Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών. Σελίδες για πρόχειρο θα σας δοθούν χωριστά.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες (και ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο πρόχειρο).

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:													

ΠΡΟΣΟΧΗ: Εάν θέλετε μπορείτε να επιλέξετε να βαθμολογηθούν μόνον ΔΥΟ θέματα, διαγράφοντας (με Χ) ΤΡΙΑ από τα τετραγωνίδια των βαθμών παρακάτω ΚΑΙ τις αντίστοιχες ΤΡΕΙΣ σελίδες στο εσωτερικό του τετραδίου. Στην περίπτωση αυτή θα πάρετε bonus 2 μονάδες (σας συμφέρει αντί να «μαντεύετε» λύσεις που δεν γνωρίζετε.)

Βαθμοί

1α	1β	2	3	4	5	bonus	Σύνολο

Καλη Επιτυχια

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 1α [0.5 μονάδα]. Να γράψετε και να δικαιολογήσετε, **σε λίγες γραμμές**, τύπο που να δίνει τον αριθμό των γνησίως φθινουσών ακολουθιών με r όρους που ανήκουν στο σύνολο $\{1, \ldots, n\}$, όπου $r, n \in \mathbb{N}$.

Απάντηση: Κάθε υποσύνολο του $\{1, \ldots, n\}$ με r στοιχεία αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία r όρων (αρκεί να διατάξουμε κατά γνησίως φθίνοντα τρόπο τα στοιχεία του) και αντιστρόφως (αρκεί να θεωρήσουμε το σύνολο των όρων μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας). Άρα η απάντηση είναι $\binom{n}{r}$.

Θέμα 1β [2 μονάδες]. Να βρείτε, με στοιχειώδεις συνδυαστικές μεθόδους, τύπο που να δίνει τον αριθμό των τρόπων που r σημαίες μπορεί να τοποθετηθούν σε n ιστούς έτσι ώστε κάθε ιστός να περιέχει τουλάχιστον δύο σημαίες, όπου $r, n \in \mathbb{N}$ και $r \geq 2n$ («μετρά» η σειρά των σημαιών στους ιστούς). Να γράψετε σύντομη δικαιολόγηση.

Απάντηση: Πρώτα για τον κάθε ιστό επιλέγουμε τη σημαία που θα βάλουμε πρώτη. Για τον πρώτο ιστό έχουμε r επιλογές, για το δεύτερο $r-1$ επιλογές, ..., $r-n+1$ επιλογές για τον τελευταίο ιστό. Συνολικά για τις πρώτες σημαίες των ιστών έχουμε $r!/(r-n)!$ επιλογές. Στη συνέχεια επιλέγουμε για τον κάθε ιστό τη δεύτερη σημαία: Για τον πρώτο $r-n$ επιλογές. Για τον τελευταίο $r-2n+1$ επιλογές. Συνολικά, $(r-n)!/(r-2n)!$ επιλογές για τη δεύτερη σημαία. Για τις εναπομένουσες $r-2n$ σημαίες επιλέγουμε σε ποιον ιστό θα τοποθετήσουμε την πρώτη, n επιλογές. Με την τοποθέτηση της πρώτης όμως οι δυνατές θέσεις για τη δεύτερη αυξάνονται κατά μία. Άρα έχουμε $n+1$ επιλογές για τη δεύτερη εναπομένουσα σημαία. Για την τελευταία από τις $r-2n$ έχουμε $n+(r-2n)-1 = r-n-1$ επιλογές. Σύνολο επιλογών $(r-n-1)!/(n-1)!$. Τελική απάντηση:

$$\frac{r!(r-n)!(r-n-1)!}{(r-n)!(r-2n)!(n-1)!} = \frac{r!(r-n-1)!}{(r-2n)!(n-1)!}.$$

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 2 [2.5 μονάδες]. Να βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας:

$$\frac{1}{n(n-1)}, \quad n \geq 2.$$

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Θεωρούμε τη σχέση $1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, και ολοκληρώνοντας καταλήγουμε ότι

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n. \tag{1}$$

Άρα

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n. \tag{2}$$

Από την σχέση (1) όμως προκύπτει ότι

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^{n-1} \tag{3}$$

και πολ/άζοντας με x ότι

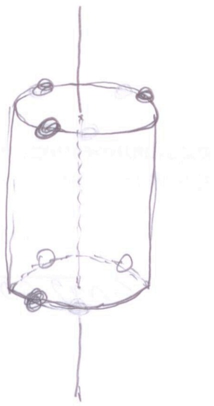
$$x \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^n. \tag{4}$$

Από τις σχέσεις (5) και (4) προκύπτει ότι η ΓΣ που ζητάμε είναι:

$$x \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + x.$$

Θα βαθμολογηθούν μόνο ΔΥΟ από τα θέματα 3, 4 και 5. Να διαγράφετε (με Χ) τη σελίδα που βρίσκετε το θέμα που δεν θέλετε να βαθμολογηθεί ΚΑΙ το αντίστοιχο τετραγωνίδιο βαθμού στην πρώτη σελίδα.

Θέμα 3 [2.5 μονάδες]. Κύλινδρος μπορεί να περιστραφεί περί άξονα που συνδέει τα κέντρα των βάσεών του. Στις δύο περιφέρειες των βάσεών του υπάρχουν, τρία στην κάθε μία, σημεία συμμετρικά τοποθετημένα (σε απόσταση $2\pi/3$ rad μεταξύ τους· βλ. σχήμα δίπλα). Να υπολογιστεί με πόσους μη ισοδύναμους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τα έξι σημεία στις περιφέρειες των βάσεων με τέσσερα χρώματα. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Pólya (απ' ευθείας μέτρηση δεν θα γίνει δεκτή). Να είστε σύντομοι. Μην κάνετε τις πράξεις μέχρι τέλους.



Απάντηση: Έχουμε συνολικά τρεις συμμετρίες, την ταυτοτική, την περιστροφή δεξιόστροφα κατά $2\pi/3$, και την περιστροφή δεξιόστροφα κατά $4\pi/3$:

1. Η ταυτοτική έχει δείκτρια συνάρτηση x_1^6
2. Η περιστροφή κατά $2\pi/3$ έχει δείκτρια συνάρτηση την x_3^2
3. Η περιστροφή κατά $4\pi/3$ έχει επίσης δείκτρια συνάρτηση την x_3^2

Επομένως, αφού έχουμε τέσσερα χρώματα, το πολυώνυμο Pólya είναι:

$$\frac{1}{3}\left((y_1+y_2+y_3+y_4)^6 + 2(y_1^3+y_2^3+y_3^3+y_4^3)^2\right).$$

Θέτουμε $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$ για να βρούμε την απάντηση: $\frac{1}{3}\left(4^6 + 2\times 4^2\right)$.

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θα βαθμολογηθούν μόνο ΔΥΟ από τα θέματα 3, 4 και 5. Να διαγράφετε (με X) τη σελίδα που βρίσκετε το θέμα που δεν θέλετε να βαθμολογηθεί ΚΑΙ το αντίστοιχο τετραγωνίδιο βαθμού στην πρώτη σελίδα.

Θέμα 4 [2.5 μονάδες]. Να βρείτε τον αριθμό των ακεραίων λύσεων μεταξύ -2 και 5 (συμπεριλαμβανομένων) της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10.$$

Δεν θα αξιολογηθείτε με βάση την ορθότητα των πράξεων ή του τελικού αποτελέσματος αλλά με βάση την ορθή και σαφή περιγραφή των αναγκαίων βημάτων. Να είστε σύντομοι και περιεκτικοί.

Απάντηση: Θέτουμε $y_i = x_i + 2$, οπότε πρέπει να βρούμε τον αριθμό των λύσεων της

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 18, \tag{5}$$

μεταξύ 0 και 7 (συμπεριλαμβανομένων). Ονομάζουμε c_i την ιδιότητα $y_i \geq 8$. Θέλουμε να υπολογίσουμε των αριθμό $N(\overline{c_1 c_2 c_4 c_1})$ των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης (5) για τις οποίες δεν ικανοποιούνται οι c_i για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$. Όλες οι μη αρνητικές λύσεις της (5) είναι σε πλήθος $N = \binom{4+18-1}{18}$. Αυτές για τις οποίες $y_1 \geq 8$ είναι σε πλήθος $N(c_1) = \binom{4+10-1}{10}$. Παρομοίως για y_2, y_3, y_4. Αυτές για τις οποίες $y_1, y_2 \geq 8$ είναι σε πλήθος $N(c_1 c_2) = \binom{4+2-1}{2}$. Παρομοίως για τα ζεύγη $(y_1, y_3), (y_1, y_4), (y_2, y_3), (y_2, y_4), (y_3, y_4)$. Παρατηρήστε ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε τρία από τα y_i όλα ≥ 8. Άρα συνολικά, από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι:

$$\binom{4+18-1}{18} - 4\binom{4+10-1}{10} + 6\binom{4+2-1}{2}.$$

Θα βαθμολογηθούν μόνο ΔΥΟ από τα θέματα 3, 4 και 5. Να διαγράφετε (με Χ) τη σελίδα που βρίσκετε το θέμα που δεν θέλετε να βαθμολογηθεί ΚΑΙ το αντίστοιχο τετραγωνίδιο βαθμού στην πρώτη σελίδα.

Θέμα 5 [2.5 μονάδες]. Θεωρούμε διμερές απλό γράφημα $G = (V, E)$ με μέρη $A, B \subseteq V$, με $|A| = |B|$ (με $|\cdot|$ συμβολίζουμε τον πληθάθριμο). Έστω ότι για κάθε **γνήσιο** υποσύνολο $S \subsetneqq A$ ισχύει ότι $|S| \leq |N(S)|$, όπου $N(S)$ το σύνολο των γειτόνων του S. Ισχύει αναγκαστικά ότι υπάρχει αντιστοίχιση (ταίριασμα) των κορυφών του G που καλύπτει όλα τα στοιχεία του A; Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα. Αν δώσετε αντιπαράδειγμα να είναι πολύ απλό. Τι ισχύει αν υποθέσουμε επιπλέον κάθε στοιχείο του μέρους B ανήκει σε μία τουλάχιστον ακμή (όλα τα σύνολα είναι πεπερασμένα); Να δικαιολογήσετε σύντομα την απάντησή σας.

Απάντηση: Για το πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι ότι ενδέχεται να μην υπάρχει αντιστοίχιση. Π.χ. θεωρήστε δύο μέρη $\{a_1, a_2\}$ και $\{b_1, b_2\}$ και συνδέστε τα a_1, a_2 μόνο με b_1.

Για το δεύτερο ερώτημα, έστω ότι το κάθε μέρος έχει πληθάριθμο n. Ας θεωρήσουμε $a \in A$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $|N(A \setminus \{a\}| \geq n - 1$.

Πρώτη περίπτωση $|N(A \setminus \{a\})| = n - 1$, άρα για κάποιο $b \in B$ έχουμε ότι $N(A \setminus \{a\}) = B \setminus \{b\}$. Από την υπόθεση όμως ότι το b συνδέεται με κάποιο στοιχείο του A, προκύπτει ότι $N(A) = B$, άρα $|N(A)| = n \geq |A|$

Δεύτερη περίπτωση $|N(A \setminus \{a\})| = n$. Τότε κατά μείζονα λόγο $|N(A)| = n \geq |A|$.

Σε κάθε περίπτωση ισχύουν οι προϋποθέσεις για το θ. Hall.

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας