Στοχαστικές Ανελίξεις - Ιανουάριος 2023

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ______________________________ **Α.Μ:** ____________

ΟΔΗΓΙΕΣ

(1) Οι απαντήσεις πρέπει να είναι τεκμηριωμένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί.

(2) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας και στα θέματα. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται.

(3) Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται.

(4) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά. **Καλή Επιτυχία!**

ΘΕΜΑ 1. (35 μονάδες) Ένα μηχάνημα μπαίνει σε λειτουργία στην αρχή κάθε περιόδου. Στη διάρκεια κάθε περιόδου μπορεί είτε να λειτουργήσει κανονικά ή να πάθει βλάβη. Αν πάθει βλάβη, αυτό θα διαπιστωθεί στην αρχή της επόμενης περιόδου οπότε το μηχάνημα θα αντικατασταθεί ακαριαία. Η ηλικία του μηχανήματος στην αρχή μιας περιόδου ορίζεται ως ο αριθμός των περιόδων που το μηχάνημα έχει λειτουργήσει κανονικά χωρίς να πάθει βλάβη. Αν ένα μηχάνημα αντικατασταθεί στην αρχή μιας περιόδου, τότε η ηλικία του στην αρχή αυτής της περιόδου είναι μηδέν. Η πιθανότητα ένα μηχάνημα ηλικίας k να πάθει βλάβη στη διάρκεια της περιόδου είναι ίση p_k, όπου $p_0 = 0, p_k = 1 - \frac{\theta}{k}, k = 1, 2, \ldots$ και θ σταθερά με $0 < \theta < 1$.

(α) Έστω X_n η ηλικία του μηχανήματος στην αρχή της περιόδου n. Να δείξετε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου και να βρείτε τον πίνακα ή το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος.

(β) Να δείξετε ότι η στοχαστική διαδικασία του ερωτήματος (α) είναι θετικά επαναληπτική και απεριοδική και να υπολογίσετε την οριακή κατανομή.

(γ) Αν το μηχάνημα έχει ηλικία k στην αρχή μιας περιόδου τότε το κόστος συντήρησης αυτής της περιόδου είναι ίσο με ck, ενώ αν στη διάρκεια της περιόδου συμβεί βλάβη υπάρχει επιπλέον κόστος ίσο με f, όπου $c > 0, f > 0$ γνωστές σταθερές. Να βρεθεί το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά περίοδο σε άπειρο ορίζοντα.

ΘΕΜΑ 2. (30 μονάδες) Ένας ανελκυστήρας ξεκινά από τον όροφο n ενός κτηρίου και κατευθύνεται προς το ισόγειο (όροφος 0). Ο ανελκυστήρας κάνει στάσεις σε τυχαίους ορόφους ως εξής: Όταν σταματήσει σε κάποιον όροφο, τότε η επόμενη στάση θα είναι σε οποιονδήποτε από τους επόμενους προς τα κάτω ορόφους με ίσες πιθανότητες (π.χ. αν σταματήσει στον 4ο όροφο, τότε η επόμενη στάση θα είναι στον 3ο, 2ο, 1ο ή ισόγειο, με πιθανότητα 1/4 στον καθένα).

(α) Έστω f_n ο αναμενόμενος αριθμός στάσεων μέχρι το ασανσέρ να φτάσει από τον όροφο n στο ισόγειο (που προσμετράται ως η τελευταία στάση). Να υπολογίσετε τα f_2, f_3.

(β) Να αποδείξετε ότι $f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(**Παρατήρηση:** Αν χρησιμοποιήσετε κάποια στοχαστική διαδικασία, θα πρέπει να την ορίσετε επακριβώς).

ΘΕΜΑ 3. (35 μονάδες) Σε ένα κουρείο εργάζεται ένας κουρέας και δεν υπάρχει χώρος αναμονής. Οι πελάτες που έρχονται ενώ ο κουρέας κουρεύει άλλον πελάτη φεύγουν χωρίς να εξυπηρετηθούν. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων πελατών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν εκθετική κατανομή με ρυθμό λ. Ένας πελάτης που έρχεται στο κουρείο είναι είτε ενήλικας με πιθανότητα p είτε παιδί με πιθανότητα $q = 1 - p$. Ο χρόνος κουρέματος ενός ενήλικα ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό μ_1 και ενός παιδιού εκθετική κατανομή με ρυθμό μ_2.

(α) Να υπολογίσετε τα ποσοστά χρόνου που ο κουρέας δεν εργάζεται, κουρεύει έναν ενήλικα, ή κουρεύει ένα παιδί.

(β) Έστω ότι στο κουρείο υπάρχει μια θέση αναμονής. Ένας πελάτης που έρχεται ενώ ο κουρέας εργάζεται περιμένει στην αναμονή αν η θέση είναι ελεύθερη, ή φεύγει χωρίς να εξυπηρετηθεί αν υπάρχει άλλος πελάτης που περιμένει. Να ορίσετε μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή t και να κατασκευάσετε τον πίνακα ή το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

(γ) Για το σύστημα του ερωτήματος (β), αν ο κουρέας κουρεύει έναν ενήλικα και η θέση αναμονής είναι ελεύθερη, ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσει το κούρεμα πριν έρθει ο επόμενος πελάτης;

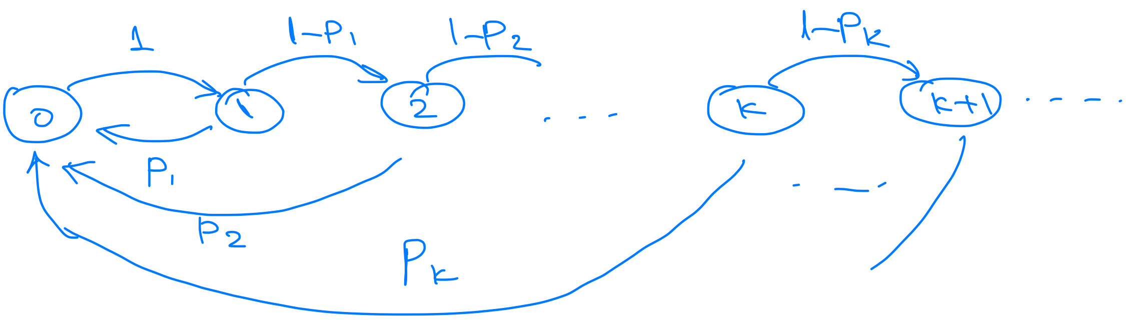
(δ) Για το σύστημα του ερωτήματος (β), έστω $p = (p_i, i \in S)$ η οριακή κατανομή και έστω $N_1(t), N_2(t)$ ο αριθμός ενηλίκων πελατών και ο αριθμός παιδιών στο κατάστημα τη χρονική στιγμή t. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{t\to\infty} EN_1(t)$ και $\lim_{t\to\infty} EN_2(t)$, συναρτήσει της οριακής κατανομής p. (Δεν απαιτείται να υπολογίσετε την p).

Στοχαστικές Ανελίξεις Ιαν 2023

ΘΕΜΑ 1

(α) Έστω X_n η ηλικία στην αρχή της περιόδου n.

Αν $X_n=k$, τότε η X_{n+1} είναι $X_{n+1}=k+1$ με πιθ. $1-p_k$ και $X_{n+1}=0$ με πιθ. p_k.



(β) Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Επίσης είναι απεριοδική γιατί $p_{00}^{(n)}>0 \quad \forall\, n\geq 2$.

Για να εξετάσουμε την επαναληπτικότητα υπολογίζουμε τη στάσιμη κατανομή:

$i=0$: $$\pi_0=\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j p_j$$

$$\pi_1=\pi_0$$

$$\pi_2=\pi_1(1-p_1)=\pi_0\frac{\theta}{1}$$

$$\pi_3=\pi_2(1-p_2)=\pi_0\frac{\theta^2}{2!}$$

$\vdots$

όμοια βρίσκουμε $\pi_k=\pi_0\dfrac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}$, $k=1,2,\dots$

Η εξίσωση κανονικοποίησης είναι:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=1.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \pi_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}\right) = \pi_0 \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^j}{j!}\right)$$

$$= \pi_0 \left(1 + e^{\theta}\right) = 1 \implies \pi_0 = \frac{1}{1+e^{\theta}}$$

Επομένως για $k \geq 1$: $\pi_k = \dfrac{\theta^{k-1}}{(1+e^{\theta})(k-1)!}$

Συνολικά έχουμε $\pi_k = \begin{cases} 1/(1+e^{\theta}) & , k=0,1 \\ \dfrac{\theta^{k-1}}{(1+e^{\theta})(k-1)!} & , k>1 \end{cases}$

Επειδή $\pi_k > 0 \ \forall k, \forall \theta \in (0,1)$, προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή με $\pi_k > 0 \ \forall k$.

Επομένως η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική και η οριακή κατανομή ταυτίζεται με τη στάσιμη.

(γ) Το μέσο κόστος μιας περιόδου όταν $X_n = k$ είναι ίσο με $ck + p_k f$.

Για $k=0$ η παραπάνω ποσότητα είναι ίση με 0, ενώ για $k \geq 1$ ίση με $ck + f\left(1 - \frac{\theta}{k}\right)$

Επομένως το μέσο αναμ. κόστος ανά περίοδο σε άπειρο ορίζοντα είναι ίσο με

$$\bar{C} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \left(ck + f - \frac{\theta f}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{1+e^{\theta}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}\left(k+f-\frac{\theta f}{k}\right)\right]$$

Για το παραπάνω άθροισμα έχουμε:

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\theta^{k-1}}{(k-1)!} \overset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+1)\,\theta^{j}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{j\theta^{j}}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\theta^{j}}{j!} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j\theta^{j}}{j!} + e^{\theta} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\theta^{j}}{(j-1)!} + e^{\theta} = \theta\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\theta^{j-1}}{(j-1)!} + e^{\theta} =$$

$$= \theta\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta^{i}}{i!} + e^{\theta} = \theta e^{\theta} + e^{\theta} = (\theta+1)e^{\theta}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\theta^{j}}{j!} = e^{\theta}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k-1}}{k!} = \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{k}}{k!} =$$

$$= \frac{1}{\theta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{k}}{k!} - 1\right) = \frac{1}{\theta}\left(e^{\theta} - 1\right)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2), (3):

$$\bar{C} = \frac{1}{1+e^{\theta}}\left[c(\theta+1)e^{\theta} + fe^{\theta} - f(e^{\theta}-1)\right]$$

επομένως

$$\boxed{\bar{C} = \frac{c(\theta+1)e^{\theta}+f}{1+e^{\theta}}}$$

Θεμα 2

Εστω X_n ο όροφος στον οποίο βρίσκεται το ασανσέρ στη $n^{οστή}$ στάση κατά την κίνηση του προς το ισόγειο. Επειδή κάθε φορά η επόμενη στάση είναι ανεξάρτητη από τις προηγούμενες, η $\{X_n, n=0,1,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή διαδικασία με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,\dots,N\}$, και αρχική κατάσταση $X_0=N$.

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι

$$P_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \frac{1}{i}, \quad j=0,1,\dots,i-1$$

αφού είναι εξ ίσου πιθανό η επόμενη στάση να είναι σε οποιονδήποτε από τους ορόφους $0,1,\dots,i-1$

Επομένως ο πίνακας πιθ. μετάβασης ενός βήματος είναι:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & & N-1 & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdot & - & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \cdot & - & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & \cdot & - & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
1/N & 1/N & & & & 1/N & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Προκύπτει εύκολα ότι η κατάσταση 0 είναι απορροφητική, ενώ οι καταστάσεις $1, 2, .. N$ παροδικές

Έστω f_j ο αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης από την κατάσταση j στην κατάσταση 0, $j \geq 0$

Οι εξισώσεις που ικανοποιούν οι f_j, $j = 0, 1, .., N$ είναι:

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1 + \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_0 = 1 + \frac{1}{2} f_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f_3 = 1 + \frac{1}{3} f_1 + \frac{1}{3} f_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

(β) Γενικά $f_i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} P_{ij} f_j = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{i} f_j \quad , j = 1, 2, \dots$

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι $f_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j}, \ i \geq 1$

Για $i=1$ $f_1 = 1$ ισχύει.

Έστω $f_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} \ , \quad j = 1, 2, \dots, i$.

Τότε για $i+1$:

$$f_{i+1} = 1 + \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{i+1} f_j = 1 + \frac{1}{i+1} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}$$

$$= 1 + \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^{i} \sum_{j=k}^{i} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^{i} \frac{(i-k+1)}{k}$$

$$= 1 + \frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{i+1}{k} - 1 \right) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k} - \frac{i}{i+1} = \frac{1}{i+1} + \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{i+1} \frac{1}{k}$$

Επομένως ισχύει η επαγωγική υπόθεση $\forall \ i \geq 1$

και $\boxed{f_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}}$

Μια εναλλακτική απόδειξη

$$f_N = 1 + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} f_k = N\left(f_N - 1\right)$$

$$f_{N+1} = 1 + \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f_k = 1 + \frac{1}{N+1}\left[\sum_{k=0}^{N-1} f_k + f_N\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{N+1}\left[N\left(f_N - 1\right) + f_N\right] = 1 + f_N - \frac{N}{N+1} = f_N + \frac{1}{N+1}$$

Επομένως $f_{N+1} = f_N + \frac{1}{N+1}$, και επειδή $f_1 = 1$ προκύπτει άμεσα ότι $f_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$

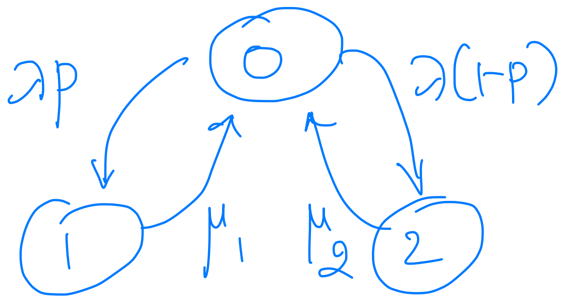
Θέμα 3

(a) Έστω $X(t) = 0, 1$ ή 2 αν τη χρονική στιγμή t ο κουρέας δεν κουρεύει κανέναν, κουρεύει έναν ενήλικα ή κουρεύει ένα παιδί, αντίστοιχα.

Η διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου, με ρυθμούς μετάβασης

$$q_{01} = \lambda p, \quad q_{02} = \lambda(1-p)$$

$$q_{10} = \mu_1, \quad q_{20} = \mu_2, \quad q_{ij} = 0 \text{ διαφορετικά}$$



Η διαδικασία είναι θετικά επαναληπτική και η στάσιμη κατανομή υπολογίζεται ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} P_0 \lambda p &= P_1 \mu_1 \\ P_0 \lambda (1-p) &= P_2 \mu_2 \\ P_0 + P_1 + P_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda p}{\mu_1} P_0 \\ P_2 &= \frac{\lambda(1-p)}{\mu_2} P_0 \end{aligned}$$

$$P_0\left(1 + \frac{\lambda p}{\mu_1} + \frac{\lambda(1-p)}{\mu_2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda p}{\mu_1} + \frac{\lambda(1-p)}{\mu_2}}$$

$$P_1 = \frac{\frac{\lambda p}{\mu_1}}{1 + \frac{\lambda p}{\mu_1} + \frac{\lambda(1-p)}{\mu_2}}$$

$$P_2 = \frac{\frac{\lambda(1-p)}{\mu_2}}{1 + \frac{\lambda p}{\mu_1} + \frac{\lambda(1-p)}{\mu_2}}$$

Τα ποσοστά χρόνου που ο κουρέας δεν εργάζεται, κουρεύει ενήλικα ή κουρεύει παιδί είναι ίσα με P_0, P_1, P_2, αντίστοιχα.

(b) Όταν υπάρχει θέση αναμονής, για να οριστεί η κατάσταση του συστήματος πρέπει γενικά να οριστεί ο τύπος του πελάτη που κουρεύεται (αν υπάρχει) και ο τύπος του πελάτη που περιμένει (αν υπάρχει). Επομένως

$$X(t) = \big(X_1(t),\ X_2(t)\big), \quad \text{όπου} \quad X_1(t), X_2(t) \in \{0,1,2\}$$

όπως στο ερ. (a).

$X_1(t)$: πελάτης που κουρεύεται

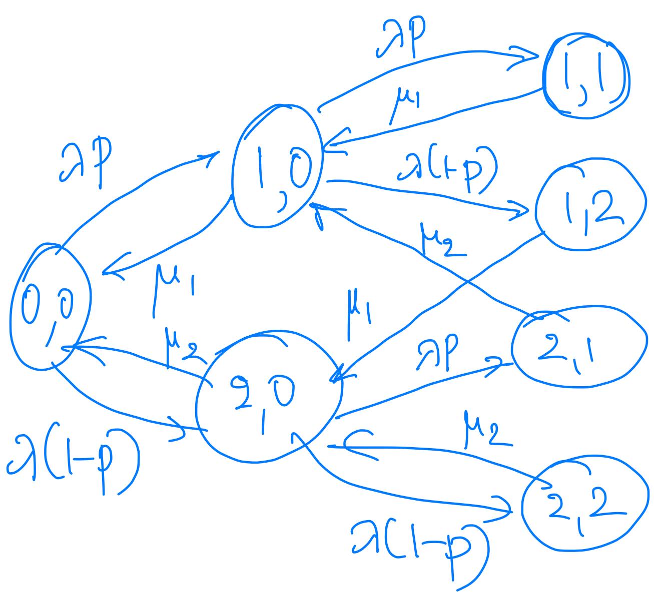
$X_2(t)$: " " περιμένει

Ο χώρος καταστάσεων είναι

$$S = \{(0,0), (1,0), (2,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

Οι καταστάσεις $(0,1)$, $(0,2)$ αποκλείονται γιατί δεν μπορεί ο κουρέας να μην εργάζεται ενώ περιμένει πελάτης

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι



(γ) Όταν κουρεύεται ένας ενήλικας και η θέση αναμονής είναι κενή, η κατάσταση είναι η $(1,0)$.
Επομένως ζητείται η πιθανότητα η επόμενη κατάσταση του συστήματος να είναι η $(0,0)$.

Επειδή $q_{(1,0)} = \lambda p + \lambda(1-p) + \mu_1 = \lambda + \mu_1$

και $q_{(1,0),(0,0)} = \mu_1$

προκύπτει ότι $P_{(1,0),(0,0)} = \dfrac{q_{(1,0)(0,0)}}{q_{(1,0)}} = \dfrac{\mu_1}{\lambda+\mu_1}$

(δ) Έστω $\{ P_{(i,j)},\ (i,j) \in S \}$ η οριακή κατανομή

(Η οριακή κατανομή υπάρχει επειδή η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και $|S| < \infty$).

Τότε ισχύει $$P_{(i,j)} = \lim_{t \to \infty} P_{(i,j)}(t),$$

όπου $$P_{(i,j)}(t) = P\big(X(t) = (i,j) \big)$$

Έστω $N_1(t)$ ο αριθμός ενηλίκων πεταλούδων στο κατάστημα τη στιγμή t. Τότε αν $X(t) = (i,j)$, ισχύει

$$N_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } (i,j) = (0,0), (2,0), (2,2) \\ 1, & \text{αν } (i,j) = (1,0), (1,2), (2,1) \\ 2, & \text{αν } (i,j) = (1,1) \end{cases}$$

Επομένως $$E[N_1(t)] = P_{(1,0)}(t) + P_{(1,2)}(t) + P_{(2,1)}(t) + 2P_{(1,1)}(t)$$

και $$\lim_{t \to \infty} E[N_1(t)] = P_{(1,0)} + P_{(1,2)} + P_{(2,1)} + 2P_{(1,1)}$$

Όμοια βρίσκουμε $$\lim_{t \to \infty} E[N_2(t)] = P_{(2,0)} + P_{(2,1)} + P_{(1,2)} + 2P_{(2,2)}$$