Στη σελίδα αυτή γράφτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράφτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Σελίδες για πρόχειρο θα σας δοθούν χωριστά.

Γράφτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες (και ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο πρόχειρο).

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:													

Βαθμοί

1α	1β	2	3	Σύνολο

Καλη Επιτυχια

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 1α [1 μονάδα].

Έστω X υποσύνολο των φυσικών αριθμών με πληθάριθμο $n \geq 1$ και k φυσικός με $1 \leq k$. Θεωρούμε τα εξής σύνολα:

- Το σύνολο A των τρόπων να τοποθετήσουμε k μη διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές.
- Το σύνολο B των φθινουσών ακολουθιών (όχι κατ΄ ανάγκη γνησίως) με k όρους από στοιχεία του X.
- Το σύνολο C των συνδυασμών k στοιχείων του X με επανάληψη.

Κυκλώστε το σωστό, χωρίς αιτιολόγηση ούτε σχόλια:

1. Τα σύνολα A, B, C είναι ισοπληθικά.
2. Τα σύνολα A, B είναι ισοπληθικά και το C έχει πληθάριθμο μικρότερο από αυτά.
3. Τα σύνολα A, B, C έχουν ανά δύο διαφορετικούς πληθαρίθμους.
4. Τα σύνολα A, C έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, αλλά το B έχει μικρότερο πληθάριθμο από αυτά.
5. Τα σύνολα B, C έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, αλλά το A έχει μικρότερο πληθάριθμο από αυτά.

Απάντηση: Σωστό σε αυτό το φύλλο θεμάτων είναι το (1) (η αρίθμηση διαφέρει από φύλλο σε φύλλο).

Εξήγηση (δεν σας ζητήθηκε). Υπάρχει προφανής $1-1$ και επί αντιστοίχιση μεταξύ τοποθετήσεων k μη διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές και συνδυασμών k στοιχείων του X με επανάληψη (αρκεί να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία του X με υποδοχές και στη συνέχεια να θεωρήσουμε ότι κάθε υποδοχή εμφανίζεται στο συνδυασμό τόσες φορές όσα τα αντικείμενα που δέχεται). Άρα $|A| = |C|$. Αλλά και το σύνολο των συνδυασμών με επανάληψη είναι σε $1-1$ αντιστοίχιση με το σύνολο των φθινουσών ακολουθιών, διότι αρκεί να βάλουμε τα στοιχεία ενός συνδυασμού με επανάληψη από στοιχεία του X σε φθίνουσα σειρά, όχι κατ' ανάγκη γνησίως, αφού ενδεχομένως θα υπάρχουν επαναλήψεις.

Θέμα 1β [3 μονάδες]. Να γράψετε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των τρόπων να τοποθετήσουμε k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές, με τον περιορισμό κάθε υποδοχή να δεχτεί τουλάχιστον 2 αντικείμενα. Δίνεται ότι $k \geq 2n$. Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση να δοθεί με τη μορφή δύναμης μιας απλής παράστασης που δεν έχει αθροίσματα στη μορφή $\sum$. Μην υπολογίσετε το συντελεστή του x^k. Να δώσετε σύντομη εξήγηση (2-3 γραμμές).

Απάντηση: Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση δίνεται παρακάτω:

$$\left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)^n = (e^x - 1 - x)^n$$

Ο εκθέτης n αντιστοιχεί στις υποδοχές. Ο εκθέτης i στον j-οστό παράγοντα της δύναμης εις την n αριστερά αντιστοιχεί στην τοποθέτηση στην j-οστή υποδοχή i διακεκριμένων αντικειμένων ($i \geq 2$). Ο συντελεστής του $x^k/k!$ στο αποτέλεσμα δίνει την απάντηση.

Θέμα 2 [4 μονάδες]. Κανονικό τετράεδρο με κορυφές A, B, C, D περιστρέφεται γύρω από τον άξονα AM, όπου M το κέντρο βάρους (σημείο τομής διαμέσων) του ισόπλευρου τριγώνου BCD που αποτελεί τη βάση του τετράεδρου. Να υπολογιστεί με πόσους μη ισοδύναμους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις έδρες του τετράεδρου με τέσσερα χρώματα. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Pólya (απ' ευθείας μέτρηση δε θα γίνει δεκτή). Να είστε σύντομοι.

Απάντηση: Έχουμε συνολικά τέσσερις έδρες και τρεις συμμετρίες:

1. Την ταυτοτική, με δείκτρια συνάρτηση x_1^4
2. Τις δύο περιστροφές κατά $\pm\frac{\pi}{3}$, με δείκτρια συνάρτηση, και για τις δύο, την $x_1 x_3$

Επομένως, αφού έχουμε τέσσερα χρώματα, το πολυώνυμο Pólya είναι:

$$\frac{1}{3}\left((y_1+y_2+y_3+y_4)^4 + 2(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1^3+y_2^3+y_3^3+y_4^3)\right).$$

Θέτουμε $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$ για να βρούμε την απάντηση: 96.

Θέμα 3 [2 μονάδες για το ευθύ και 2 για το αντίστροφο]. Σε κέντρο διασκέδασης υπάρχουν n τραπέζια κάθε ένα από τα οποία έχει ακριβώς ένα κάθισμα κενό (τα υπόλοιπα καθίσματα κάθε τραπεζιού είναι κατειλημμένα). Σε κάθε τραπέζι κάθεται τουλάχιστον ένας άνθρωπος. Στο κέντρο εισέρχονται k νέοι πελάτες ($k \geq n$), οι οποίοι όμως είναι διατεθειμένοι να καθίσουν σε κάποιο τραπέζι μόνον εφ' όσον γνωρίζουν έναν τουλάχιστον από τους ήδη καθήμενους σε αυτό. Να αποδείξετε ότι αν οποιοσδήποτε αριθμός r από καθήμενους γνωρίζουν τουλάχιστον r από τους νεο-εισερχόμενους, το γκαρσόνι θα τα καταφέρει να γεμίσει τα άδεια καθίσματα (αφήνοντας ενδεχομένως όρθιους νεο-εισερχόμενους). Ισχύει το αντίστροφο (μη βιαστείτε να αποδείξετε το αντίστροφο —διαφέρει από αντίστοιχο παλαιότερο θέμα· προσέξτε τη διατύπωση);

Απάντηση: Θεωρούμε διμερή γράφο που στο ένα μέρος του, το A, κορυφές είναι τα n τραπέζια και στο άλλο μέρος, το B, κορυφές είναι οι k νεο-εισερχόμενοι. Συνδέουμε κορυφή v που αντιστοιχεί σε τραπέζι με κορυφή w που αντιστοιχεί σε νεο-εισερχόμενο ανν ο w έχει γνωστό στο v. Αν θεωρήσουμε r τραπέζια, τότε σε αυτά κάθονται τουλάχιστον $r' \geq r$ άνθρωποι, οι οποίοι από την υπόθεση γνωρίζουν τουλάχιστον $r' \geq r$ από τους νεο-εισερχόμενους. Επομένως οποιεσδήποτε r κορυφές που αντιστοιχούν σε r τραπέζια μπορούν να συνδεθούν με τουλάχιστον r κορυφές που αντιστοιχούν σε νεο-εισερχόμενους. Το γκαρσόνι επομένως μπορεί να εφαρμόσει γνωστό αποτέλεσμα σύμφωνα με το οποίο υπάρχει ταίριασμα που συνδέει κάθε στοιχείο του A με ένα τουλάχιστον στοιχείο του B ανν για κάθε $S \subseteq A$ ο αριθμός των γειτόνων του S έχει πλήθος τουλάχιστον όσο το πλήθος του S για να βρει ένα ταίριασμα (όχι κατ΄ανάγκη τέλειο) μεταξύ τραπεζιών και νεο-εισερχόμενων.

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Για αντιπαράδειγμα θεωρήστε δύο τραπέζια: ένα με καθήμενους a_1, a_2 (και μία κενή θέση) και το άλλο με έναν καθήμενο a_3 (και μία κενή θέση). Ας υποθέσουμε ότι εισέρχονται δύο νέοι πελάτες x_1, x_2 και ότι ο x_1 γνωρίζει μόνο τον a_1 και ο x_2 μόνο τον a_3. Προφανώς οι νεο-εισερχόμενοι μπορούν να γεμίσουν τα άδεια καθίσματα, αλλά οι τρεις καθήμενοι δεν έχουν τουλάχιστον τρεις γνωστούς νεο-εισερχόμενους.

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας