρνοντας μαζεμένα n-1 στοιχεία από τα n με $\binom{n}{n-1}$ τρόπους και διαμερίζοντας το υπόλοιπο 1 στοιχείο, είτε ..., είτε, γενικώς, παίρνουμε μαζί $n - k$ στοιχεία με $\binom{n}{n-k}$ τρόπους και τα υπόλοιπα k στοιχεία τα διαμερίζουμε ελεύθερα με p_k τρόπους. Τέλος στο σύνολο των μαζεμένων στοιχείων προσθέτουμε το στοιχείο, που ξεχωρίσαμε. Αυτό εξασφαλίζει ότι οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις, που κάναμε με τον παραπάνω τρόπο θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Έτσι ο συνολικός αριθμός διαμερίσεων θα είναι:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \tbinom{n}{n}p_0 + \tbinom{n}{n-1}p_1 + \tbinom{n}{n-2}p_2 + \ldots + \tbinom{n}{n-n}p_n = \\ &= \tbinom{n}{0}p_0 + \tbinom{n}{1}p_1 + \ldots + \tbinom{n}{n}p_n = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} p_i \end{aligned}$$

Άσκηση 4.2. *Έστω S ένα σύνολο, που περιέχει n στοιχεία.*

1. *Πόσες διαφορετικές διμελείς σχέσεις στο σύνολο S υπάρχουν;*
2. *Πόσες απ' αυτές είναι ανακλαστικές;*
3. *Πόσες απ' αυτές είναι συμμετρικές;*
4. *Πόσες απ' αυτές δεν είναι ούτε ανακλαστικές ούτε συμμετρικές;*
5. *Πόσες απ' αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας;*

1. Ο ζητούμενος αριθμός των διμελών σχέσεων ισούται με τον πληθάριθμο του συνόλου των μη κενών υποσυνόλων του καρτεσιανού γινομένου $S \times S$. Είναι $|S \times S| = n^2$. Έτσι ο πληθάριθμος του συνόλου των μη κενών υποσυνόλων του $S \times S$ θα είναι $2^{n^2} - 1$.

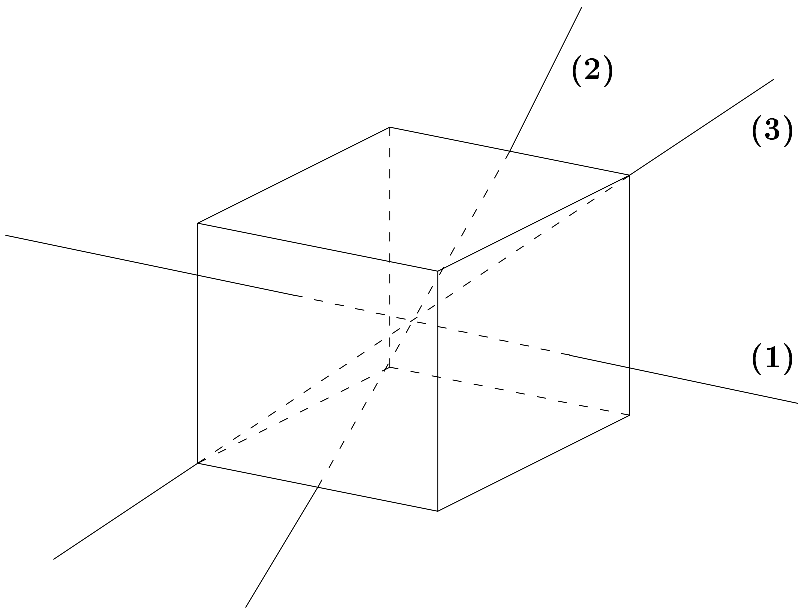
2. Για να είναι μία από τις διμελείς σχέσεις στο S ανακλαστική πρέπει οπωσδήποτε να περιέχει τα ζεύγη $(x, x), x \in S \, \forall x \in S$. Αυτά είναι προφανώς n το πλήθος.Τα υπόλοιπα ζεύγη του $S \times S$ μπορεί να ανήκουν ή να μην ανήκουν στη διμελή σχέση. Έτσι ο ζητούμενος αριθμός είναι $2^{n^2-n} = 2^{n(n-1)}$.

3. Για να είναι μία διμελής σχέση στο S συμμετρική πρέπει εάν περιέχει ένα από τα $n^2 - n$ ζευγάρια των $(x, y) \in S^2, x \neq y$, να περιέχει και το (y, x). Έτσι μία τέτοια σχέση είτε θα περιέχει το (x, y) είτε δε θα το περιέχει, είτε επίσης θα περιέχει ζεύγη (n το πλήθος) της μορφής $(x, x), x \in S$, είτε ελεύθερα δεν θα τα περιέχει. Συνεπώς ο αριθμός των συμμετρικών σχέσεων είναι,
$$2^n \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}} - 1 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} - 1$$

4. Χρησιμοποιώντας την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού παίρνουμε για το ζητούμενο αριθμό,
$$2^{n^2} - 1 - 2^{n(n-1)} - 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + 1 + 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{n^2} - 2^{n^2-n} - 2^{\frac{n^2+n}{2}} + 2^{\frac{n^2-n}{2}} - 1 + 1 =$$
$$= 2^{n^2} - 2^{n^2-n} - 2^{\frac{n^2+n}{2}} + 2^{\frac{n^2-n}{2}}$$

5. Αφού κάθε σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει το S σε κλάσεις ισοδυναμίας και αντιστρόφως, ο αριθμός των σχέσεων ισοδυναμίας θα ισούται με τον αριθμό των διαφορετικών διαμερίσεων του S σε κλάσεις ισοδυναμίας. Αυτός είναι από την άσκηση 4.1,
$$p_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p_i$$

Άσκηση 4.3. *Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 6 διαφορετικά χρώματα, κάθε όψη με ένα διαφορετικό χρώμα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;*



Σχήμα 4.1: Ο κύβος της άσκησης 4.3 και οι άξονες συμμετρίας του.

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με x, όπου x είναι ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας, στις οποίες διαιρείται το σύνολο των δυνατών χρωματισμών, από τη σχέση ισοδυναμίας την επαγομένη από την ομάδα μεταθέσεων G του κύβου. Από το Θεώρημα του Burnside είναι,

$$x = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \psi(\pi)$$

Το $|G|$ είναι 24 διότι οι δυνατές συμμετρίες του κύβου είναι οι εξής 24:

- η ταυτοτική με $\psi(\pi) = 6!$
- τρεις μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν κέντρα απέναντι όψεων,με $\psi(\pi) = 0$
- έξι μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων,με $\psi(\pi) = 0$

- έξι μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών, με $\psi(\pi) = 0$, και τέλος

- οκτώ μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές,με $\psi(\pi) = 0$

Άρα,

$$x = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} \psi(\pi) = \frac{1}{24}6! = \frac{6!}{4!} = 30$$

Άσκηση 4.4. *Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών κολιέ με πέντε χάντρες,που μπορεί να είναι κίτρινες, μπλέ ή άσπρες. Δύο κολιέ θεωρούνται ίδια εάν η περιστροφή του ενός δίνει το άλλο. (Για απλότητα θεωρούμε ότι τα κολιέ δεν επιτρέπεται να αναποδογυριστούν.)*

Έστω S το σύνολο, που αποτελείται από τα $3^5 = 243$ διαφορετικά κολιέ, όταν δεν λαμβάνονται υπόψιν οι ισοδυναμίες λόγω περιστροφών. Έστω επίσης $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$ η ομάδα μεταθέσεων, όπου π_1 είναι η ταυτοτική μετάθεση, π_2 η μετάθεση, που απεικονίζει ένα κολιέ σ' ένα άλλο, που είναι ίδιο με το προηγούμενο περιστραμμένο κατά μία χάντρα δεξιόστροφα, και π_3, π_4, π_5 οι μεταθέσεις, που απεικονίζουν ένα κολιέ σ' ένα όμοιο μ' αυτό, αλλά περιστραμμένο δεξιόστροφα κατά δύο, τρεις και τέσσερις χάντρες αντίστοιχα.

Ο αριθμός των στοιχείων του S, που παραμένουν αμετάβλητα,

- από την π_1 είναι 243

- από την π_2 είναι 3 διότι η περιστροφή του κολιέ κατά μία θέση θα δώσει το ίδιο κολιέ μόνο όταν και οι πέντε χάντρες έχουν το ίδιο χρώμα

- από τις π_3, π_4, π_5 είναι ομοίως 3

Έτσι σύμφωνα με το Θεώρημα του Burnside θα έχουμε για το ζητούμενο αριθμό των διαφορετικών κολιέ,

$$\frac{1}{5}(243 + 3 + 3 + 3 + 3) = 51$$

Άσκηση 4.5. *Υποθέτουμε ότι θα τυπώσουμε όλους τους αριθμούς με 5 ψηφία σε κομματάκια χαρτιού, με έναν αριθμό σε κάθε κομματάκι. Προφανώς υπάρχουν* 10^5 *τέτοια κομμάτια. (Για αριθμούς μικρότερους του 10.000, συμπληρώνουμε τον αριθμό με μηδενικά στην αρχή.) Παραταύτα, αφού τα ψηφία 0,1,6,8 και 9 γίνονται 0,1,9,8 και 6 αντίστοιχα, όταν διαβαστούν ανάποδα, υπάρχουν ζεύγη αριθμών, που θα μοιραστούν το ίδιο κομμάτι χαρτιού, το οποίο θα διαβάζεται ή ίσια ή ανάποδα. Π.χ. μπορούμε να φτιάξουμε ένα κομμάτι χαρτιού για τους δύο αριθμούς 89.166 και 99.168. Πόσα διαφορετικά κομματάκια χαρτιού χρειαζόμαστε σ' αυτή την περίπτωση για τους* 10^5 *αυτούς αριθμούς;*

Έστω S το σύνολο, που αποτελείται από τους 10^5 αριθμούς, και G η ομάδα μεταθέσεων του S, που αποτελείται από τις μεταθέσεις π_1, π_2, όπου π_1 είναι η ταυτοτική μετάθεση και π_2 η μετάθεση, που απεικονίζει έναν αριθμό στο S είτε στον εαυτό του, εάν δε δίνει άλλον αριθμό όταν αναποδογυριστεί, είτε στον αριθμό, που προκύπτει απ' αυτόν όταν διαβαστεί ανάποδα. Ο αριθμός των στοιχείων του S, που παραμένουν αμετάβλητα από την π_1 είναι 10^5, ενώ ο αριθμός των στοιχείων του S, που παραμένουν αμετάβλητα από την π_2 είναι $10^5 - 5^5 + 3 \cdot 5^2$, γιατί υπάρχουν $10^5 - 5^5$ αριθμοί, που περιέχουν ένα τουλάχιστον στοιχείο εκ των 2,3,4,5 και 7, που δεν διαβάζεται ανάποδα, και $3 \cdot 5^2$ αριθμοί, που παραμένουν ίδιοι είτε διαβαστούν ίσια είτε ανάποδα. Άρα ο αριθμός των διαφορετικών κομματιών από χαρτί, που χρειάζεται να φτιάξουμε είναι,

$$\frac{1}{2}(10^5 + 10^5 - 5^5 + 3 \cdot 5^2) = 10^5 - \frac{1}{2}5^5 + \frac{3}{2}5^2 = 98475$$

Άσκηση 4.6. *Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών σειρών, που φτιάχνονται από 3 χάντρες, που μπορεί να είναι μπλέ ή κίτρινες.*

Έστω $D = \{1, 2, 3\}$ το σύνολο των τριών θέσεων σε κάθε σειρά και $R = \{b, y\}$ το σύνολο των δύο ειδών για τις χάντρες. Έστω επίσης $w(b) = b$ και $w(y) = y$, τα βάρη των στοιχείων του R. Είναι $G = \{\binom{123}{123}, \binom{123}{321}\}$,όπου η πρώτη μετάθεση είναι η ταυτοτική, ενώ η δεύτερη αντιστοιχεί στην αντιμετάθεση των δύο άκρων της σειράς.

Ο δείκτης κύκλων της G είναι,

$$P_G(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^3 + x_1 x_2)$$

και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών,

$$\frac{1}{2}[(b+y)^3 + (b+y)(b^2+y^2)] = b^3 + 2b^2y + 2by^2 + y^3$$

Από τον αριθμό εύρεσης σχηματισμών, βλέπουμε ότι υπάρχει μία σειρά, που περιέχει 3 μπλέ χάντρες, 2 σειρές, που περιέχουν 2 μπλέ χάντρες και 1 κίτρινη κ.λ.π. Θέτοντας $w(b) = w(y) = 1$ βρίσκουμε ότι ο αριθμός των διαφορετικών σχηματισμών είναι 6.

Άσκηση 4.7.

1. *Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 1 ή περισσότερα από 6 διαφορετικά χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;*
2. *Ενα απ' αυτά τα 6 χρώματα είναι κόκκινο. Βρείτε τον αριθμό των τρόπων να χρωματίσουμε τον κύβο έτσι ώστε ακριβώς τρεις από τις όψεις του να βαφούν κόκκινες.*

1. Έστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές περιστροφές του κύβου. Υπάρχουν 24 μεταθέσεις στην ομάδα, που χωρίζονται στις εξής 5 κατηγορίες,
   - η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^6
   - 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι πλευρών (όψεων),με αναπαραστάσεις $x_1^2x_2^2$
   - 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων,με αναπαραστάσεις $x_1^2x_4$
   - 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών,με αναπαραστάσεις x_2^3 και τέλος
   - 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές, με αναπαραστάσεις x_3^2

Έτσι ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2)$$

οπότε ο αριθμός εύρεσης των κλάσεων ισοδυναμίας είναι,

$$\frac{1}{24}[(x+y+z+r+s+t)^6+3(x+y+z+r+s+t)^2(x^2+y^2+z^2+r^2+s^2+t^2)^2+$$
$$+6(x^2+y^2+z^2+r^2+s^2+t^2)^3+$$
$$+6(x+y+z+r+s+t)^2(x^4+y^4+z^4+r^4+s^4+t^4)+$$
$$+8(x^3+y^3+z^3+r^3+s^3+t^3)^2]$$

και θέτοντας $x = y = z = r = s = t = 1$ παίρνουμε,

$$\frac{1}{24}(6^6 + 3 \cdot 6^2 \cdot 6^2 + 6 \cdot 6^3 + 6 \cdot 6^2 \cdot 6 + 8 \cdot 6^2) = 2226$$

τρόποι χρωματισμού.

2. Ας υποθέσουμε ότι ένα από τα χρώματα είναι το κόκκινο (έστω το x) και ότι θέλουμε τους τρόπους χρωματισμού του κύβου, έτσι ώστε ακριβώς τρεις από τις όψεις του να είναι κόκκινες. Τότε αναλύοντας τον αριθμό εύρεσης και θέτοντας $y+z+r+s+t = \lambda, y^2+z^2+r^2+s^2+t^2 = \mu, y^3+z^3+r^3+s^3+t^3 = \rho, y^4+z^4+r^4+s^4+t^4 = \nu$ έχουμε,

$$\frac{1}{24}[(x+\lambda)^6+3(x+\lambda)^2(x^2+\mu)^2+6(x^2+\mu)^3+6(x+\lambda)^2(x^4+\nu)+8(x^3+\rho)^2]$$

$$= \frac{1}{24}[\sum_{k=0}^{6}\tbinom{6}{k}x^k\lambda^{6-k} + 3(x^2+2\lambda x+\lambda^2)(x^4+2\mu x^2+\mu^2)+$$
$$+6(x^6+3x^4\mu+3x^2\mu^2+\mu^3)+$$
$$+6(x^2+2\lambda x+\lambda^2)(x^4+\nu)+8(x^6+2x^3\rho+\rho^2)]$$

οπότε για τα x^3 έχουμε,

$$\frac{1}{24}[\tbinom{6}{3}\lambda^3x^3 + 3\cdot 4\lambda\mu x^3 + 8\cdot 2\rho x^3] =$$

$$= \frac{1}{24}[20(y+z+r+s+t)^3x^3+12(y+z+r+s+t)(y^2+z^2+r^2+s^2+t^2)x^3+$$

$$+16(y^3+z^3+r^3+s^3+t^3)x^3]$$

οπότε θέτοντας $x = y = z = r = s = t = 1$ παίρνουμε,

$$\frac{1}{24}(20 \cdot 5^3 + 12 \cdot 5 \cdot 5 + 16 \cdot 5) = 120$$

τρόποι χρωματισμού του κύβου, έτσι ώστε ακριβώς τρεις από τις όψεις του να είναι κόκκινες.

Άσκηση 4.8. *Οι έξι όψεις ενός κύβου θα χρωματιστούν με 4 διαφορετικά χρώματα A,B,C και D. Με πόσους τρόπους μπορεί να χρωματιστεί ο κύβος, έτσι ώστε δύο από τις όψεις του να χρωματιστούν A, δύο B, μία C και μία D.*

Εάν τα χρώματα είναι τέσσερα, τότε ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται από την άσκηση 4.7,

$$\frac{1}{24}[(x+y+z+r)^6+3(x+y+z+r)^2(x^2+y^2+z^2+r^2)^2+$$

$$+6(x+y+z+r)^2(x^4+y^4+z^4+r^4)+6(x^2+y^2+z^2+r^2)^3+8(x^3+y^3+z^3+r^3)^2],$$

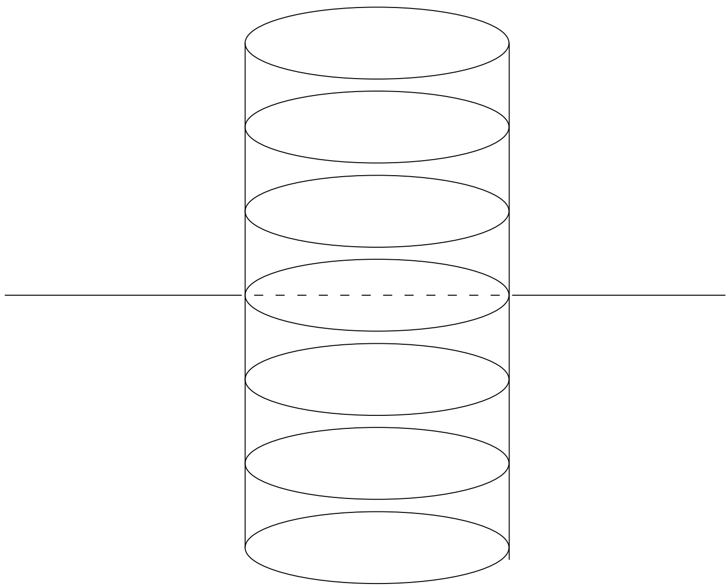
οπότε τους επιθυμητούς χρωματισμούς τους παίρνουμε από το,

$$\frac{1}{24}[(x+y+z+r)^6+3(x+y+z+r)^2(x^2+y^2+z^2+r^2)^2]$$

Το γινόμενο $(x+y+z+r)^6$ δίνει το συντελεστή του x^2y^2zr ίσο με $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 180$ και το $3(x+y+z+r)^2(x^2+y^2+z^2+r^2)^2$ δίνει συντελεστή του x^2y^2zr $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$, οπότε οι ζητούμενοι τρόποι είναι,

$$\frac{180+12}{24} = 8$$

Άσκηση 4.9. *Ενας κύλινδρος, που έχει διαιρεθεί σε 6 τμήματα θα χρωματιστεί με 1 ή περισσότερα από διαφορετικά χρώματα. Με πόσους τρόπους επιτυγχάνεται αυτό;*



Σχήμα 4.2: Ο κύλινδρος της άσκησης 4.8 διαιρεμένος σε έξι τμήματα και ο άξονας συμμετρίας του.

Έστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές συμμετρίες του κυλίνδρου. Έχουμε δύο μεταθέσεις στη G:

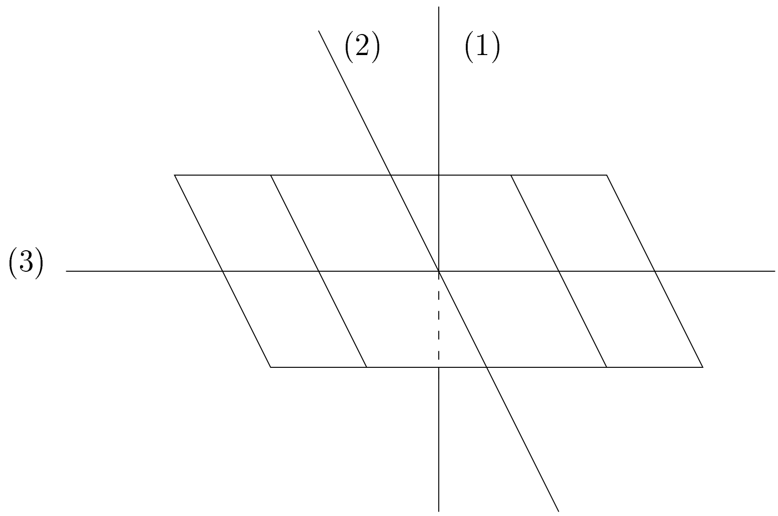
- την ταυτοτική,για την οποία η κυκλική αναπαράσταση είναι x_1^6
- την περιστροφή γύρω από οριζόντιο άξονα, που χωρίζει το τρίτο από το τέταρτο μέρος, κατά 180^o, με αναπαράσταση x_2^3

Συνεπώς ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{2}(x_1^6 + x_2^3)$$

και αν με $y_1, y_2, \ldots, y_n$ συμβολίσουμε τα διαφορετικά χρώματα, ο αριθμός εύρεσης των κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται,

$$\frac{1}{2}[(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^6 + (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)^3]$$



Σχήμα 4.3: Η 2×4 σκακιέρα της άσκησης 4.10 και οι άξονες συμμετρίας της.

Έτσι για $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$ έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός τρόπων χρωματισμού είναι,

$$\frac{1}{2}(n^6 + n^3) = \frac{n^3(n^3+1)}{2}$$

Άσκηση 4.10. *Βρείτε τον αριθμό των σκακιέρων με διαστάσεις 2×4, που αποτελούνται από άσπρα και κόκκινα τετράγωνα, με τον περιορισμό ότι τα κόκκινα τετράγωνα θα είναι 3 και τα άσπρα 5. (Θεωρούμε ότι οι σκακιέρες αναποδογυρίζονται.)*

Έστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές περιστροφές της σκακιέρας. Έχουμε $|G| = 4$, γιατί στην G ανήκουν,

- η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^8
- η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή της σκακιέρας γύρω από άξονα, που είναι κάθετος στη σκακιέρα και διέρχεται από το κέντρο της, κατά 180^o, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4

- η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά 180^o γύρω από τον οριζόντιο άξονα, που κόβει τις δύο γραμμές της σκακιέρας, με αναπαράσταση x_2^4 και
- η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή γύρω από τον κάθετο άξονα, που κόβει στη μέση τις 4 στήλες της σκακιέρας, κατά 180^o, με αναπαράσταση x_2^4

Έτσι ο δείκτης κύκλων της G είναι,

$$\frac{1}{4}(x_1^8 + 3x_2^4)$$

και για τον αριθμό εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας έχουμε,

$$\frac{1}{4}[(x+y)^8 + 3(x^2+y^2)^4] = \frac{1}{4}[\sum_{k=0}^{8} \tbinom{8}{k} x^k y^{8-k} + 3\sum_{k=0}^{4} \tbinom{4}{k} x^{2k} y^{8-2k}]$$

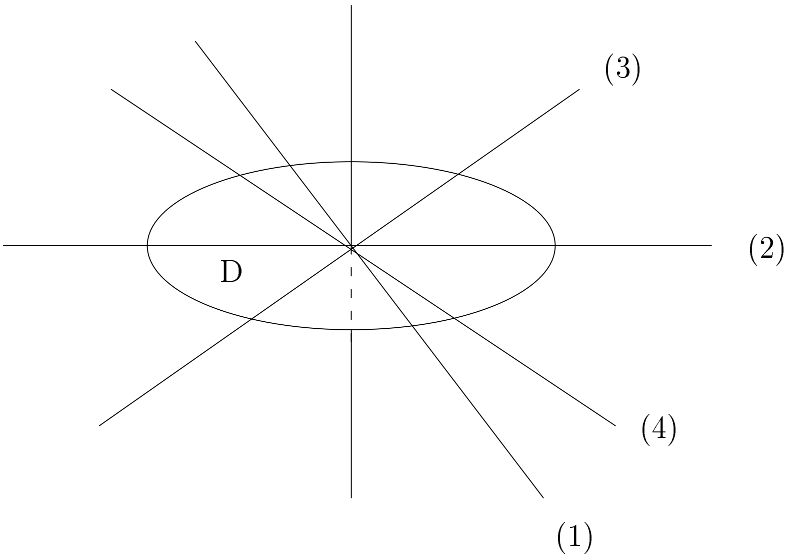
θέλουμε το συντελεστή του x^3y^5, οπότε έχουμε,

$$\frac{1}{4}[\tbinom{8}{3} + 3\cdot 0]x^3y^5 = 14x^3y^5$$

Άσκηση 4.11. *Έστω ένας κυκλικός δίσκος Δ και τέσσερις άξονες, ένας οριζόντιος, ένας κατακόρυφος και δύο διαγώνιοι, με κλήσεις 45^o και -45^o αντίστοιχα, που διέρχονται από το κέντρο του και τον διαιρούν σε 8 ισοεμβαδικούς κυκλικούς τομείς.*

1. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι 8 αυτοί ισεμβαδικοί τομείς να χρωματιστούν με 3 χρώματα, αν οι δύο πρώτοι άξονες (οριζόντιος και κάθετος) είναι διαφορετικοί από τους δύο διαγώνιους;*
2. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να χρωματιστούν με 3 χρώματα, εάν και οι 4 άξονες είναι όμοιοι μεταξύ τους;*

1. Έστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές συμμετρίες του κυκλικού δίσκου. Έχουμε,
   - 4 περιστροφές, καθεμιά γύρω από έναν από τους τέσσερις άξονες κατά 180^o, με κυκλικές αναπαραστάσεις x_2^4



Σχήμα 4.4: Ο κυκλικός δίσκος Δ της άσκησης 4.11 με τους τέσσερις άξονες του.

- την ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^8
- 3 περιστροφές γύρω από άξονα κάθετο στο κέντρο του κυκλικού δίσκου κατά $90^o, 180^o, 270^o$ αντίστοιχα , με κυκλικές αναπαραστάσεις x_4^2, x_2^4, x_4^2 αντίστοιχα

Έτσι ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{8}(x_1^8 + 4x_2^4 + 2x_4^2 + x_2^4) = \frac{1}{8}(x_1^8 + 5x_2^4 + 2x_4^2)$$

οπότε για 3 χρώματα ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας είναι,

$$\frac{1}{8}[(x+y+z)^8 + 5(x^2+y^2+z^2)^4 + 2(x^4+y^4+z^4)^2] \overbrace{=}^{x=y=z=1}$$

$$= \frac{1}{8}(3^8 + 5 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^2) = 873$$

2. Εάν οι τέσσερις άξονες ληφθούν όμοιοι μεταξύ τους, εκτός των παραπάνω 8 μεταθέσεων θα έχουμε και άλλες 4,

- τις περιστροφές κατά $45^o, 135^o, 225^o$ και 315^o γύρω από τον κάθετο στο κέντρο του κύκλου άξονα, με κυκλικές αναπαραστάσεις x_8

οπότε ο δείκτης κύκλων P_G γίνεται,

$$P_G = \frac{1}{12}(x_1^8 + 5x_2^4 + 2x_4^2 + 4x_8)$$

οπότε ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται,

$$\frac{1}{12}[(x+y+z)^8+5(x^2+y^2+z^2)^4+2(x^4+y^4+z^4)^2+4(x^8+y^8+z^8)] \overbrace{=}^{x=y=z=1}$$

$$= \frac{1}{12}(3^8 + 5 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3) = 583$$

Άσκηση 4.12. *Βρείτε τους διαφορετικούς τρόπους χρωματισμού των οκτώ κορυφών ενός κύβου με δύο χρώματα x και y.*

Θεωρούμε το σύνολο D των 8 κορυφών του κύβου, το σύνολο $R = \{x, y\}$ των 2 χρωμάτων με $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Αν G είναι η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές περιστροφές του κύβου, θα έχουμε $|G| = 24$ μεταθέσεις, που είναι οι εξής,

- η ταυτοτική μετάθεση, με κυκλική αναπαράσταση x_1^8
- 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4
- 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 90^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα κέντρα απέναντι όψεων, με κυκλική αναπαράσταση x_4^2
- 6 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές γύρω από άξονες, που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^4
- 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που συνδέουν απέναντι κορυφές, με κυκλική αναπαράσταση $x_1^2 x_3^2$

Συνεπώς ο δείκτης κύκλων P_G της ομάδας G είναι,

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών,

$$\frac{1}{24}[(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2]$$

Θέτουμε $x = y = 1$ και υπολογίζουμε τον αριθμό των διαφορετικών σχηματισμών

$$\frac{1}{24}(2^8 + 9\cdot 2^4 + 6\cdot 2^2 + 8\cdot 2^2\cdot 2^2) = 23$$

που είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Άσκηση 4.13. *Θεωρήστε την κλάση των οργανικών μορίων της μορφής*

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & | & & \\ X & - & C & - & X \\ & & | & & \\ & & X & & \end{array}$$

όπου C είναι άτομο άνθρακα και κάθε X συμβολίζει οποιοδήποτε από τα συστατικά CH_3 (μεθύλιο),C_2H_5 (αιθύλιο), H (υδρογόνο) ή Cl (χλώριο). Κάθε τέτοιο μόριο μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν ένα κανονικό τετράεδρο με το άτομο του άνθρακα να καταλαμβάνει την κεντρική θέση και τα συστατικά X στις κορυφές. Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών μορίων αυτής της μορφής.

Ο ζητούμενος αριθμός συμπίπτει με τον αριθμό των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο D των τεσσάρων κορυφών του τετραέδρου και πεδίο τιμών το σύνολο R των τεσσάρων συστατικών CH_3, C_2H_5, H και Cl, και ομάδα μεταθέσεων G το σύνολο όλων των δυνατών μεταθέσεων, που αντιστοιχούν στις περιστροφές του τετραέδρου. Αυτές είναι,

- η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^4

- 8 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που συνδέουν μία κορυφή με το κέντρο της απέναντι όψεως, με κυκλική αναπαράσταση x_1x_3

- 3 μεταθέσεις, που αντιστοιχούνσε περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν μέσα απέναντι ακμών, με κυκλική αναπαράσταση x_2^2

Έτσι ο δείκτης κύκλων P_G είναι,

$$P_G = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών,

$$\frac{1}{12}[(x+y+z+w)^4+8(x+y+z+w)(x^3+y^3+z^3+w^3)+3(x^2+y^2+z^2+w^2)^2]$$

οπότε για $x = y = z = w = 1$ έχουμε για το ζητούμενο αριθμό,

$$\frac{1}{12}(4^4 + 8 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2) = 36$$

Άσκηση 4.14. *Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να χρωματίσουμε 5 από τις 8 κορυφές ενός κύβου μαύρες και τις υπόλοιπες 3 άσπρες.*

Έστω G η ομάδα μεταθέσεων, που αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές συμμετρίες του κύβου. Υπάρχουν 24 τέτοιες μεταθέσεις,

- η ταυτοτική με κυκλική αναπαράσταση x_1^8

- 3 περιστοφές 180^o γύρω από άξονες, που ενώνουν τα μέσα απέναντι όψεων, με αναπαράσταση x_2^4

- 6 περιστροφές 90^o γύρω από τους ίδιους άξονες, με αναπαραστάσεις x_4^2

- 6 περιστροφές 180^o γύρω από άξονες, που συνδέουν τα μέσα απέναντι ακμών, με αναπαραστάσεις x_2^4 και τέλος

- 8 περιστροφές 120^o γύρω από άξονες, που ενώνουν απέναντι κορυφές, με αναπαραστάσεις $x_1^2x_3^2$

Έτσι ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2)$$

και ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας για δύο χρώματα x,y είναι,

$$\frac{1}{24}[(x+y)^8 + 9(x^2+y^2)^4 + 6(x^4+y^4)^2 + 8(x+y)^2(x^3+y^3)^2] =$$

$$= \frac{1}{24}[\sum_{k=0}^{8} \tbinom{8}{k} x^k y^{8-k} + 9\sum_{k=0}^{4} \tbinom{4}{k} x^{2k} y^{8-2k} +$$

$$+6(x^8 + 2x^4y^4 + y^8) + 8(x^2+2xy+y^2)(x^6+2x^3y^3+y^6)].$$

Έτσι ο συντελεστής του x^5y^3 είναι,

$$\frac{1}{24}[\tbinom{8}{5} + 8\cdot 2] = \frac{1}{24}(\frac{6\cdot 7\cdot 8}{6} + 16) = 3.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός τρόπων είναι 3.

Άσκηση 4.15. *Δείξτε ότι ο $n^8 + 17n^4 + 6n^2$ διαιρείται με το 24 για κάθε θετικό αριθμό n.*

Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας για το χρωματισμό των κορυφών ενός κύβου με τα n χρώματα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι,

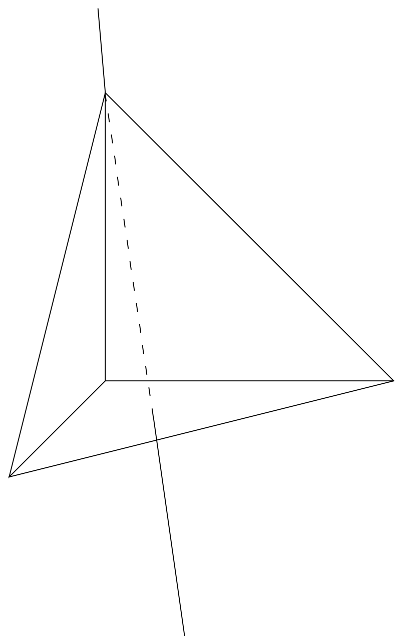
$$\frac{1}{24}[(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^8 + 9(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^4 +$$

$$+6(a_1^4 + \ldots + a_n^4)^2 + 8(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)^2]$$

Έτσι θέτοντας $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ παίρνουμε τον αριθμό των δυνατών χρωματισμών των κορυφών του κύβου με 1 ή περισσότερα από n διαφορετικά χρώματα, που είναι,

$$\frac{n^8 + 9n^4 + 6n^2 + 8n^2n^2}{24} = \frac{n^8 + 17n^4 + 6n^2}{24}$$

Οπως εξηγήθηκε, ο αριθμός αυτός αναπαριστά τρόπους χρωματισμού και συνεπώς είναι ακέραιος.



Σχήμα 4.5: Η κανονική πυραμίδα με τον άξονα συμμετρίας της.

Άσκηση 4.16. *Έστω D το σύνολο των 4 όψεων μίας κανονικής πυραμίδας και G η ομάδα μεταθέσεων του D, που παράγεται από την περιστροφή της πυραμίδας.*

1. *Βρείτε το δείκτη κύκλων P_G της G.*
2. *Ενα ή περισσότερα από 4 χρώματα, χρυσαφί, κόκκινο, άσπρο και μπλέ χρησιμοποιούνται για να βάψουμε τις όψεις της πυραμίδας. Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών χρωματισμών.*

1. Έστω G η ομάδα μεταθέσεων της πυραμίδας D. Είναι $|G| = 3$ διότι στη G υπάρχουν,
   - η ταυτοτική μετάθεση με κυκλική αναπαράσταση x_1^4
   - η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά 120^o γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο της βάσεώς της, με αναπαράσταση $x_1 x_3$ και τέλος

- η μετάθεση, που αντιστοιχεί σε περιστροφή κατά -120^o γύρω από τον ίδιο άξονα, με αναπαράσταση $x_1 x_3$

Άρα ο δείκτης κύκλων P_G της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{3}(x_1^4 + 2x_1 x_3)$$

2. Εάν θέλουμε να βάψουμε τις 4 όψεις της πυραμίδας με 4 χρώματα, έστω x,y,z,t, παίρνουμε για τον αριθμό εύρεσης κλάσεων ισοδυναμίας,

$$\frac{1}{3}[(x+y+z+t)^4 + 2(x+y+z+t)(x^3+y^3+z^3+t^3)] \overbrace{=}^{x=y=z=t=1}$$

$$= \frac{1}{3}(4^4 + 2 \cdot 4 \cdot 4) = 96$$

που είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Άσκηση 4.17. *Βρείτε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους 6 σφαίρες, 3 κόκκινες, 2 άσπρες και 1 μπλέ, μπορούν να τοποθετηθούν σε τρία διαφορετικά κουτιά.*

Έστω D το σύνολο των 6 σφαιρών , $D = \{a, b, c, d, e, f\}$, όπου οι a,b,c είναι κόκκινες, οι d,e είναι άσπρες και η f είναι μπλέ. Έστω επίσης R το σύνολο των κουτιών με $R = \{c_1, c_2, c_3\}$, και $w(c_1) = c_1, w(c_2) = c_2$ και $w(c_3) = c_3$.

Ο δείκτης κύκλων της ομάδας μεταθέσεων G επί του D βρίσκεται με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων. Έχουμε στην ομάδα 12 συνολικά μεταθέσεις, αφού έχουμε 3! μεταθέσεις των στοιχείων a,b,c, 2! μεταθέσεις των στοιχείων d,e και τέλος 1 μετάθεση του στοιχείου e, δηλαδή συνολικά $3! \cdot 2! \cdot 1 = 12$ μεταθέσεις. Έτσι,

$$P_G = \frac{1}{12}[(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3)(x_1^2 + x_2)x_1] =$$

$$= \frac{1}{12}(x_1^6 + 4x_1^4 x_2 + 2x_1^3 x_3 + 3x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3)$$

οπότε ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών γίνεται,

$$\frac{1}{12}[(c_1+c_2+c_3)^6 + 4(c_1+c_2+c_3)^4(c_1^2+c_2^2+c_3^2) + 2(c_1+c_2+c_3)^3(c_1^3+c_2^3+c_3^3) +$$

$+3(c_1+c_2+c_3)^2(c_1^2+c_2^2+c_3^2)^2+2(c_1+c_2+c_3)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)(c_1^3+c_2^3+c_3^3)]$

Θέτοντας $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ παίρνουμε,

$$\frac{1}{12}(3^6+4\cdot 3^5+2\cdot 3^4+3\cdot 3^4+2\cdot 3^3)=180$$

Άσκηση 4.18. *Πόσοι είναι οι τρόποι χρωματισμού με μαύρο και άσπρο χρώμα μιας 2×2 σκακιέρας, όταν λαμβάνονται υπόψιν οι περιστροφές της σκακιέρας και μας ενδιαφέρουν οι σχηματισμοί μόνον ως προς την αντίθεσή τους. (Δηλαδή αν σε ένα σχηματισμό τα χρώματα εναλλαγούν, ο σχηματισμός, που προκύπτει, θεωρείται ίδιος με τον αρχικό.)*

Έστω $D=\{a,b,c,d\}$ το σύνολο των 4 τετραγώνων της σκακιέρας και $R=\{x,y\}$ το σύνολο των 2 χρωμάτων, μαύρο και άσπρο. Έστω

$$G=\{\tbinom{abcd}{abcd},\tbinom{abcd}{bcda},\tbinom{abcd}{cdab},\tbinom{abcd}{dabc}\}$$

όπου οι μεταθέσεις αντιστοιχούν στις περιστροφές της σκακιέρας. Οταν μας ενδιαφέρουν οι σχηματισμοί μόνον ως προς την αντίθεσή τους, έχουμε και την ομάδα μεταθέσεων,

$$H=\{\tbinom{xy}{xy},\tbinom{xy}{yx}\}$$

επί του συνόλου R των χρωμάτων, όπου η δεύτερη μετάθεση σημαίνει την εναλλαγή των 2 χρωμάτων x και y. Από την επέκταση του Θεωρήματος του Pólya, θα πάρουμε για τον ζητούμενο αριθμό τρόπων,

$$\frac{1}{8}(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}+2\frac{\partial}{\partial z_4})[e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)}+e^{2(z_2+z_4)}]_{z_1=z_2=z_3=z_4=0}=$$

$$=\frac{1}{8}[2^4e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)}+2^2e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)}+$$

$$+2^2e^{2(z_2+z_4)}+2\cdot 2e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)}+2\cdot 2e^{2(z_2+z_4)}]_{z_1=\ldots=z_4=0}=$$

$$=\frac{1}{8}(2^4+2^2+2^2+2\cdot 2+2\cdot 2)=4$$

Άσκηση 4.19. *Ενας ορισμένος αριθμός μυνημάτων θα αναπαρασταθούν από ακολουθίες μήκους n από 4 ψηφία και θα μεταδοθούν μέσω ενός καναλιού επικοινωνίας. Για κάθε ένα από τα ψηφία 0,1,2 και 3, που θα λαμβάνεται,* *ένα αντίστοιχο φωτάκι θα ανάβει, έτσι ώστε να μπορεί να αποθηκεύεται η αποστελλόμενη ακολουθία. Δυστυχώς στα φωτάκια για τα ψηφία 2 και 3 δεν είχαν δοθεί ονόματα όταν φτιάχτηκε ο δέκτης κι έτσι δεν υπάρχει τρόπος να καθοριστεί ποιο από τα δύο ψηφία αποστέλλεται. Έτσι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες τις 4^n n-ακολουθίες για να αναπαραστήσουμε 4^n διαφορετικά μυνήματα. Ζητείται ο αριθμός των διαφορετικών μυνημάτων μήκους n, που μπορούν να αποσταλούν.*

Έστω $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ το σύνολο των n θέσεων στην ακολουθία μήκους n από τα 4 ψηφία $\{0, 1, 2, 3\}$. Έστω $R = \{0, 1, 2, 3\}$ το σύνολο των 4 αυτών ψηφίων. Τότε,

$$G = \{\binom{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}\}$$

είναι η ομάδα μεταθέσεων G του D και

$$H = \{\binom{0123}{0123}, \binom{0123}{0132}\}$$

είναι η ομάδα μεταθέσεων του R. Ο αριθμός των διαφορετικών μυνημάτων, που μπορούν να αποσταλούν ισούται με τον αριθμό των διαφορετικών σχηματισμών από το D στο R και σύμφωνα με την επέκταση του Θεωρήματος του Pólya ισούται με,

$$\frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} P_G(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots) P_H(e^{z_1+z_2+\cdots}, e^{2(z_2+z_4+\ldots)}, \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial^n}{\partial z_1^n})(e^{4z_1} + e^{2z_1})_{z_1=0} =$$

$$= \frac{1}{2}(4^n e^{4z_1} + 2^n e^{2z_1})_{z_1=0} = \frac{1}{2}(4^n + 2^n)$$

Άσκηση 4.20. *Με πόσους τρόπους μπορούν 5 βιβλία, 2 από τα οποία είναι ίδια, να μοιραστούν σε 4 παιδιά εάν μεταξύ τους υπάρχει ένα ζευγάρι όμοιων διδύμων.*

Έστω $D = \{a, b, c, d, e\}$ το σύνολο των 5 βιβλίων, οπου τα a,b είναι ίδια. Αφού 2 τρόποι καταμερισμού των βιβλίων είναι ισοδύναμοι εάν ο ένας προκύπτει από τον άλλον με εναλλαγή των a,b έχουμε,

$$G = \{\binom{abcde}{abcde}, \binom{abcde}{bacde}\}$$

την ομάδα μεταθέσεων του D. Έστω $R = \{u, v, x, y\}$ το σύνολο των τεσσάρων παιδιών με τα u,v διδύμους. Αφού 2 τρόποι καταμερισμού των βιβλίων είναι ισοδύναμοι εάν οι δίδυμοι u,v αλλάζουν μεταξύ τους τα βιβλία, που παίρνουν, έχουμε

$$H = \{\binom{uvxy}{uvxy}, \binom{uvxy}{vuxy}\}$$

την ομάδα μεταθέσεων του R.

Ο ζητούμενος αριθμός των τρόπων καταμερισμού των 5 βιβλίων στα 4 παιδιά είναι σύμφωνα με τη γενίκευση του Θεωρήματος του Pólya,

$$\frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} P_G(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots) P_H(e^{z_1+z_2+\cdots}, e^{2(z_2+z_4+\ldots)}, \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\frac{\partial^5}{\partial z_1^5} + \frac{\partial^3}{\partial z_1^3} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2})[e^{4(z_1+z_2)} + e^{2(z_1+z_2)}e^{2z_2}]_{z_1=z_2=0} =$$

$$= \frac{1}{4}[4^5 e^{4(z_1+z_2)} + 4^4 e^{4(z_1+z_2)} + 2^5 e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2} +$$

$$+4 \cdot 2^3 e^{2(z_1+z_2)} e^{2z_2}]_{z_1=z_2=0} =$$

$$= \frac{1}{4}(4^5 + 4^4 + 2^5 + 4 \cdot 2^3) = \frac{1}{4} 1.344 = 336$$

Άσκηση 4.21. *Οι πλευρές ενός τετραγώνου χρωματίζονται με τρία χρώματα. Δύο χρωματισμοί καλούνται ισοδύναμοι εάν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με περιστροφή του τετραγώνου και / ή με μετάθεση των χρωμάτων. Βρείτε τον αριθμό των κλάσεων ισοδυναμίας των χρωματικών σχηματισμών.*

Έστω $D = \{a, bc, d\}$ το σύνολο των πλευρών του τετραγώνου και G η ομάδα μεταθέσεων επί του D με,

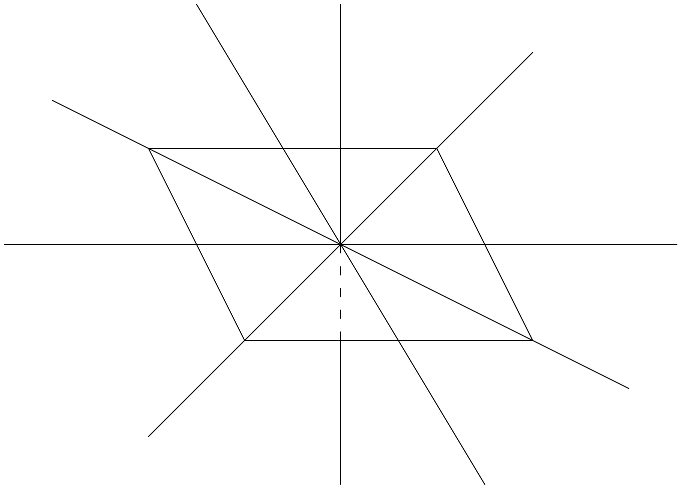
$$G = \{\binom{abcd}{abcd}, \binom{abcd}{dabc}, \binom{abcd}{bcda}, \binom{abcd}{cdab}, \binom{abcd}{badc}, \binom{abcd}{dcba}, \binom{abcd}{cbad}, \binom{abcd}{adcb}\}.$$

Έστω επίσης $R = \{x, y, z\}$ το σύνολο των τριών χρωμάτων και H η ομάδα μεταθέσεων του R με,

$$H = \{\binom{xyz}{xyz}, \binom{xyz}{xzy}, \binom{xyz}{zyx}, \binom{xyz}{yxz}, \binom{xyz}{yzx}, \binom{xyz}{zxy}\}.$$

Έχουμε,

$$P_G = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + 2x_4)$$



Σχήμα 4.6: Το τετράγωνο της άσκησης 4.21 και οι άξονες συμμετρίας του.

και
$$P_H = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$
Έτσι σύμφωνα με την επέκταση του Θεωρήματος του Pólya ο ζητούμενος αριθμός κλάσεων ισοδυναμίας των χρωματικών σχηματισμών είναι,

$$\frac{1}{|G|}\cdot\frac{1}{|H|}P_G(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2},\ldots)\times P_H(e^{z_1+z_2+\cdots},e^{2(z_2+z_4+\ldots)},\ldots)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4}+2\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}+3\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}+2\frac{\partial}{\partial z_4})\times$$

$$\times[e^{3(z_1+z_2+z_3+z_4)}+3e^{z_1+z_2+z_3+z_4}e^{2(z_2+z_4)}+2e^{3z_3}]_{z_1=z_2=z_3=z_4=0}=$$

$$=\frac{1}{48}[3^4e^{3(z_1+\ldots+z_4)}+3e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)}+$$

$$+2(3^3e^{3(z_1+\ldots+z_4)}+3e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)}+6e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)})+$$

$$+3(3^2e^{3(z_1+\ldots+z_4)}+3e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)}+6e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)}+$$

$$+6e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)}+12e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)})+$$

$$+2(3e^{3(z_1+\ldots+z_4)} + 3e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)} + 6e^{z_1+\ldots+z_4}e^{2(z_2+z_4)})] =$$

$$= \frac{1}{48}[3^4 + 3 + 2(3^3 + 3 + 6) + 3(3^2 + 3 + 6 + 6 + 12) + 2(3 + 3 + 6) =$$

$$= \frac{1}{48}288 = 6$$

Άσκηση 4.22.

1. *Τα τετράγωνα μιας 4×4 σκακιέρας θα χρωματιστούν με μαύρη και άσπρη μπογιά. Για να δημιουργήσουμε όλους τους μαυρόασπρους σχηματισμούς, πόσα διαφορετικά σχήματα πρέπει να κάνουμε;*

2. *Εάν κάθε σχήμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε όπως είναι είτε σαν το αρνητικό του (δηλαδή να θεωρούμε το μαύρο άσπρο και το άσπρο μαύρο στο σχήμα), πόσα διαφορετικά σχήματα πρέπει να κάνουμε;*

(Στη λύση, που παρουσιάζουμε, θεωρούμε για ευκολία ότι η σκακιέρα δεν είναι διαφανής, δηλαδή δεν μπορούμε να πάρουμε κάποιο έγκυρο σχήμα με αναποδογύρισμα κάποιου άλλου.)

1. Έστω $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_{16}\}$ το σύνολο των 16 τετραγώνων της 4×4 σκακιέρας και $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ η ομάδα μεταθέσεων επί του D με π_1 τη ταυτοτική μετάθεση, με κυκλική αναπαράσταση x_1^{16}, π_2 τη μετάθεση, που αντιστοιχεί σε αριστερόστροφη περιστροφή της σκακιέρας κατά 90^o γύρω από άξονα, κάθετο στο κέντρο της, με κυκλική αναπαράσταση x_4^4, και π_3, π_4 μεταθέσεις, που αντιστοιχούν σε περιστροφές κατά 180^o και 270^o, αντίστοιχα, γύρω από τον ίδιο άξονα, με κυκλικές αναπαραστάσεις x_2^8, x_4^4, αντίστοιχα. Τότε ο δείκτης κύκλων της G είναι,

$$P_G = \frac{1}{4}(x_1^{16} + x_2^8 + 2x_4^4)$$

Έστω $R = \{x, y\}$ το σύνολο των 2 χρωμάτων, μαύρο και άσπρο. Έστω επίσης $w(x) = x$ και $w(y) = y$. Τότε ο αριθμός εύρεσης σχηματισμών γίνεται,

$$\frac{1}{4}[(x+y)^{16} + (x^2+y^2)^8 + 2(x^4+y^4)^4]$$

Θέτοντας $x = y = 1$ παίρνουμε για το ζητούμενο αριθμό σχημάτων,

$$\frac{1}{4}(2^{16} + 2^8 + 2 \cdot 2^4) = 16456$$

2. Επιπλέον έχουμε και την ομάδα μεταθέσεων

$$H = \{\binom{xy}{xy}, \binom{xy}{yx}\}$$

πάνω στο R με δείκτη κύκλων $P_H = x_1^2 + x_2$. Τότε σύμφωνα με το γενικευμένο Θεώρημα του Pólya ο ζητούμενος αριθμός σχημάτων είναι,

$$\frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} P_G(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots) \times P_H(e^{z_1+z_2+\cdots}, e^{2(z_2+z_4+\ldots)}, \ldots)_{z_1=z_2=\ldots=0} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(\frac{\partial^{16}}{\partial z_1^{16}} + \frac{\partial^8}{\partial z_2^8} + 2\frac{\partial^4}{\partial z_4^4})[e^{2(z_1+z_2+z_3+z_4)} + e^{2(z_2+z_4)}]_{z_1=\ldots=z_4=0} =$$

$$= \frac{1}{8}(2^{16} + 2^8 + 2^8 + 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^4) = 8264$$

Κεφάλαιο 5

Αρχή Εγκλεισμού–Αποκλεισμού

I can see that your head has been twisted and fed
with worthless foam from the mouth
I can tell you are torn between staying and
returning back to the South
You' ve been fooled into thinking that
the finishing end is at hand
Yet there' s no one to beat you, no one to defeat you
'cept the thoughts of yourself feeling bad

I' d forever talk to you, but soon my words
would turn into a meaningless ring
For deep in my heart I know there' s
no help I can bring
Everything passes, everything changes just do
what you thing you should do
And someday, maybe, who knows, baby,
I'll come and be crying to you

To Ramona
BOB DYLAN

Άσκηση 5.1. *Πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων* $0, 1, 2, \ldots, 9$ *υπάρχουν, στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο ψηφίο να είναι μικρότερο από το 8 ;*

Έστω $N = 10!$ οι συνολικές μεταθέσεις των ψηφίων $0, 1, \ldots, 9$. Έστω επίσης c_1 το γεγονός το πρώτο ψηφίο στις μεταθέσεις να είναι μικρότερο ή ίσο με το 1 και c_2 το γεγονός το τελευταίο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο ή ισο με το 8. Τότε αναζητούμε το $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2})$ και έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}) = N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1c_2) =$$

$$= 10! - 2 \cdot 9! - 2 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2338560$$

Άσκηση 5.2. *Πόσοι ακέραιοι μικρότεροι του 70 είναι σχετικά πρώτοι με τον 70; (Σχετικά πρώτοι σημαίνει ότι δεν έχουν κοινούς διαιρέτες με εξαίρεση τη μονάδα)*

Είναι $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Έστω $S = \{1, 2, 3, \ldots, 70\}$ με $N = |S| = 70$ και $c_i, (1 \leq i \leq 3)$ το γεγονός ένας αριθμός $k \in S$ να διαιρείται με το 2, το 5 ή το 7 αντίστοιχα. Για να είναι ένας $k \in S$ σχετικά πρώτος με το 70 πρέπει να μην είναι διαιρέσιμος με κανέναν από τους 2,5,7, οπότε ψάχνουμε το,

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}) =$$

$$= N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)] + [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3)] - N(c_1c_2c_3) =$$

$$= 70 - (35 + 14 + 10) + (7 + 5 + 2) - 1 = 24$$

Άσκηση 5.3. *Πόσες λέξεις n ψηφίων από το αλφάβητο* $\{0, 1, 2\}$ *υπάρχουν, με ένα τουλάχιστον 0, ένα τουλάχιστον 1 και ένα τουλάχιστον 2;*

Έστω S το σύνολο των λέξεων n ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ με $N = |S| = 3^n$. Έστω επίσης c_i με $0 \leq i \leq 2$ το γεγονός μία λέξη n ψηφίων του S να μήν περιέχει το ψηφίο i. Τότε ζητάμε το $N(\overline{c_0}\,\overline{c_1}\,\overline{c_2})$ και έχουμε,

$$N(\overline{c_0}\,\overline{c_1}\,\overline{c_2}) =$$

$$= N - N(c_0) - N(c_1) - N(c_2) + N(c_0c_1) + N(c_0c_2) + N(c_1c_2) - N(c_0c_1c_2) =$$

$$= 3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1 + 1 + 1 - 0 =$$

$$= 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1)$$

Άσκηση 5.4. *Σε ένα σχολείο υπάρχουν 1000 μαθητές. Απ' αυτούς οι 400 μιλάνε Γαλλικά, οι 300 Ιταλικά και 200 μιλάνε Γερμανικά. Εάν υπάρχουν 200 μαθητές,που μιλάνε οποιεσδήποτε 2 γλώσσες και 100 μαθητές, που μιλάνε και τις 3 γλώσσες, πόσοι είναι οι μαθητές, που δε μιλάνε καμμιά γλώσσα;*

Έστω S το σύνολο των μαθητών με $N = |S| = 1000$. Έστω επίσης F,I,G τα γεγονότα ένας μαθητής να μιλάει Γαλλικά, Ιταλικά ή Γερμανικά αντίστοιχα. Τότε ψάχνουμε το $N(\overline{F}\ \overline{I}\ \overline{G})$ και σύμφωνα με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε,

$$N(\overline{F}\ \overline{I}\ \overline{G}) =$$

$$= N - N(F) - N(I) - N(G) + N(FI) + N(FG) + N(IG) - N(FIG) =$$

$$= 1000 - 400 - 300 - 200 + 200 - 100 = 200$$

Άσκηση 5.5. *Σε ένα Σεμινάριο Μαθηματικών διαρκείας 12 εβδομάδων ο Γιώργος συνάντησε 7 από τους παλιούς του συμμαθητές στο 5ο Λύκειο. Κατά τη διάρκεια του σεμιναρίου γευμάτισε με κάθε συμμαθητή του 35 φορές, με κάθε ζευγάρι συμμαθητών του 16 φορές, με κάθε τριάδα 8 φορές, με κάθε τετράδα 4 φορές, με κάθε πεντάδα 2 φορές, με κάθε εξάδα 1 φορά, ενώ δεν εγευμάτισε καμιά φορά και με τους επτά μαζί. Αν ο Γιώργος γευμάτιζε καθημερινά κατά τη διάρκεια των 84 ημερών του σεμιναρίου, υπήρξε μέρα κατά την οποία γευμάτισε μόνος;*

Έστω $\{1, 2, \ldots, 7\}$ το σύνολο των επτά συμμαθητών με τους οποίους συναντήθηκε ο Γιώργος στο σεμινάριο. Ας είναι $c_i, 1 \leq i \leq 7$, το γεγονός ότι ο Γιώργος γευμάτισε με τον συμμαθητή του i. Τότε αναζητούμε τον αριθμό $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_7})$. Άρα είναι, ότι,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_7}) = N - \tbinom{7}{1} N(c_i) + \tbinom{7}{2} N(c_i c_j) - \tbinom{7}{3} N(c_i c_j c_k) +$$

$$+ \tbinom{7}{4} N(c_i c_j c_k c_l) - \tbinom{7}{5} N(c_i c_j c_k c_l c_m) + \tbinom{7}{6} N(c_i c_j c_k c_l c_m c_n) - N(c_1 c_2 \ldots c_7) =$$

$$= 84 - 7 \cdot 35 + 21 \cdot 16 - 35 \cdot 8 + 35 \cdot 4 - 21 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 0 = 0$$

Άρα ο Γιώργος δεν γευμάτισε μόνος καμιά φορά κατά τη διάρκεια του σεμιναρίου.

Άσκηση 5.6. *Για $n \in Z^+$, ας είναι $\varphi(n)$ ο αριθμός των θετικών ακεραίων m, όπου $1 \leq m < n$ και $(m,n) = 1$, δηλαδή m,n είναι σχετικά πρώτοι. Αυτή η συνάρτηση είναι γνωστή σαν συνάρτηση φι του Euler. Να βρεθεί ένας τύπος, που να μας δίνει το $\varphi(n)$.*

Για κάθε $n \geq 2$ μπορούμε να γράψουμε το n σαν $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_t^{e_t}$, όπου $p_1, p_2, \ldots, p_t$ είναι διακεκριμμένοι πρώτοι αριθμοί και $e_i \geq 1, 1 \leq i \leq t$. Έστω $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ με $N = |S| = n$ και για $1 \leq i \leq t$, λέμε ότι το $k \in S$ ικανοποιεί τη συνθήκη c_i, εάν το k είναι διαιρέσιμο διά του p_i. Τότε για $1 \leq k \leq n, (k,n) = 1$ εάν το k δεν είναι διαιρέσιμο με κανένα πρώτο $p_i, 1 \leq i \leq t$. Επομένως $\varphi(n) = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_t})$. Επομένως έχουμε,

$$\varphi(n) = N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_t}) =$$

$$= N - N(c_1) - N(c_2) - \ldots - N(c_t)$$

$$+N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots + N(c_{t-1}c_t)$$

$$-N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - \ldots - N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)$$

$$+ \ldots + (-1)^t N(c_1c_2 \ldots c_t) =$$

$$= n - [\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_t}] + [\frac{n}{p_1p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{t-1}p_t}] -$$

$$-[\frac{n}{p_1p_2p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{t-2}p_{t-1}p_t}] + \ldots + (-1)^t \frac{n}{p_1p_2 \cdots p_t} =$$

$$= \frac{n}{p_1p_2 \cdots p_t}[p_1p_2 \ldots p_t - (p_2p_3 \ldots p_t + \ldots + p_1p_2 \ldots p_{t-1}) +$$

$$+(p_3p_4 \ldots p_t + \ldots + p_1p_2 \ldots p_{t-2}) - \ldots + (-1)^t] =$$

$$= \frac{n}{p_1p_2 \cdots p_t}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_t - 1) == n\frac{p_1 - 1}{p_1}\frac{p_2 - 1}{p_2} \cdots \frac{p_t - 1}{p_t} =$$

$$= n \prod_{p_i \backslash n} \frac{p_i - 1}{p_i} = n \prod_{p_i \backslash n} (1 - \frac{1}{p_i})$$

Άσκηση 5.7. *Έστω $n \in Z^+$.*

1. *Προσδιορίστε το $\varphi(2^n)$*

2. Προσδιορίστε το $\varphi(2^n p)$, όπου p πρώτος.

(φ είναι η συνάρτηση φι του Euler με $\varphi(n)$ τον αριθμό των ακεραίων m με $1 \leq m < n$, που είναι σχετικά πρώτοι με τον n.)

Γνωρίζουμε από την άσκηση 5.6 ότι ισχύει

$$\varphi(n) = n \prod_{p \backslash n} (1 - \frac{1}{p})$$

1. Θέτουμε όπου n το 2^n. Τότε ο μόνος πρώτος διαιρέτης του 2^n είναι ο 2, οπότε
$$\varphi(2^n) = 2^n (1 - \frac{1}{2}) = 2^{n-1}$$

2. Θέτουμε όπου n το $2^n p$. Τότε οι μόνοι πρώτοι διαιρέτες είναι οι 2 και p. Έτσι
$$\varphi(2^n p) = 2^n p (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{p}) = 2^{n-1}(p-1)$$

Άσκηση 5.8. *Να βρεθεί ο αριθμός των θετικών ακεραίων n,$1 \leq n \leq 100$ και n να μην διαιρείται από τους 2,3 και 5.*

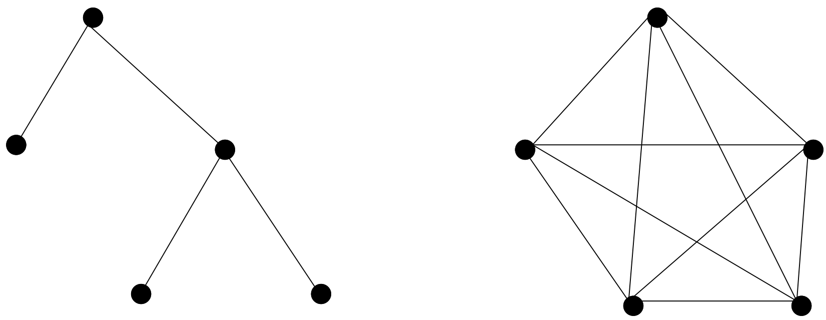
Έστω $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ με $N = |S| = 100$ και c_i με $1 \leq i \leq 3$ η ιδιότητα ο k με $1 \leq k \leq 100$ ($k \in S$) να διαιρείται αντίστοιχα με το 2,3 και 5. Τότε ψάχνουμε το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3})$ και έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) =$$

$$= N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1 c_2) + N(c_2 c_3) + N(c_1 c_3) - N(c_1 c_2 c_3) =$$

$$= 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26$$

Άσκηση 5.9. *Ενας φοιτητής θέλει να φτιάξει ένα πρόγραμμα για μια χρονική περίοδο 7 ημερών, έτσι ώστε κάθε μέρα να μελετά ένα μόνο μάθημα. Τα μαθήματα είναι μαθηματικά, φυσική, χημεία και οικονομία. Να βρεθεί ο αριθμός αυτών των προγραμμάτων.*



Σχήμα 5.1: Δύο από τους γράφους, που μετράμε στην άσκηση 5.10.

Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τις λέξεις 7 ψηφίων, που μπορούμε να φτιάξουμε από το αλφάβητο $\{\mu, \varphi, \chi, o\}$, όπου όμως σε κάθε λέξη θα χρησιμοποιούμε κάθε γράμμα του αλφαβήτου αυτού τουλάχιστον 1 φορά. Έστω S το σύνολο όλων των λέξεων 7 ψηφίων από το συγκεκριμμένο αλφάβητο. Τότε $N = |S| = 4^7 = 16.384$. Έστω επίσης $c_i, 1 \leq i \leq 4$, η ιδιότητα το γράμμα μ,φ,χ,ο να μην περιέχεται καμμιά φορά σε μία λέξη του S αντίστοιχα. Δηλαδή θέλουμε να υπολογίσουμε το,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + N(c_4)] +$$

$$+[N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots + N(c_3c_4)] -$$

$$-[N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + N(c_1c_3c_4) + N(c_2c_3c_4)] +$$

$$+N(c_1c_2c_3c_4) =$$

$$= 16.384 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4 + 0 = 8400$$

Άσκηση 5.10. *Πόσοι μη κατευθυνόμενοι γράφοι 5 σημείων, χωρίς απομονωμένα σημεία και χωρίς θηλειές, υπάρχουν;*

Έστω S το σύνολο των μη κατευθυνόμενων γράφων με σημεία $\{a,b,c,d,e\}$, που δεν περιέχουν θηλειές. Τότε έχουμε $N = |S| = 2^{10}$, αφού υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ γραμμές, με τις οποίες είναι δυνατόν να συνδεθούν τα σημεία του γράφου και κάθε μία απ' αυτές τις γραμμές μπορεί να περιλαμβάνεται ή να μην περιλαμβάνεται στο γράφο ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες.

Έστω τώρα $c_i, 1 \leq i \leq 5$, η συνθήκη που καθορίζει ότι στο δοθέντα γράφο το σημείο a,b,c,d ή e αντίστοιχα, είναι απομονωμένο. Προφανώς η απάντηση στο πρόβλημα είναι,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}) = N - \binom{5}{1}N(c_i) + \binom{5}{2}N(c_ic_j) -$$

$$-\binom{5}{3}N(c_ic_jc_k) + \binom{5}{4}N(c_ic_jc_kc_l) - \binom{5}{5}N(c_1c_2c_3c_4c_5) =$$

$$= 2^{10} - 5 \cdot 2^6 + 10 \cdot 2^3 - 10 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 1 = 768.$$

Άσκηση 5.11. *Εάν ρίξουμε οκτώ διαφορετικά ζάρια, ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστούν και τα έξι δυνατά ενδεχόμενα .*

Έστω $c_i, 1 \leq i \leq 6$, το γεγονός να μην εμφανισθεί το ενδεχόμενο i. Τότε αναζητούμε το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_6})$. Έχουμε,

$$N = 6^8, N(c_i) = 5^8, N(c_ic_j) = 4^8$$

$$N(c_ic_jc_k) = 3^8, N(c_ic_jc_kc_l) = 2^8, N(c_ic_jc_kc_lc_m) = 1$$

και τέλος,

$$N(c_1c_2 \ldots c_6) = 0$$

Επομένως έχουμε ότι,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_6}) = N - \binom{6}{1}5^8 + \binom{6}{2}4^8 - \binom{6}{3}3^8 + \binom{6}{4}2^8 - \binom{6}{5} + 0 = 191520.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα να εμφανιστούν και τα έξι δυνατά ενδεχόμενα είναι $P = \frac{N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \ldots \overline{c_6})}{N} = \frac{191520}{6^8} = 0.114$

Άσκηση 5.12. *Μία γιαγιά έχει 8 εγγόνια στα οποία αρέσουν τα παγωτά. Στην κατάψυξή της έχει αρκετό παγωτό για να βάλει 6 μπάλλες κρέμα, 3 μπάλλες σοκολάτα, 6 μπάλλες φράουλα και 5 μπάλλες μόκα. Την ημέρα των γεννεθλίων της όλα τα εγγόνια της την επισκέπτονται και το μεγαλύτερο της απαριθμεί πόσες απαιτήσεις υπάρχουν για κάθε είδος παγωτού. Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να ζητήσουν τα εγγόνια παγωτό έτσι ώστε να φέρουν τη γιαγιά στη δύσκολη θέση να μην μπορεί να τα ικανοποιήσει.*

Έστω N ο αριθμός όλων των τρόπων με τους οποίους μπορούν τα εγγόνια να ζητήσουν παγωτό. Προφανώς είναι $N = 4^8 = 65536$. Ας είναι c_i η ιδιότητα κάποιος από τους τρόπους αυτούς να μην μπορεί να εξυπηρετηθεί λόγω ανεπάρκειας του παγωτού i ($1 \leq i \leq 4$). Τότε προφανώς ο αριθμός των τρόπων, που δεν φέρνουν σε δύσκολη θέση τη γιαγιά είναι ο $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$. Άρα είναι,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - (N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + N(c_4)) + \binom{4}{2}N(c_ic_j) -$$

$$-\binom{4}{3}N(c_ic_jc_k) + \binom{4}{4}N(c_1c_2c_3c_4) =$$

$$= 4^8 - (\binom{8}{7}\cdot 4 + \binom{8}{4}\cdot 4^4 + \binom{8}{7}\cdot 4 + \binom{8}{6}\cdot 4^2) + 0 - 0 + 0 = 47104$$

Αφού καταφέραμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια της Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού τους τρόπους αυτούς που δεν φέρνουν σε δύσκολη θέση τη γιαγιά όταν πάρει τις απαιτήσεις των εγγονών της, είναι εύκολο, δεδομένου ότι γνωρίζομε το συνολικό αριθμό των δυνατών απαιτήσεων, να υπολογίσουμε τον αριθμό των τρόπων που δυσκολεύουν τη γιαγιά. Αυτός είναι

$$N - N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = 65536 - 47104 = 18432$$

Άσκηση 5.13. *Να βρεθεί ο αριθμός των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξισώσεως $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$.*

Έστω S το σύνολο των λύσεων της εξισώσεως $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, με $0 \leq x_i$ για $1 \leq i \leq 4$. Είναι προφανώς $|S| = N = \binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18}$.

Λέμε ότι μία λύσις (x_1, x_2, x_3, x_4) ικανοποιεί τη συνθήκη $c_i, 1 \leq i \leq 4$, εάν $x_i > 7$ ή $x_i \geq 8$. Τότε η απάντηση στο δοσμένο πρόβλημα είναι η $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, που εξετάζομε, έχουμε $N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4)$. Υπολογίζουμε το $N(c_1)$ ως εξής: Βρίσκουμε τον αριθμό των ακεραίων λύσεων της εξισώσεως $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$. Τότε προσθέτουμε 8 στην τιμή του x_1 και παίρνουμε τις λύσεις της εξίσωσης, που ικανοποιούν την συνθήκη c_1. Άρα $N(c_i) = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$, για κάθε $1 \leq i \leq 4$. Με παρόμοιο επιχείρημα βρίσκουμε ότι ο $N(c_1c_2)$ είναι ο αριθμός των ακεραίων λύσεων της $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ με $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$. Άρα $N(c_1c_2) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$. Τέλος είναι προφανές ότι $N(c_ic_jc_k) = 0$ για οποιαδήποτε επιλογή τριών συνθηκών, και $N(c_1c_2c_3c_4) = 0$.

Σύμφωνα λοιπόν με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού θα έχουμε για τον ζητούμενο αριθμό λύσεων της εξίσωσης, που ικανοποιούν τους δοσμένους περιορισμούς,

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\,\overline{c_4}) = N - \binom{4}{1}N(c_1) + \binom{4}{2}N(c_1c_2) - \binom{4}{3}N(c_1c_2c_3) + \binom{4}{4}N(c_1c_2c_3c_4) =$$

$$= \binom{21}{18} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} - 0 + 0 = 246$$

Άσκηση 5.14. *Βρείτε τον αριθμό των θετικών ακεραίων x που είναι τέτοιοι ώστε $x \leq 9999999$ και το άθροισμα των ψηφίων τους ισούται με 31.*

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_7$ τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού x, που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος. Προφανώς ο ζητούμενος αριθμός των ακεραίων αυτών ισούται με τον αριθμό των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 31$$

όπου $0 \leq x_i \leq 9$ για $1 \leq i \leq 7$. Ας είναι λοιπόν c_i η ιδιότητα στη λύση $(x_1, x_2, \ldots, x_7)$ της παραπάνω εξίσωσης το x_i να είναι μεγαλύτερο του 9. Τότε αναζητούμε προφανώς το $N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\ldots\overline{c_7})$.

Έχουμε (Βλέπε και άσκηση 5.13) ότι,

$$N = \binom{31+7-1}{31} = \binom{37}{31}, N(c_i) = \binom{21+7-1}{21} = \binom{27}{21}, N(c_ic_j) = \binom{11+7-1}{11} = \binom{17}{11}$$

$$N(c_ic_jc_k) = \binom{1+7-1}{1} = \binom{7}{1}, N(c_ic_jc_kc_l) = 0, N(c_ic_jc_kc_lc_m) = 0$$

$$N(c_ic_jc_kc_lc_mc_n) = 0, N(c_1c_2\ldots c_7) = 0$$

Έτσι σύμφωνα με την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\ldots\overline{c_7}) = \binom{37}{31} - \binom{7}{1}\binom{27}{21} + \binom{7}{2}\binom{17}{11} - \binom{7}{3}\binom{7}{1} = 512365$$

Άσκηση 5.15. *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 9 σφαίρες μέσα από ένα κουτί που περιέχει 12 σφαίρες, τρεις εκ των οποίων είναι πράσινες, τρεις άσπρες, τρεις μπλε και τρεις κόκκινες.*

Ο ζητούμενος αριθμός τρόπων επιλογής ισούται με τον αριθμό των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

όπου $0 \le x_i \le 3$ για $1 \le i \le 4$. Ας είναι, όπως και στην άσκηση 5.14, c_i η ιδιότητα σε κάποια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) της παραπάνω εξίσωσης το x_i να είναι μεγαλύτερο του 3. Τότε προφανώς ο ζητούμενος αριθμός λύσεων είναι ο $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$.

Θα έχουμε, κατά τρόπο ανάλογο, ότι,

$$N = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9}, N(c_i) = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5}, N(c_ic_j) = \binom{1+4-1}{1} = \binom{4}{1}$$

$$N(c_ic_jc_k) = 0, N(c_1c_2c_3c_4) = 0$$

Επομένως έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = \binom{12}{9} - \binom{4}{1}\binom{8}{5} + \binom{4}{2}\binom{4}{1} - 0 + 0 = 20$$

Άσκηση 5.16. *Πόσες διαφορετικές ακέραιες λύσεις υπάρχουν για την εξίσωση*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20, 0 \le x_i \le 8$$

Σε αριθμοθεωρητική γλώσσα αναζητούμε τις διαμερίσεις του 20 σε άθροισμα 6 το πολύ ακεραίων, από τους οποίους κανένας δεν πρέπει να υπερβαίνει τον 8. Σε συνδυαστική γλώσσα αναζητούμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε 20 όμοιες μπάλλες σε 6 διακεκριμμένα κουτιά με τον περιορισμό κάθε κουτί να έχει το πολύ 8 μπάλλες. Ας είναι, c_i το γεγονός το κουτί i να περιέχει πάνω από 8 μπάλλες και $N(c_i)$ ο αριθμός των τοποθετήσεων 20 μπαλλών στα 6 κουτιά ώστε να συμβαίνει το γεγονός i. Τότε ζητούμε τον αριθμό $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_6})$ και έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}\ \overline{c_5}\ \overline{c_6}) = N - \sum_i N(c_i) + \sum_{i,j} N(c_ic_j) - \sum_{i,j,k} N(c_ic_jc_k) +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} N(c_ic_jc_kc_l) - \sum_{i,j,k,l,m} N(c_ic_jc_kc_lc_m) + N(c_1c_2c_3c_4c_5c_6) =$$

$$= N - 6N(c_i) + \binom{6}{2}N(c_ic_j) =$$

$$= \frac{25!}{20!5!} - 6\frac{(11+5)!}{11!5!} + \binom{6}{2}\frac{(2+5)!}{2!5!} =$$

$$= 53.130 - 6 \cdot 4368 + 15 \cdot 21 = 27237$$

Άσκηση 5.17. *Να βρεθεί ο αριθμός των μεταθέσεων των γραμμάτων του Λατινικού αλφαβήτου $a, b, c, \ldots, x, y, z$ στις οποίες δεν εμφανίζονται τα δείγματα spin,game,path και net.*

Έστω S το σύνολο όλων των δυνατών μεταθέσεων. Είναι $N = |S| = 26!$. Αν $c_i, 1 \leq i \leq 4$, είναι η ιδιότητα να εμφανίζεται το δείγμα spin,game,path και net αντίστοιχα, τότε ψάχνουμε για το $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4})$, και έχουμε,

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) - N(c_4) +$$

$$+ N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \ldots + N(c_3c_4) -$$

$$- N(c_1c_2c_3) - N(c_1c_2c_4) - N(c_1c_3c_4) - N(c_2c_3c_4) +$$

$$+ N(c_1c_2c_3c_4) =$$

$$= 26! - 23! - 23! - 23! - 24! + 20! + 20! - 0 + 0 = 4,02593 \times 10^{26}$$

Άσκηση 5.18. *Έστω τα πεπερασμένα σύνολα A,B με $|A| = m, |B| = n$ και $m \geq n$. Ας είναι $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ και S= το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \longrightarrow B$. Προφανώς $N = |S| = n^m$. Για $1 \leq i \leq n$, ας είναι c_i η συνθήκη στο S, που ικανοποιείται όταν η συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ δεν έχει στο πεδίο τιμών της το b_i. Να βρεθεί ο αριθμός $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_n})$.*

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \ldots\ \overline{c_n}) = N - \tbinom{n}{1}N(c_i) + \tbinom{n}{2}N(c_ic_j) -$$

$$- \tbinom{n}{3}N(c_ic_jc_k) + \ldots + (-1)^n N(c_1c_2 \ldots c_n) =$$

$$= n^m - \tbinom{n}{1}(n-1)^m + \tbinom{n}{2}(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}\tbinom{n}{n-1}1^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^k(n-k)^m$$

Βιβλιογραφία

[AHU74] Aho A., Hopcroft J., Ullman J., "The design and analysis of computer algorithms", Addison-Wesley 1974

[AHU83] Aho A., Hopcroft J., Ullman J., "Data Structures and algorithms", Addison-Wesley 1983

[D64] DeBruijn N., "Pólya's Theory of Counting", In Applied Combinatorial Mathematics, ed. Beckenbach, John Wiley 1964

[F68] Feller W., "An Introduction to Probability Theory and its Applications", Vol.I, 3rd ed., John Wiley 1968

[GKP89] Graham R., Knuth D., Patashnik O., "Concrete Mathematics", Addison-Wesley 1989

[G84] Grimaldi R., "Discrete and Combinatorial Mathematics An Applied Introduction", Second Edition, Addison-Wesley 1984

[ΚΜΣ92] Κυρούσης Λ., Μπούρας Χ., Σπυράκης Π., "ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Τα Μαθηματικά της Επιστήμης των Υπολογιστών", Εκδόσεις Gutenberg 1992

[L85] Liu C., "Elements of Discrete Mathematics", Second Edition, McGraw-Hill 1985

[L68] Liu C., "Introduction to Combinatorial Mathematics", McGraw-Hill 1968

[Lo79] Lovasz L., "Combinatorial Problems and Exercises", North-Holland 1979

[Lu80] Lueker G., "Some Techniques for Solving Recurrences", Computing Surveys, Vol. 12, No. 4, December 1980

[M86] Marshall H., "Combinatorial Theory", Second Edition, John Wiley and Sons 1986

[P37] Pólya G., "Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und Chemishe Verbindungen", Acta Informatica 68, 1937, pp. 145-254

[R87] Read R., "Pólya's Theorem and its Progeny", Mathematics Magazine 60, No. 5, December 1987, pp. 275-282

[RND77] Reingold M., Nievergelt J.,Deo N., "Combinatorial Algorithms: Theory and Practice", Englewood Cliffs 1977

[Ri58] Riordan J., "An Introduction to Combinatorial Analysis", John Wiley 1958

[RW85] Ross K.A., Wright C.R.B., "Discrete Mathematics", Prentice Hall 1985

[TM85] Tomescu I., Melter R., "Problems in Combinatorics and Graph Theory", John Wiley and Sons 1985

[T87] Townsend M., "Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory", Benjamin/Cummings Publishing Company 1987

[Tu84] Tucker A., "Applied Combinatorics", Second Edition, John Wiley and Sons 1984

[MAA72] "Topics in Combinatorial Mathematics", Mathematical Association of America 1972