

Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Σελίδες για πρόχειρο θα σας δοθούν χωριστά.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες (και ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο πρόχειρο).

Επώνυμο:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Όνομα:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

|     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| ΑΜ: |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Βαθμοί

| 1α | 1β | 2 | 3 | Σύνολο |
|----|----|---|---|--------|
|    |    |   |   |        |

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

**Θέμα 1α [Δεν παίρνει μονάδες, αλλά μόνο αν είναι σωστό θα βαθμολογηθεί το δεύτερο ερώτημα αυτού του θέματος].**

Έστω  $X$  υποσύνολο των φυσικών αριθμών με πληθάρημο  $n > 1$  και  $k$  φυσικός με  $1 < k \leq n$ . Θεωρούμε τα εξής σύνολα:

- Το σύνολο  $A$  των φθινουσών ακολουθιών (όχι κατ' ανάγκη γνησίως) με  $k$  όρους από στοιχεία του  $X$ .
- Το σύνολο  $B$  των συνδυασμών  $k$  στοιχείων του  $X$  με επανάληψη.
- Το σύνολο  $C$  των τρόπων να τοποθετήσουμε  $k$  διακεκριμένα αντικείμενα σε  $n$  διακεκριμένες υποδοχές.

Κυκλώστε το σωστό, χωρίς αιτιολόγηση ούτε σχόλια:

1. Τα σύνολα  $A, B, C$  είναι ισοπληθικά.
2. Τα σύνολα  $A, B$  είναι ισοπληθικά και το  $C$  έχει πληθάρημο μεγαλύτερο από αυτά.
3. Τα σύνολα  $A, B, C$  έχουν ανά δύο διαφορετικούς πληθάρημους.
4. Τα σύνολα  $A, C$  έχουν τον ίδιο πληθάρημο, αλλά το  $B$  έχει μεγαλύτερο πληθάρημο από αυτά.
5. Τα σύνολα  $B, C$  έχουν τον ίδιο πληθάρημο, αλλά το  $A$  έχει μεγαλύτερο πληθάρημο από αυτά.

**Απάντηση:** Σωστό σε αυτό το φύλλο θεμάτων είναι το (2) (η αρίθμηση διαφέρει από φύλλο σε φύλλο).

**Εξήγηση (δεν σας ζητήθηκε).** Υπάρχει προφανής  $1 - 1$  και επί αντιστοιχισή μεταξύ συνδυασμών με επανάληψη  $k$  στοιχείων του  $X$  και φθινουσών ακολουθιών (όχι κατ' ανάγκη γνησίως) με  $k$  όρους επιλεγμένους από το  $X$  (αρκεί να βάλουμε τα στοιχεία ενός συνδυασμού με επανάληψη σε φθίνουσα σειρά). Άρα  $|A| = |B|$ . Το σύνολο  $C$  έχει μεγαλύτερο πληθάρημο, διότι τα  $k$  αντικείμενα είναι διακεκριμένα, επομένως οι τοποθετήσεις τους στις  $n$  διακεκριμένες υποδοχές αντιστοιχούν σε διατάξεις με επανάληψη  $k$  στοιχείων επιλεγμένων από σύνολο με πληθάρημο  $n$ .

**Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας**

**Θέμα 1β [3,5 μονάδες].** Έστω τα υποσύνολα των φυσικών,  $A = \{1, \dots, n\}$  και  $B = \{1, \dots, m\}$  με  $m \leq n$ . Να αποδείξετε, αποκλειστικά με χρήση της τεχνικής εγκλεισμού-αποκλεισμού (άλλη μέθοδος δε θα γίνει δεκτή), ότι το πλήθος των συναρτήσεων  $f : A \mapsto B$  που είναι επί ισούται με

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k (m-k)^n.$$

Η δικαιολόγησή σας να μην ξεπερνά τις δεκαπέντε γραμμές.

**Απάντηση:** Για κάθε  $i \in B$  ορίζουμε το εξής σύνολο συναρτήσεων:

$$c_i = \{f : A \mapsto B \mid \forall \alpha \in A (f(\alpha) \neq i)\}$$

δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων που δεν αντιστοιχίζουν στοιχείο του  $A$  στο  $i \in B$ . Υπολογίζουμε το ζητούμενο, που συμβολίζουμε με  $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \cdots \bar{c}_m)$  και είναι το πλήθος των συναρτήσεων που δεν ανήκουν σε κανένα  $c_i$  άρα είναι επί, χρησιμοποιώντας την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού:

$$\begin{aligned} N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \cdots \bar{c}_m) &= N - \binom{m}{1} N(c_i) + \binom{m}{2} N(c_i c_j) - \binom{m}{3} N(c_i c_j c_k) + \cdots \\ &\quad + (-1)^m N(c_1 c_2 \cdots c_m) \\ &= m^n - \binom{m}{1} (m-1)^n + \binom{m}{2} (m-2)^n + \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} 1^n \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k (m-k)^n. \end{aligned}$$

**Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας**

**Θέμα 2 [3,5 μονάδες].** Να υπολογιστεί με πόσους μη ισοδύναμους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τα τετράγωνα μίας σκακιέρας διαστάσεων  $2 \times 4$  με δύο χρώματα, αν δεχθούμε ότι η σκακιέρα μπορεί να περιστρέφεται μόνο γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό της (δηλαδή δεν μπορεί να περιστρέφεται στον τρισδιάστατο χώρο). Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Πόlya (απ' ευθείας μέτρηση δε θα γίνει δεκτή). Η απάντησή σας να μην ξεπερνά τις είκοσι γραμμές.

**Απάντηση:** Βλ. Άσκηση 4.10 του βιβλίου για μόνο τις δύο πρώτες συμμετρίες. Η απάντηση στο ερώτημα του θέματος είναι

$$\frac{1}{2}((1+1)^8 + (1^2+1^2)^4) = 136.$$

**Θέμα 3 [3,5 μονάδες].** Έστω γράφημα  $G$  με  $m$  ακμές και  $n$  κορυφές. Υποθέτουμε ότι για κάθε σύνολο  $S$  ακμών με  $|S| = r$ , όπου  $r$  οποιοσδήποτε φυσικός  $\leq m$ , υπάρχουν τουλάχιστον  $r$  κορυφές που ανήκουν σε κάποια ακμή του  $S$ . Να αποδειχθεί ότι μπορούμε να επιλέξουμε  $m$  διαφορετικές κορυφές ώστε η κάθε ακμή του  $G$  να περιέχει μία από αυτές. Η απάντησή σας να μην ξεπερνά τις είκοσι γραμμές.

**Απάντηση:** Θεωρούμε διμερή γράφο  $H$  του οποίου το ένα μέρος  $X$  αποτελείται από τις ακμές του  $G$  και το άλλο μέρος  $Y$  από τις κορυφές του  $G$ . Συνδέουμε στο  $H$  μία ακμή  $e \in X$  με μία κορυφή  $v \in Y$  αν η  $v$  ανήκει στην  $e$ . Παρατηρούμε ότι από την υπόθεση, για κάθε σύνολο  $S \subseteq X$ ,  $|S| \leq |N(S)|$ , όπου  $N(S)$  είναι το σύνολο των κορυφών στο  $Y$  που συνορεύουν, κατά την έννοια του διμερούς γράφου  $H$ , με ακμή  $e \in X$ . Άρα από το θεώρημα Hall (Θεώρημα 3.4.1 στο βιβλίο του κ. Αθανασιάδη), υπάρχει ταιριάσμα στον  $H$  που δεν αφήνει ακάλυπτο στοιχείο  $e \in X$ , δηλαδή δεν αφήνει ακάλυπτη ακμή του  $G$ . Αν θεωρήσουμε τα στοιχεία του  $Y$  (κορυφές του  $G$ ) που ανήκουν σε ακμές του ταιριάσματος, λαμβάνουμε προφανώς (από τον ορισμό ταιριάσματος που καλύπτει όλα τα στοιχεία του  $X$ ) σύνολο  $U$  κορυφών του  $G$  με  $|U| = m$  τέτοιο ώστε κάθε ακμή του  $G$  (στοιχείο του  $X$ ) να περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή στο  $U$ .